به نام خدا

Wavelet

گردآوری

احسان میررحیمی

کلمات کلیدی

Wavelet ، تبدیل فوریه، تبدیل ***SFTF***

چکیده

مقاله ای که در زیر قرار دارد آموزشی مفهومی درباره ی ویولت می باشد در این مقاله سعی شده مفاهیم کلی بیان شود و از پرداختن صرف به روابط ریاضی خود داری شود این مقاله دراصل ترجمه ی مقاله ی ***Robi Polikar***می باشد

۱.بخش اول

۱-۱. مقدمه

تبدیلات ریاضی به سیگنال هائی اعمال می شود تا اطلاعاتی از این سیگنالها بدست آید که این اطلاعات به راحتی از سیگنال اصلی قابل باز یابی نیستند.

سیگنال اصلی : سیگنال در حوزه ی زمان

Processed Signal **:سیگنالی که تحت تاثیر یک تبدیل قرار می گیرد.**

هنگامیکه یک سیگنال حوزه ی زمان را رسم می کنیم ما یک نمایشی از **زمان-دامنه** ی سیگنال داریم. که این تعبیر برای بیشتر کارهای پردازش سیگنال چندان مناسب نمی باشد.

دربیشتر موارد اطلاعات برجسته در سیگنال در محتوای فرکانسی آن موجود می باشد طیف فرکانسی ***(Frequency Spectrum)*** یک سیگنال عناصر فرکانسی آن سیگنال می باشد که نشان میدهد در آن سیگنال چه فرکانس هائی موجود می باشد اگر متغیر های یک سیگنال به سرعت تغییر کنند می گوئیم که فرکانس بالا می باشد و اگر تغییرات آنها نرم باشد می گوئیم که فرکانس پائین می باشدو اگر متغییر های آن اصلا تغییر نکند می گوئیم که ***Zero Frequency*** می باشد

به عنوان مثال فرکانس انتشار یک روزنامه خیلی بالاتر از یک مجله ی ماهیانه می باشد.

سوالی که در اینجا مطرح میشود این است که :

محتوی فرکانسی یک سیگنال را چگونه اندازه می گیریم؟

این عمل با استفاده از ***FT(Fourier Transform)*** انجام میشود.اگر تبدیل ***FT*** در حوزه ی زمان گرفته شود نمایش دامنه-فرکانسِ سیگنال به دست می آید.

نمودار دامنه-فرکانس نشان می دهد که هر فرکانس به چه مقدار در سیگنال موجود می باشد.

به خاطر تقارن هرمیتی در سیگنال های حقیقی معمولا طیف مثبت را در نظر میگیرم.(قسمت دوم را در نظر نمی گیریم)

چرا ما به اطلاعات حوزه ی فرکانس احتیاج داریم؟

اغلب موارد اطلاعاتی که در حوزه ی زمان به راحتی قابل نمایش نیستند در حوزه ی فرکانس به راحتی نشان داده می شوند

مثلا :فرض کنید به یک سیگنال ***ECG***(نوار قلب) نگاه کنیم.شکل یک سیگنالِ سالم برای کاردیولوژیست ها شناخته شده است.و هر انحرافی از آن شکل به عنوان یک شرایط بیمار ی در نظر گرفته میشود. شرایط بیماری اگر چه همیشه به وضوح در حوزه ی زمان موجود نمی باشند اما کاردیولوژیست ها معمولا از اطلاعات حوزه ی زمان که در نوار کاغذی ثبت شده برای پردازش سیگنال ***ECG*** استفاده می کنند

اخیرا برنامه ی کامپیوتری ِ ثبت کننده/ پردازش کننده از اطلاعات حوزه ی فرکانس نیز استفاده میکند تا تصمیم بگیرد آیا شرایط پاتولوژیکی(آسیب شناسی)وجود دارد یا خیر.شرایط پاتولوژیکی بعضی مواقع هنگامیکه **محتوی فرکانسی** یک سیگنال آنالیز می شود راحتر تشخیص داده میشوند.

۱-۲.برخی تبدیلات ریاضی

تبدیلات زیادی در مهندسی و ریاضیات به کار می روند که هر کدام مزایا و معایب و حوزه ی کاری خود را دارند

برخی از آنها عبارتند از :

تبدیل فوریه ،هیلبرت ،توزیع ویگنر و.... و تبدیل ویولت ***Wavelet Transform(WT***

۱-۲-۱.نگاهی دقیق تر به(FT)

تبدیل فوریه مانند ***WT*** یک تبدیل معکوس پذیر است به معنی اینکه این اجازه را به ما می دهد که بین سیگنال اصلی و سیگنال پردازش شده رابطه ای داشته باشیم و از هر کدام بتوانیم به دیگری برویم.

اما مسئله ای مه در اینجا مطرح می شود این است که:

در هر زمان مشخص برای تبدیل ***FT*** فقط اطلاعات حوزه ی فرکانس موجود میباشد و اطلاعی از حوزه ی زمان نداریم همین طور برای معکوس ***FT*** فقط اطلاعات حوزه ی زمان را داریم و اطلاعاتی درباره ی حوزه ی فرکانس در تبدیل معکوس موجود نمی باشد.

سوالی که در اینجا مطرح میشود این است که آیا نیاز هست که در یک زمان یکسان اطلاعات حوزه ی زمان و فرکانس هر دو موجود باشند.پاسخ به این سوال به کاربرد های عملی و طبیعت طیف سیگنال بستگی دارد.

یادآوری

FT اطلاعاتی از حوزه ی فرکانس سیگنال به ما میدهد به این معنی که به ما میگوید: هر فرکانس به چه مقداری در سیگنال موجود می باشد.اما ***FT*** این آگاهی را به ما نمی دهد که در چه زمان هائی این مولفه های فرکانسی وجود دارد.

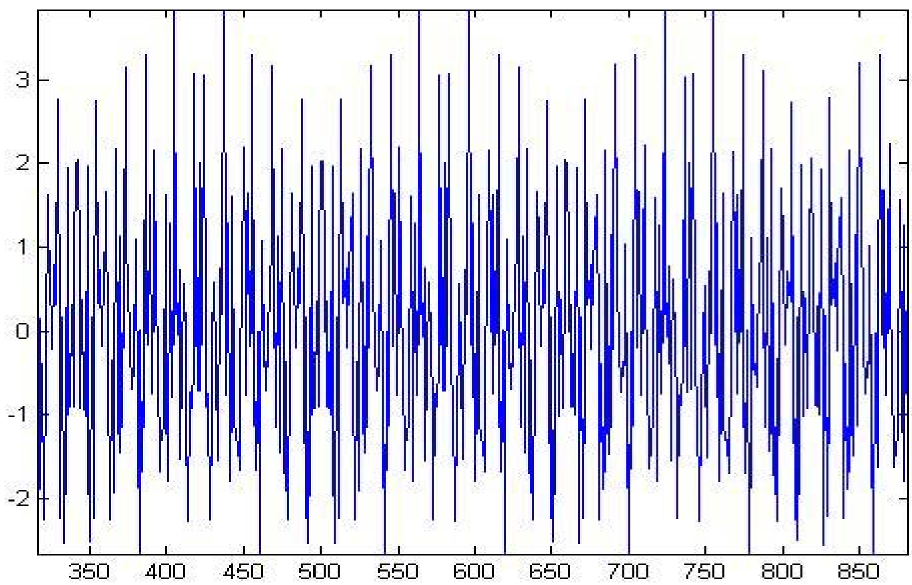
۱-۲-۲.سیگنال ایستا (Stationary signal):

سیکنالی که محتوی فرکانسی آن در زمان تغییر نکند سیگنال ایستا نامیده می شود.در این حالت نیاز نیست ما بدانیم در چه زمانی مولفه های فرکانسی موجود هستند چون تمام مولفه های فرکانسی در تمام زمانها موجود می باشند.

به طور خلاصه: فرکانس خاصی در تمام زمانها موجود باشد.

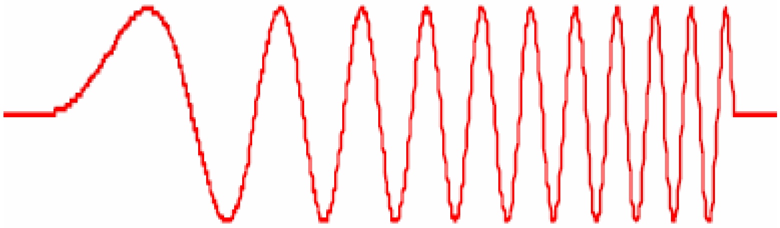
مثلا سیگنال زیریک سیگنال ایستا می باشد به خاطر اینکه فرکانس های ***10,25,50,100*** را در هر لحظه ی زمانی داده شده ای دارا می باشد.

$$x(t) = \cos(2\pi \times 10 \times t) + \cos(2\pi \times 25 \times t) + cso(2\pi \times 50 \times t) + \cos(2\pi \times 100 \times t)$$



اما سیگنال زیر یک سیگنال ایستا نمی باشد.

سیگنال زیر سیگنالی است که محتوی فرکانسی آن به طور ثابت با زمان تغییر می کند این سیگنال به ***Chrip*** معروف است.



توجه کنید:نسبت به سیگنال بالائی حالت متناوب بودنی در ***chrip*** نمی بینیم.و محتویات فرکانسی برای چنین سیگنال هائی در تمامی زمان ها اتفاق نمی افتد

بطور خلاصه:

موج ایستا:فرکانس هایش در تمامی زمانها موجود می باشد

موج غیر ایستا:در محدوده های زمانی متفاوتی داری فرکانس ثابت می باشد

با توجه به اینکه شکل حوز ه ی زمان دو سیگنال ایستا و غیر ایستا***(Chrip)*** متفاوت می باشد اما شکل کلی حوزه ی فرکانس آنها اگر از ریپل های موجود در ***Chrip*** و نسبت دامنه ی دو موج صرفنظر کنیم یکسان می باشد

یادآوری :***FT*** اطلاعاتی از مولفه های طیفی سیگنال بدون در نظر گرفتن اینکه در چه زمانی مولفه های طیفی ظاهر می شوند به ما می دهد. بنا بر این ***FT*** روش مناسبی برای یک سیگنال غیر ایستا نمی باشد البته بجز یک استثناء:

وقتی که می خواهیم بدانیم در یک سیگنال غیر ایستا چه مولفه های فرکانسی ای موجود می باشد ***FT*** می تواند مناسب باشد اما اگر بخواهیم بدانیم این مولفه ها در چه زمان هائی رخ می دهد ***FT*** نمی تواند به ما کمک کند و تبدیل فوریه تبدیل درستی برای استفاده ی سیگنال های غیر ایستا نمی باشد.

بسیاری از سیگنال هائی که در عمل با آنها سرو کار داریم سیگنال های غیرایستا هستند مثلا :***ECG***، ***EEG***، ***EMG*** و در تحلیل این سیگنال ها تبدیل فوریه به ما کمکی نمی کند . هنگامیکه موضع

زمانی مولفه های یک طیف مورد نظر باشند (یعنی اینکه در چه زمانی ، چه مولفه ای رخ دهد) تبدیلی که نمایشی از ***زمان – فرکانس*** سیگنال به ما بدهد مورد نیاز است.

FT فقط می گوید که چه مولفه های فرکانسی ای از یک سیگنال وجود دارد نه کمتر نه بیشتر فقط در همین حد

۱-۳.تبدیل ویولت(WT):

WT تعریفی از حوزه ی زمان – فرکانس در اختیار قرار می دهد.البته تنها ***WT*** این کار را نمی کند تبدیل های دیگری مثل تبدیل فوریه ی زمان کوتاه(***short time***)و توزیع ویگنر هم این کار را انجام می دهند.

در بعضی مواقع مولفه های طیفی ویژه ای درلحظه ای اتفاق می افتند که می توانند مورد توجه قرار گیرند در این مواقع بسیار سودمند است که بدانیم این مولفه ها ی طیفی ویژه در چه بازه ی زمانی ای اتفاق می افتند.مثلا: اگر در ***EEG*** تاخیر پتانسیل مرتبط یک رویداد ویژه مورد توجه می باشد
پتانسیل مر تبط یک رویداد ≅ پاسخ مغز به یک محرک مثلا نور فلش می باشد.تاخیر این پاسخ مقدار زمانی است که بین آغاز تحریک و پاسخ سپری می شود.

WT این قابلیت را دارد که اطلاعاتی از حوزه ی زمان و فرکانس را باهم در اختیار قرار دهد بنابراین نمایشی از زمان – فرکانس سیگنال در اختیار ما قرار می دهد.

اینکه ***WT*** چگونه به طور کامل کار میکند یک داستان جالب دیگری است و باید پس از ***STFT(short time transform fourier)*** توضیح داده شود.***STFT*** به طور جزئی در در بخش های بعدی توضیح داده می شود.در اینجا دراین حد کافی است که بگوئیم ***WT برای اینکه به بعضی از مسائل تحلیلی مرتبط با STFT غلبه کند توسعه داده شد.***که در بخش های بعدی توضیح خواهیم داد.

توضیحی مختصر درباره ی نحوه ی کار *WT* :

عبور از فیلتر های بالا گذر و پائین گذر و تجزیه ی سیگنال اصلی در حوز ه ی فرکانس

سیگنال حوزه ی زمان را از فیلتر های پائین گذر و بالا گذر عبور می دهیم هر فیلتر بخش هائی از فرکانس بالا و فرکانس پائین فیلتر را استخراج می کند ،این عمل چند بار تکرار می شود و هر دفعه بخش هائی از سیگنال برداشته می شود.

فرض کنید یک سیگنال داریم که تا فرکانس ***1000Hz*** در آن موجود میباشد با چند بار عبور دادن از فیلتر های بالا گذر و پائین گذر داریم:

یک با ر عبور :سیگنال اصلی به دو بخش تقسیم می شود

سیگنالی که فرکانس های بالا را دارد ***(500-1000 Hz)*** و سیگنالی که فرکانس های پائین را دارد ***(0-500 Hz)***

برای هر بخش بدست آمده این تجزیه(جدا سازی) را مجدد انجام می دهیم

بار دوم بخش پائین گذر:این بار وقتی سیگنال پائین گذر را ار فیلتر های بالا گذر و پائین گذر عبور دهیم ۳ دسته سیگنال بدست می آوریم.که در فرکانس های (***0-250,250-500,500-1000 Hz***)می باشند.

بار سوم: اگر مجدد عمل فوق را انجام دهیم این بار ۴ دسته سیگنال داریم(***0-125 , 125-250,250-500,500-1000 Hz***)

این جدا سازی را آنقدر انجام میدهیم تااینکه سیگنال را به یک سطوح از پیش تعیین شده تجزیه کنیم.نهایتا ما یک دسته سیگنال داریم که حقیقتا سیگنال اصلی را نشان میدهند اما در دسته های فرکانسی مختلف می باشد.حالا می دانیم که کدام سیگنال به کدام باند فرکانسی تعلق دارد و اگر تمامی سیگنال های بدست آمده را در کنار یکدیگر قرار دهیم و آنها به صورت ***3-D*** (سه بعدی)رسم کنیم در این صورت:

محور های مختصات این نمو دارِ سه بعدیِ ما :زمان-فرکانس-دامنه می باشند.

این نمودار به ما نشان میدهد که هر فرکانس در چه زمانی و با چه مقداری وجود دارد.

براساس اصل عدم قطعیت:ما به طور دقیق نمی توانیم بفهمیم که چه فرکانسی دقیقادرچه لحظه ی زمانی ای وجود دارد مافقط می توانیم بفهمیم که چه محدود ه ی فرکانسی ای در چه مدت زمانی وجود دارد

اصل عدم قطعیتِ هایزنبرگ می گوید:مقدار حرکت و مکان ذرات متحرک به طور لحظه ای شناخته نمی شوند.

که در بحث ما به صورت زیر قابل استفاده است:

اطلاعات فرکانس و زمانِ سیگنال در بعضی نقاط معین نمی توانند شناخته شوند.به عبارت دیگر: ما نمی توانیم بفهمیم چه مولفه های فرکانسی ای در چه ***زمان هائی*** اتفاق می افتنددر عوض بهترین

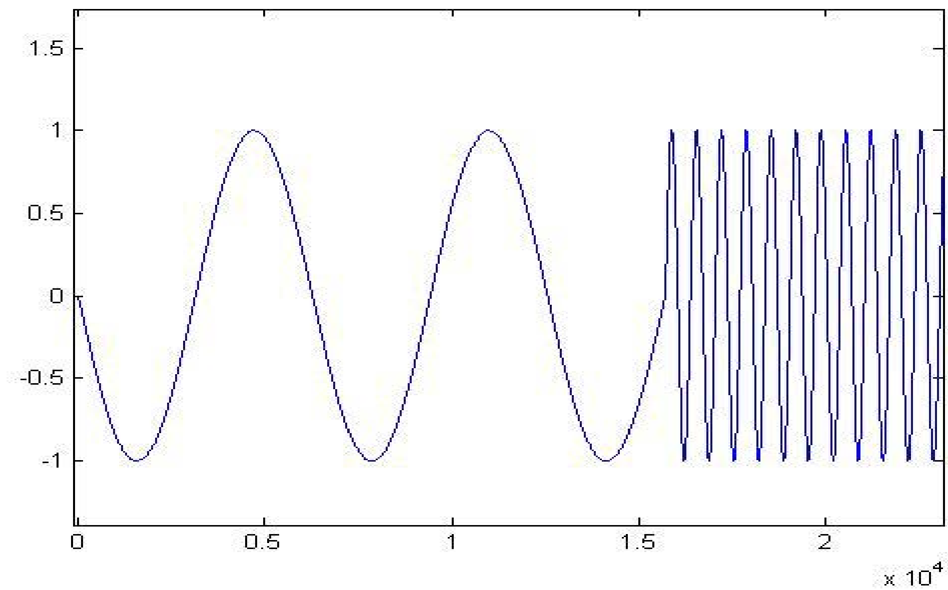
چیزی که ما می توانیم بفهمیم این است که چه **مولفه های فرکانسی ای** در چه ***محدوه های*** زمانی ای وجود دارند.

در واقع این مشکل تفکیک پذیری می باشد و دلیل اصلی ای است که چرا پژوهشگر ها از ***STFT*** به ***WT*** گرایش پیدا کردند همین می باشد.

STFT برای تمام زمانها تفکیک پذیری ثابتی را میدهد در حالیکه _WT_ تفکیک پذیری متغییری به صورت زیر ارائه می دهد:

فرکانس های بالا در حوزه ی زمان و فرکانس های پائین در حوزه ی فرکانس بهتر بازیابی می شوند .یعنی: یک مولفه ی فرکانس بالا در حوزه ی زمان بهترتشخیص داده (با خطای نسبی کمتری) می شود و بر عکس مولفه ی فرکانس پائین در مقایسه با مولفه ی فرکانس بالا در حوزه ی فرکانس بهتر قرار می گیرد

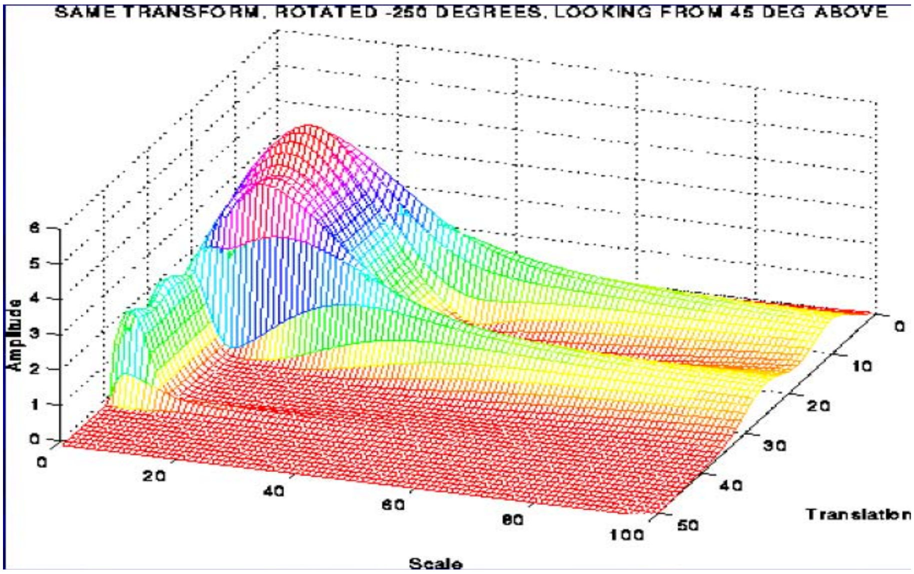
توضیح:علت این امر واضح است چون در یک بازه ی زمانی برابر بخش فرکانس بالای یک سیگنال تعدادنمونه ها ی بیشتری در مقایسه با بخش فرکانس پائین همان سیگنال دارد به شکل زیر توجه کنید:



پس به طور خلاصه

فرکانس های پائین در حوزه ی فرکانس بهتر تجزیه می شوند در حالی که فر کانس های بالا این طور نیستند

تبدیل پیوسته ی ویولت سیگنال بالا به صورت زیر می شود:



در نمودرا بالا ***Scale*** ، معکوس فرکانس می باشد یعنی ***Scale***ِ بالا به معنی فرکانس پائین و ***Scale***ِ پائین به معنی فرکانسِ بالا می باشد. نتیجتا :پیک کوچک در نمودار بالا معادل فرکانس های بالا و پیک بزرک معادل فرکانس پائین تری می باشد (چون از نظر زمانی پیک کوچک زودتر زده می شود و فرکانس آن گقتیم معکوسِ ***Scale*** می باشد لذا محتویاتش فرکانس بالا هستند.)

مولفه های فرکانس بالا در حوزه ی زمان در انتهای سیگنال بودند یابه عبارت دیگر در زمان جلوتری اتفاق می افتادند اما مولفه های فرکانس پائین در در حوزه ی زمان زودتر اتفاق می افتند که در تبدیل ویولت پیوسته از نظر ترتیب با مولفه های فرکانس بالا جابجا شده اند.

۲.بخش دوم

۲-۱.نگاهی گذرا به بخش اول

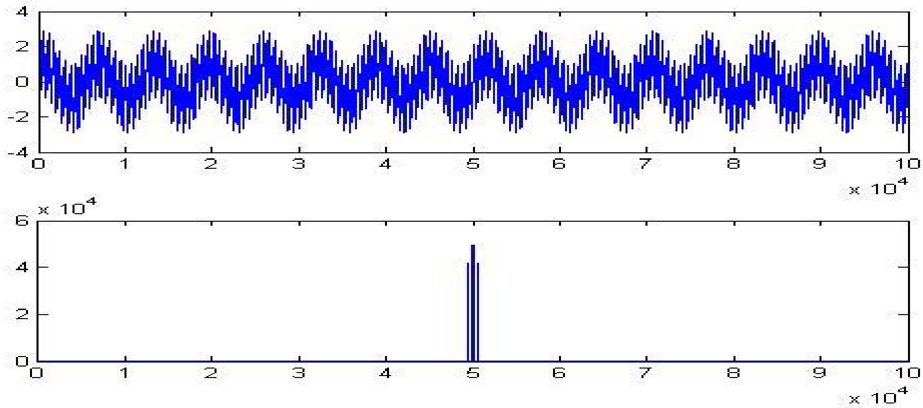
ما به تبدیل ویولت ***(WT)*** برای پردازش سیگنال های غیر ایستا(برای مثال سیگنال هائی که پاسخ فرکانسی آنها بازمان تغییر میکند) نیاز داریم.

به مثال زیر توجه کنید

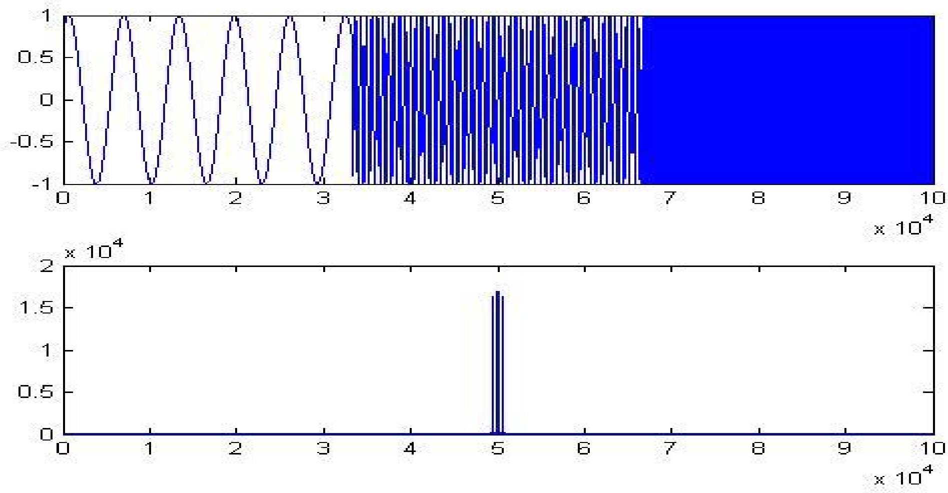
فرض کنید که ما دو سیگنال داریم که هر دو دارای فرکانس های پایه ی یکسانی هستند یکی از این دو سیگنال تمام فرکانس ها را در کل زمان های وجود سیگنال دارا می باشد و در دیگری هر فرکانسی،در محدوده ی زمانی مشخصی وجود دارد .شکل ظاهری این دو سیگنال در محدوده ی زمان متفاوت می باشد اما اندازه ی تبدیل فوریه ی آنها در حوزه ی فرکانس یکی است وتفاوتی با هم ندارند

مثال فوق گویای این مطلب است که تبدیل فوریه برای سیگنال های غیر ایستا کاربرد ندارد و چیزِ زیادی(اطلاعات) از سیگنال را نمی دهد

توضیح: شکل اول در هر نمودار سیگنال حوزه ی زمان می باشد و شکل دوم ***FT*** آن سیگنال می باشد.



با توجه به شکل فوق مشاهده می شود که سه فرکانس داریم برای یک سیگنال ایستا اما برای یک سیگنال غیر ایستا ***FT*** به صورت زیر می شود.



مقایسه و نتیجه :

با توجه به اینکه حوزه ی زمان دو سیگنال متفاوت می باشداما ***FT*** آنها به یک شکل بدست آمد و این دقیقا ناتوانی فوریه است برای پردازش سیگنال های ِ غیر ایستا.***(Non stationary)***

اما سوالی که در اینجا مطرح می شود این است که :چرا چنین حالتی پیش آمد؟چرا هر دو سیگنال تبدیل فوریه ی یکسانی دادند؟

برای پاسخ این سوال به بحث زیر توجه کنید.

۲-۲.تبدیل فوریه

در قرن ***19*** فوریه نشان داد که هر سیگنال متناوبی را می توان به صورت جمع نامحدود توابع مختلط نمائی نشان داد. چند سال بعد از اینکه فوریه این تئوری را مطرح کرد نظریه ی فوریه ابتدا به سیگنال های غیر متناوب سپس به سیگنال های گسسته-زمانِ متناوب و غیر متناوب بسط داده شد.بعد از این تعمیم تبدیل فوریه یک ابزار محاسباتی برای بسیاری از برنامه های کامپیوتری شد در سال ۱۹۶۵ یک الگوریتم به نام ***FFT*** نوشته شد و بعد از آن تبدیل فوریه محبوب تر شد.

۲-۲-۱.نگاهی دقیق تر به تبدیل فوریه

FT یک سیگنال را به توابع نمائی مختلط در فرکانس های متفاوت تجزیه می کند روشی که تبدیل فوریه در آن این کار را انجام می دهد با معادلات زیر بیان می شوند:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi f t}dt \qquad (1)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2j\pi f t}df \qquad (2)$$

در روابط بالا t نشان دهنده ی زمان و f نشان دهنده ی فرکانس می باشدتوجه کنید که x نشان دهنده ی سیگنال اصلی و X نشان دهنده ی سیگنال حوزه ی فرکانس می باشدمعادله ی ***(1)*** معادله ی تبدیل فوریه و معادله ی ***(2)*** تبدیل فوریه ی معکوس است.متاسفانه بسیاری از افراد معادلات بالا را بدون اینکه قاعده ی زیر را بدانند به کار می برند :

به معادله ی ***(1)*** توجه کنید،سیگنال ***x(t)*** در یک عبارت نمائی در یک فرکانس مشخص ِ f ضرب شده و سپس در تمام زمانها از این عبارت انتگرال گرفته میشود(عبارت تمام زمانها بعدا شرح داده می شود)

توجه کنید که در معادله ***(1)*** عبارت نمائی را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t) \qquad (3)$$

عبارت فوق درای یک بخش حقیقی ِ کسینوسی، با فرکانس f و یک بخش موهومی ِ سینوسی با فرکانس f می باشد پس تا اینجا با توجه به عبارت ***(1)*** سیگنال اصلی را در یک عبارت نمائی مختلط که دارای بخش های سینوسی و کسینوسی است ضرب کردیم و از این حاصلضرب انتگرال می گیریم به عبارت دیگر ما تمام نقاط رابه این حاصلضرب اضافه کردیم .اگر مقدار این انتگرال (که از نظر مقدار، مقدارش دقیقا مهم نیست) مقدار ِ بزرگی باشد آنگاه می گوئیم : سیگنال ***x(t)*** در فرکانس ِ f مولفه ی فرکانسی غالبی دارد(در حوزه ی فرکانس انداز ه ی این سیگنال در فرکانس f بزرگ است.)مفهوم این عبارت این است که یک بخش عمده ای از سیگنال از فرکانس ِ f در ست شده است.

اگر مقدار انتگرال کوچک باشد به معنی آن است که سیگنال مولفه ی فرکانسی عمده ی f ی ندارد.و نهایتا اگر مقدار این انتگرال صفر باشد به معنی این است که سیگنال اصلا دارای فرکانس ِ f نمی باشد.

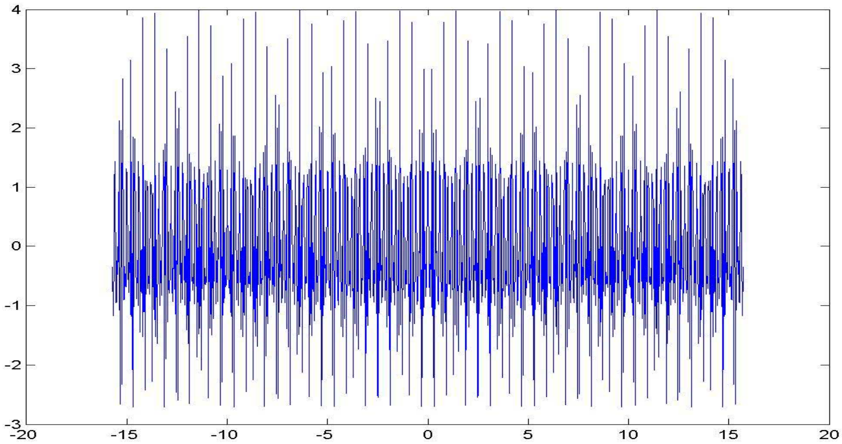
اطلاعاتی که با انتگرال ِ معادله ی ***(1)*** بدست می آیند به تمام لحظه های زمانی ارتباط دارد بخاطر اینکه محدوده ی انتگرال گیری از منهای بینهایت تا مثبت بینهایت در سرتاسر زمان می باشد.و چنین بر می آید که اهمیتی ندارد که در چه محدوده ی زمانی ای مولفه ی فرکانسی f رخ دهد(:توجه کنید که این دقیقا عیب تبدیل فوریه برای سیگنال های غیر ایستا می باشد)که این موضوع به وضوح نتیجه ی انتگرال را تحت تاثیر قرار می دهد.به عبارت دیگر مولفه ی فرکانسی ِ f چه درمحدوده ی زمان ِ Δt_1 باشد چه درمحدوده ی زمانی Δt_2 رخ دهد اثر یکسانی در انتگرال معادله ی ***(1)*** می گذارد.و این علت ناتوانی تبدیل فوریه در مواقعی که سیگنال تغییر ِ زمانی فرکانس داشته باشد؛(یعنی جائی که مثلا در یک سیگنال فرکانس $f1$ در یک محدوده ی خاص ،فرکانس $f2$ در محدوده ی دیگر و...به طور خلاصه یک سیگنال غیر ایستا باشد) می باشد.لازم به یاد آوری است که اگر سیگنال دارای مولفه ی فرکانسی ِ f در تمامی زمانها باشد نتیجه ای که توسط تبدیل فوریه بدست می آید قابل قبول است. توجه کنید که تبدیل فوریه می گوید که آیا یک مولفه ی فرکانسی مشخص وجود دارد یا نه. واین اطلاعات به مکانی که

این مولفه ها در حوزه ی زمان قرار دارند، بستگی ندارد.پس بسیار مهم است که قبل از پردازش یک سیگنال با ***FT*** بدانیم که آن سیگنال یک سیگناتل ایستا است یا غیر ایستا.

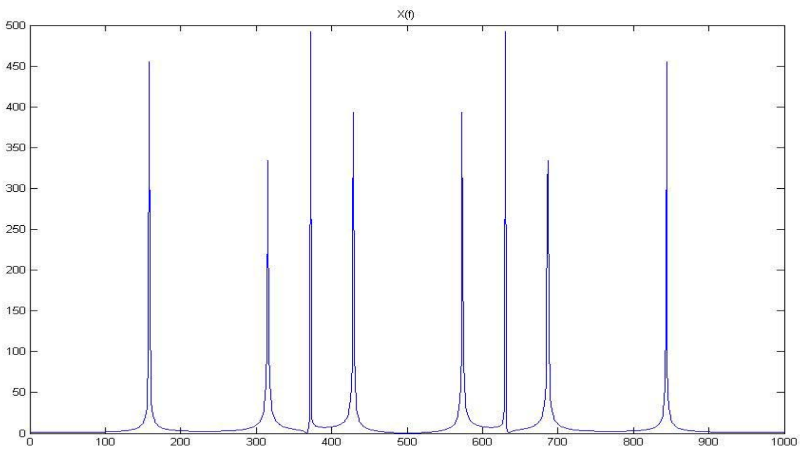
مثالی که در بخش اول زده شد اکنون واضح می شود:
به شکل صفحه ی بعد که سیگنال ***x(t)*** را نشان میدهد توجه کنید:

$$x(t)=\cos(2\pi*5*t)+\cos(2\pi*10*t)+\cos(2\pi*20*t)+\cos(2\pi*50*t)$$

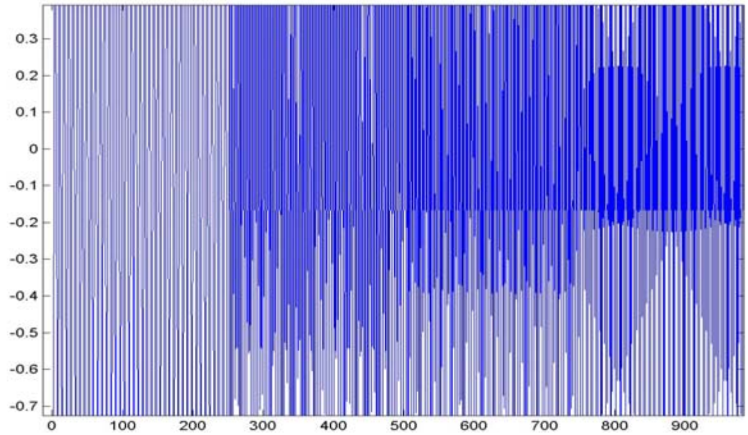
این سیگنال چهار مولفه ی فرکانسی دارد***5,10,20,50*** که در تمام زمانها اتفاق می افتند.



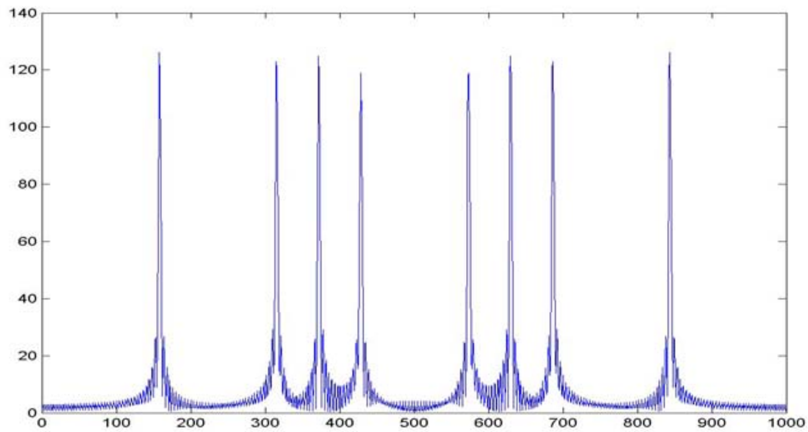
محور فرکانس در اینجا بصورت محدود نمایش داده شده اما در تئوری این محور تا بینهایت ادامه دارد.در حقیقت در اینجا ما تبدیل فوریه ی گسسته ی ***DFT*** را حساب کردیم در چنین حالتی محورهای فرکانسی به حداقل دو برابر فرکانس نمونه برداری منتقل می شوند و سیگنال اصلی حالت متقارن می گیرد.



حالا به سیگنا ل زیر توجه کنید که یک سیگنال غیر ایستا می باشد و تمامی فرکانس های سیگنال قبل را دارا می باشد.اما این مولفه ها در زمان های متفاوتی رخ می دهند.



و تبدیل فوریه ی این سیگنال به صورت زیر می باشد:



توجه کنید که پیک های هر دو سیگنال در فرکانس های خاصی اتفاق می افتد علت نویزی که در شکل دیده می شود این است که این فرکانس ها اغلب در سیگنال وجود دارند اما به دلیل اینکه دامنه ی آنها کوچک است مولفه ی عمده ی فرکانسی نمی باشند و دلیل اینکه ماآنها را می بینیم به خاطر تغییر ناگهانی بین فرکانس های مختلف می باشد.

۲-۳.جمع بندی

تا اینجا مفاهیم پایه ای تبدیل فوریه را متوجه شدیم که چه موقع میتوانیم از آن استفاده کنیم و چه موقع نمی توانیم از مثال فوق به این نتیجه می رسیم که ***FT*** نمی تواند به خوبی بین دو سیگنال تمایز قائل شود از نظر ***FT*** دو سیگنال یکسان هستند به خاطر اینکه هر دو از مولفه های فرکانسی یکسانی تشکیل شده اند.بنابراین ***FT*** ابزار مناسبی برای آنالیز سیگنال های غیر ایستا نمی باشد.

در پایان این نکته ی مهم را در خاطر داشته باشید متاسفانه بیشتر افراد در این مورد توجه نمی کنند آنها فرض می کنند که سیگنالی که آنها دارند یک سیگنال ایستا می باشد در حالی که در بسیاری از مواقع عملی چنین نیست.البته در جائی که علاقه مند نباشید که بدانید در چه محدوده ی زمانی ای چه مولفه های فرکانسی رخ میدهند و فقط مایل باشید بدانید که کلا ،چه مولفه های فرکانسی ای وجود دارند در این صورت ***FT*** یک ابزار کاری مناسب است.

بنابراین حالا که فهمیدیم ***FT*** را نمی توانیم(نباید) برای سیگنال های غیر ایستا به کار ببریم چه کار باید بکنیم؟

قبل از پایان به یک نکته اشاره کنیم که ***WT*** یک ابزار کاری جدید می باشد و قبل از آن بسیاری از محققین فهمیده بودند که ***FT*** برای سیگنال های غیر ایستا کارائی ندارد ابزاری که در اینجا برای سیگنال های ایستا مطرح کردند ***STFT*** بود که موضوع بحث بعدی ما می باشد.

۳.بخش سوم

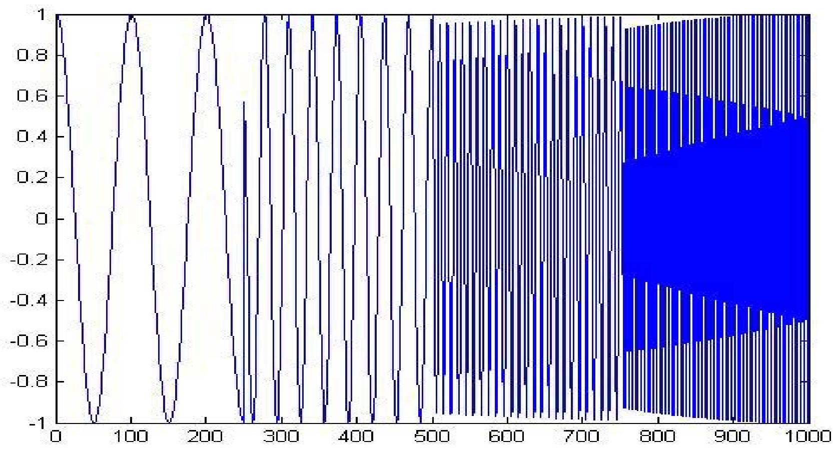
۳-۱.تبدیل فوریه ی زمان کوتاه (STFT)

این بخش را با یک سوال برای مرور بخش قبل و مقدمه ی این بخش آغاز می کنیم:

مشکل اصلی *FT* در چه بود؟

این تبدیل برای سیگنال های غیر ایستا به درستی کار نمی کرد.

به شکل زیر تو جه کنید:



سوالی که در اینجا مطرح میکنیم این است که:

آیا می توان بخش هائی از این سیگنال غیر ایستا را به عنوان یک سیگنال ایستا در نظر گرفت؟

بله.

به سیگنال بالا توجه کنید این سیگنال در بازه های زمانی ***250*** ی، ایستا می باشد.

اگر ناحیه ای که سیگنال در آن ایستا فرض می شود خیلی کوچک باشد آنگاه ما به سیگنال از میان پنجره های باریکی نگاه می کنیم. بقدری باریک که، بخشی از سیگنال که از میان آن دیده میشود، واقعا ایستا باشد.

این نظریه ی تجدیدِ نظر شده ی تبدیل فوریه، ***STFT*** نامیده می شود.

فقط یک تفاوت کوچک بین ***FT*** و ***STFT*** وجود دارد در ***STFT*** سیگنال به قطعات به اندازه ی کافی کوچک تقسیم می شود که این قطعاتِ سیگنال می توانند ایستا در نظر گرفته شوند. برای این منظور یک تابعِ پنجره(***w***) در نظر گرفته می شود.پهنای این پنجره باید برابر بخشی از سیگنال باشد که خاصیت ایستا بودن سیگنال معتبر باشد.

تابع پنجره ابتدا در شروع هر سیگنال قرار می گیرد،یعنی تابع پنجره در ***t=0*** قرار می گیرد. فـرض کنیـد که پهنای پنجره ***T*** باشد در لحظه ی ***t=0*** تابع پنجره با $\frac{T}{2}$ اولیـه ی سـیگنال همپوشـانی مـی کنـد و سپس تابع پنجره و سیگنال در هم ضرب می شوند.بـا انجـام ایـن عمـل فقـط $\frac{T}{2}$ ثانیـه از سـیگنال بـا اختصاص دادن مقدار مناسبی به تابع پنجره انتخاب می شود(اگر پنجره مستطیلی باشـد و دامنـه ی آن ***1*** باشد،حاصلضرب برابر خود سیگنال می باشد)و این حاصلضرب به عنـوان یـک سـیگنال دیگـر در نظـر گرفته می شود که حالا ***FT*** گرفته می شود.به عبارت دیگر ***FT*** ی این سیگنال ماننـدِ ***FT*** هـر سـیگنال دیگر گرفته می شود.

نتیجه ی این تبدیل ***FT*** در بازه ی $\frac{T}{2}$ ِ اول از سیگنال می باشد.اگر این بخـش از سـیگنال ایـستا باشـد همانطور که فرض شد بنابر این مشکلی وجود نخواهد داشت و توصیف فرکانـسی $\frac{T}{2}$ ِ اول ایـن سـیگنال صحیح است. مرحله ی بعدی شیفت دادن این پنجره به محل جدید t_1

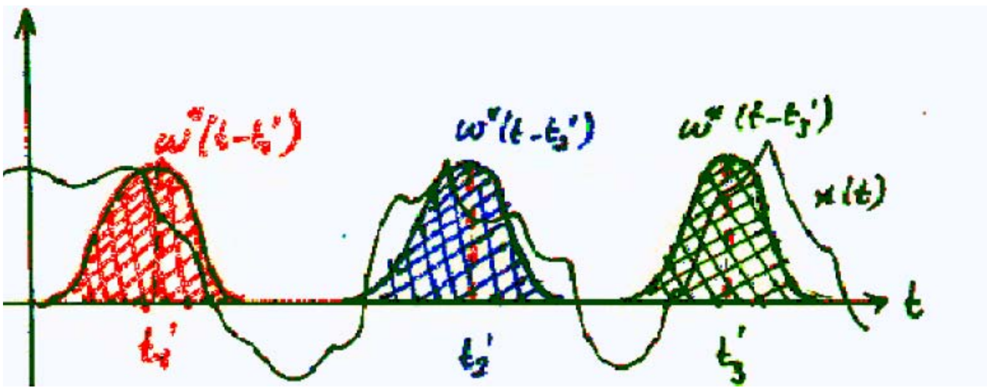
،ضرب سیگنال در این پنجره ونهایتا گرفتن ***FT*** از حاصلضرب می باشد.این روند ادامه می یابد تـا اینکـه پنجر ه ی شیفت یافته به انتهای سیگنال برسد.

تعاریف فوق در یک خط ***STFT*** را خلاصه می کنند:

$$STFT_{X}^{(\omega)}(t',f)=\int_{t}[x(t)*\omega^{*}(t-t')]*e^{-j2\pi ft}\,dt \qquad (1)$$

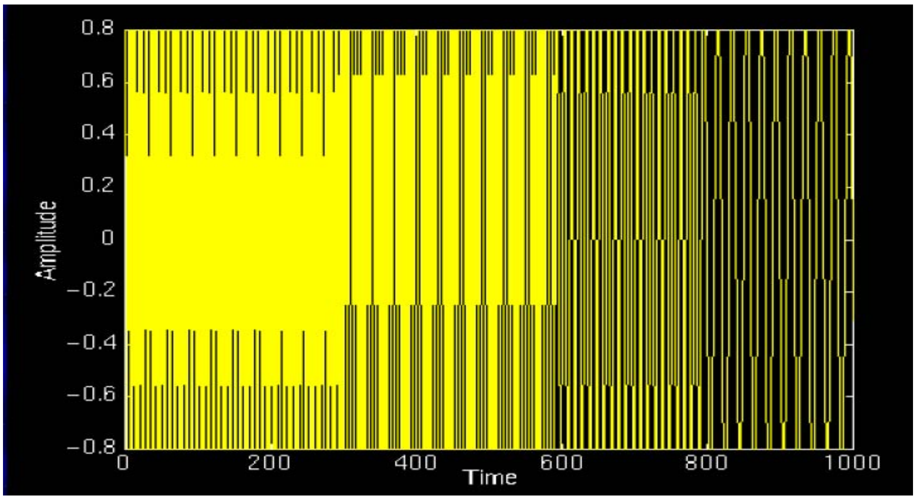
در رابطه ی بالا ***x(t)*** خودِ سیگنال ، $\omega(t)$ تابع پنجره و * مزدوج مختلط می باشد.از رابطـه ی بـالا مـی فهمیم که ***STFT*** ی یک سیگنال چیزی نیست جز ***FT*** ی حاصلضرب یک سیگنال در یک تابع پنجره.

برای هر t',f ضرائب جدیدی برای ***STFT*** بدست می آید تصویر زیر می تواند برای فهم بهتر مفید باشد.

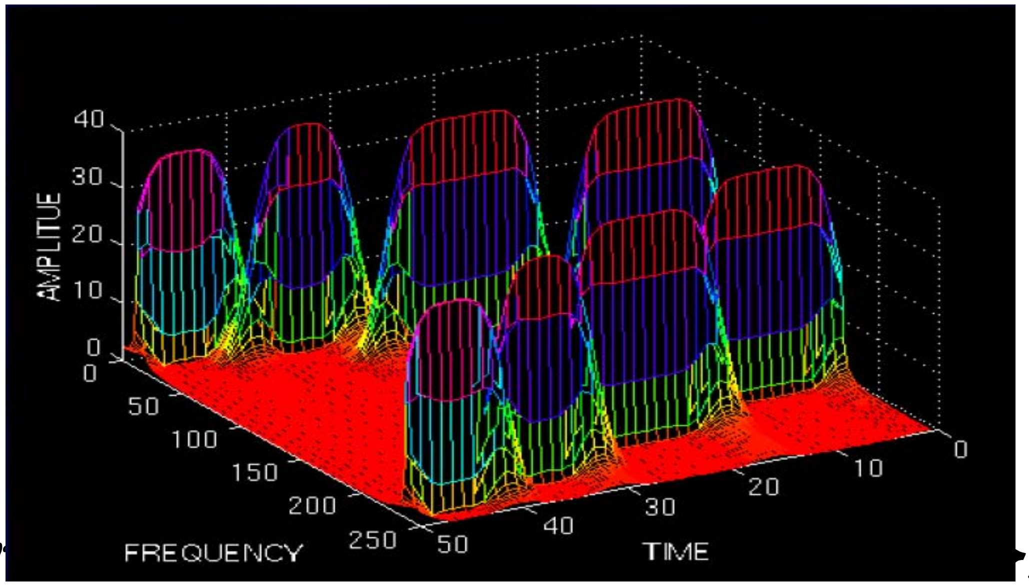


توابع شبه-گوسینی که در شکل به صورت رنگی نشان داده شده اند در اصل توابع پنجره هستند.پنجره های قرمز ،آبی و سبز به ترتیب توابع پنجر ه می باشند که در زمان های t_1,t_2,t_3 قرار گر فته اند.اینها معادل ***FT*** های مختلف در بازه های زمانی متفاوت می باشد بنابراین ما یک توصیف زمان-فرکانس***(TFR)*** صحیحی از سیگنال به دست می آوریم

پیش از هر کار دیگر با توجه به اینکه تبدیل ما***(STFT)*** تابعی از زمان و فرکانس می باشد(بر خلاف ***FT*** که فقط تابعی از زمان بود)این تبدیل ***(STFT)*** یک تبدیل ۲ بعدی (و در صورتی که دامنه را هم در نظر بگیریم ۳ بعدی)می باشد.سیگنال غیر ایستای زیر را در نظر بگیرید:



در این سیگنال ۴ مولفه ی فرکانسی در زمان های مختلف وجود دارد
بازه ی ***250ms*** اول حاوی یک سیگنال سینوسی با فرکانس ***300Hz*** بازه های ***250ms*** بعدی به ترتیب حاوی فرکانس های***200Hz,100Hz,50Hz*** می باشد این سیگنال ظاهرا یک سیگنال غیر ایستا می باشد بیائید به ***STFT*** این سیگنال توجه کنیم:



همانطور که انتظار داشتیم **STFT** این سیگنال یک نمودار ۲ بعدی می باشد(و اگر دامنه را هم در نظر بگیریم ۳ بعدی نمودار این تبدیل است)محور های ***x,y*** به ترتیب محور های زمان و فرکانس می باشند لطفا از اعدادی که در روی محور های نمودار قبل درج شده صرفنظر کنید فقط به شکل کلیِ زمان-فرکانس این توصیف توجه کنید

پیش از هر چیز توجه کنید که این نمودار نسبت به وسطِ محور فرکانس متقارن می باشد یادآوری می کنیم اگر چه در بخش های قبل دقیقا نشان ندادیم ولی اشاره کر دیم که **FT** ی یک سیگنال حقیقی همیشه متقارن است،از آنجا که **STFT** چیزی نیست جز نسخه ی **FT** ی پنجر ه شده؛بنابراین جای تعجبی نیست که **STFT** نیز در فرکانس متقارن باشد.پس نتیجتا کافی است که بدانیم **FT** و **STFT** متقارن هستند.

مطلبی که مهم است ۴ پیک در سیگنال می باشند توجه کنید که ۴ پیک معادلِ ۴ مولفه ی فرکانسی مختلف وجود دارند همچنین بر خلافِ **FT** این پیک ها در بازه های زمانی متفاوتی در طول محور زمان قرار می گیرند.و به یاد داشته باشید که سیگنال اصلی ۴ مولفه ی فرکانسی که در زمان های مختلف قرار می گیرند دارد.

اکنون ما یک توصیف صحیحی از زمان- فرکانسِ سیگنال داریم ما علاوه بر اینکه می دانیم چه مولفه های فرکانسی ای در سیگنال حاضر هستند ضمنا مکان قرار گیری آنها را در حوزه ی زمان می دانیم.

ممکن است تعجب کنید که **STFT** یک **TFR** (توصیف زمان – فرکانس صحیحی)از سیگنال ارئه می دهد پس دیگر چه احتیاجی به **WT**(تبدیل ویولت) داریم.مسائل ضمنی **STFT** در مثال بالا آشکار نیستند البته در این بخش برای اینکه مفهوم را توضیح دهیم یک مثال واضح انتخاب کردیم، که به خوبی جواب گو باشد.

مشکلاتی که در **STFT** وجود دارند ریشه ی آنها به چیزی بر می گردد که بااصل عدم قطعیت هایزنبرگ شناخته می شود .این اصل که به گشتاور و مکان حرکت ذرات اعمال می شود می تواند به اطلاعاتِ زمان – فرکانس سیگنال نیز اعمال شود. به سادگی این اصل بیان می کند که یکنفر نمی تواند توصیفِ زمان-فرکانسِ سیگنال را به طورِ دقیق، بداند برای مثال نمی داند چه مولفه های فرکانسی ای در چه لحظه های زمانی ای وجود دارند.چیزی که یک نفر می تواند بفهمد،بازه ی زمانی ای است که در آن باند فرکانسی مشخصی وجود دارد.که به این موضوع مسئله ی تفکیک پذیری می گویند.

مسئله ای که در مورد **STFT** وجود دارد انتخاب پهنای تابع پنجره است که باید انتخاب شود.اگر تابع پنجره باریک باشد این تابع با عنوان ***(Compactly Supported)*** شناخته می شود این اصطلاحی است که بعدا در دنیای ویولت زیاد به کار می رود.

یادآوری می کنیم که در ***FT*** درحوزه ی فرکانس مسئله ی تفکیک پذیریی وجود ندارد به عنوان مثال ما دقیقا می دانیم چه فرکانس هائی وجود دارندو به طور مشابه در حوزه ی زمان هم مسئله ی تفکیک پذیری وجود ندارد بخاطر اینکه در هر لحظه ی زمانی مقدار سیگنال رامی دانیم .تفکیک پذیریِ زمانی در ***FT*** و تفکیک پذیری فرکانسی در ***FT*** صفر هستند با توجه به اینکه ما اطلاعاتی در مورد آنها نداریم.

حقیقتی که باعث تفکیک پذیری فرکانسی کامل در ***FT*** می شود پنجر ه ای است که در ***FT*** استفاده می شودو اساس آن تابع $e^{j\omega t}$ است

که در تمام زمان ها از منهای بینهایت تا مثبت بینهایت ادامه دارد.در ***STFT*** پنجر ه دارای طول محدودی می باشد و فقط یک بخش از سیگنال را می پوشاند که باعث می شود تفکیک پذیری فرکانسی ضعیفتر شود و منظور این است که ما مولفه های فرکانسی دقیقی که در سیگنال وجود دارد را نمی دانیم اما ما فقط می دانیم چه محدوده ی فرکانسی ای وجود دارد.

در ***FT*** تابع اصلی به ما اجازه می دهد که تفکیک پذیری کاملی بدست آوریم به خاطر اینکه خود تابع اصلی پنجره ای با طولِ نامحدود است.در ***STFT*** پنجر ه دارای طول محدود می باشد و ما تفکیک پذیری فرکانسی کاملی بدست می آوریم.ممکن است بپرسید چرا در مانند ***FT*** طول پنجر ه را در ***STFT*** برای بدست آوردن تفکیک پذیری فرکانسی کامل نا محدود در نظر نگرفتیم؟بجز اینکه تمام اطلاعات زمانی را ازدست می دهید به جای اینکه تبدیل را با ***STFT*** انجام دهید آن را با ***FT*** به پایان میرسانید.

اگر ما پنجره هائی با طول نامحدود استفاده کنیم ***FT*** ی را بدست می آوریم که تفکیک پذیری کاملی از فرکانس می دهد اما اطلاعاتی در مورد زمان نمی دهد.بعلاوه برای بدست آوردن خاصیت ایستائی مابایـد پنجر ه ای به اندازه ی کافی کوچک داشته باشیم که در آن سیگنال ایستا باشد پس پنجر ه ی باریک تفکیک پذیری بهتر زمانی،و خاصیت ایستائی بهتری را تامین می کند اما از نظر تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف می باشد.

بطور خلاصه:با انتخاب

پنجره ی باریک:تفکیک پذیریِ زمانیِ خوب
تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف

پنجره ی پهن:تفکیک پذیری فرکانسیِ خوب
تفکیک پذیریِ زمانی ِضعیف

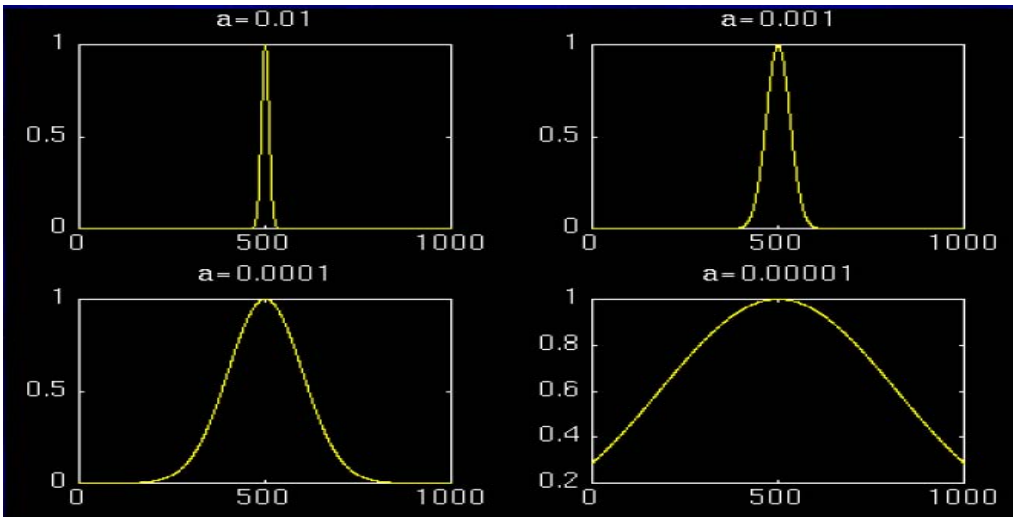
به منظور دیدن این اثرات به مثال زیر توجه کنید که در آن ۴ پنجره با طول های متفاوت داریم و با استفاده از آنها ***STFT*** را محاسبه می کنیم و بررسی می کنیم که تغییر پنجر ها چه اثری روی ***STFT*** می گذارد **:**

تابع پنجر های که ما استفاده می کنیم یک تابعِ شبه گوسینی است

$$w(t) = e^{(\frac{-at^2}{2})}$$

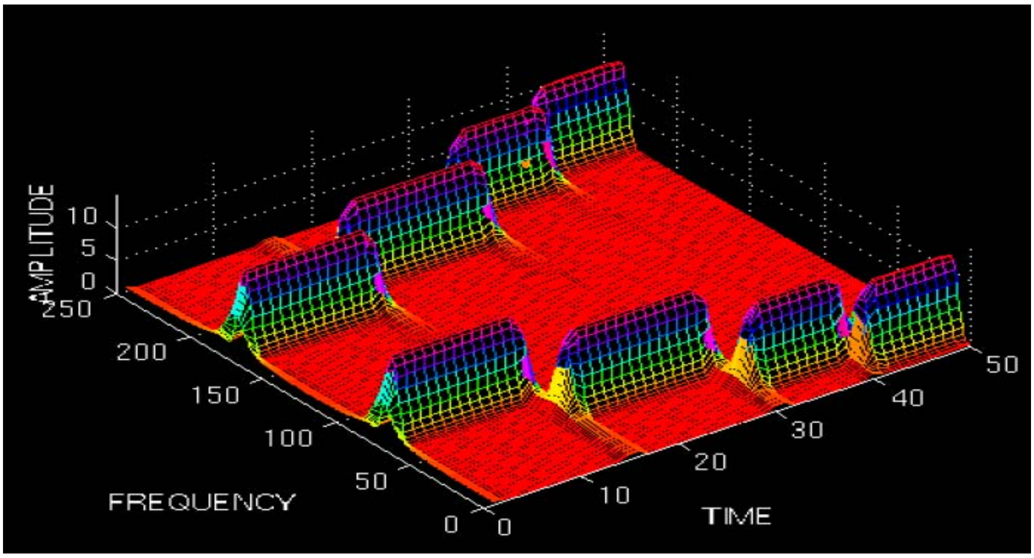
که در این رابطه ***a*** طول پنجر ه را مشخص می کند به ازای ۴ مقدار ***a*** این تابع در زیر نشان داده شده لطفا مقادیر روی نمودارا نادیده بگیرید و به کلیت شکل توجه کنید(به طول هر پنجره)

$$w(t) = e^{(\frac{-at^2}{2})}$$



مثال قبل با پنجر ه ی $a = 0.001$ محاسبه شد در اینجا ***STFT*** را با استفاده از پنجر های دیگر محاسبه می کنیم.

ابتدا به پنجر ه ی اول توجه کنید با توجه به اینکه طول پنجره باریک است انتظار داریم تفکیک پذیری زمانی در ***STFT*** به خوبی و تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف باشد

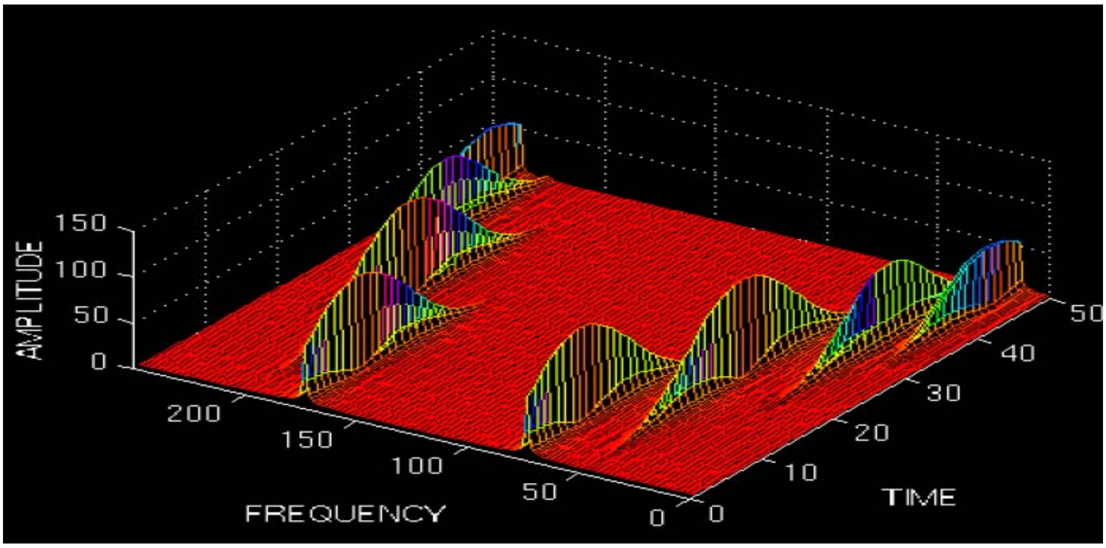


نمودار بالا ***STFT*** این سیکنال را نشان می دهد این نمودار با یک زاویه ِ خاصی،نشان داده شده که به راحتی بتوان آن را تفسیر کرد

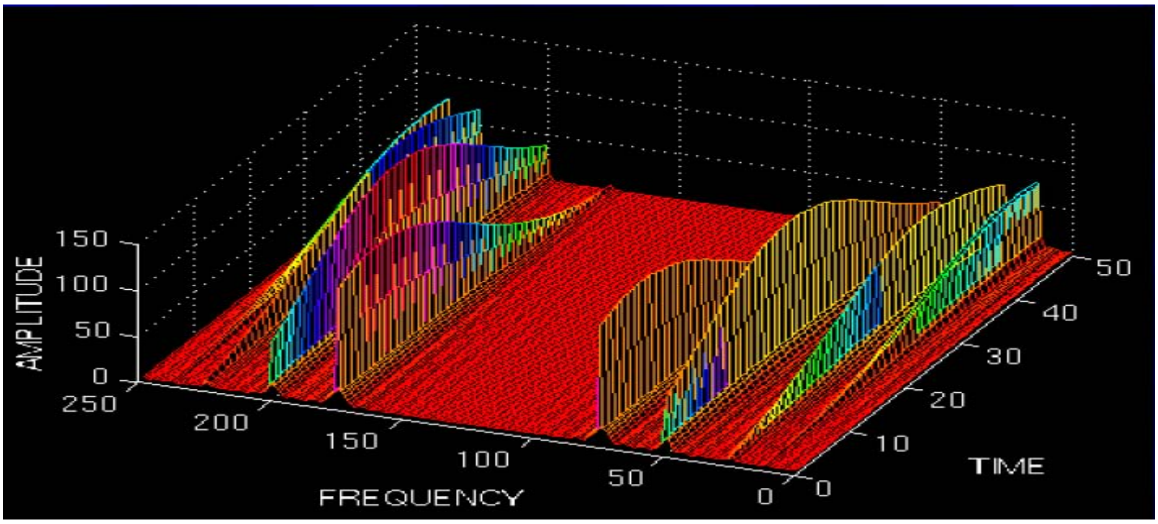
همان طور که از شکل پیدا است ۴ پیک موجود در زمان از یکدیگر به خوبی جدا شده اند همچنین توجه کنید که در حوز ه ی فرکانس هر پیکی به جای اینکه یک مقدار فرکانس ِ معین داشته باشد یک محدوده ی فرکانسی را می پوشاند(و این دقیقا به معنای این است کهتفکیک پذیری فرکانسی با این پنجره ضعیف است)

خوب اکنون از پنجر ه ی سومی؛ پنجر ه ای که کمی پهن تر می باشداستفاده می کنیم (پنجر ه ی دوم در مثال اول استفاده شد)

STFT آن به صورت زیر است:



توجه کنید که بر خلاف حالتِ قبل پیک ها در حوزه ی زمان به خوبی از یکدیگر جدا نشده اند در حالی که در حوز ه ی فرکانس به تفکیک بهتری رسیدیم اکنون عرض پنجره را زیادتر می کنیم و ببینیم چه اتفاقی می افتد



جای تعجبی برای این نتایجِ بدست آمده نیست همانطور که ما انتظار داشتیم تفکیک پذیری فرکانسی خیلی خوب شد اما در عوض تفکیک پذیری زمانی بسیار افتضاح شد

۳-۲. نتیجه ی نهائی

این مثال ها مشکلاتِ ضمنی ای که در ***STFT*** از نظر تفکیک پذیر زمانی وجود داشت را نشان دادند و هر کسی که مایل به استفاده از ***STFT*** باشد با این مسائلِ تفکیک پذیری مواجه است.
چه نوع پنجر ه ای به کار بریم؟پنجر ه ی باریک یا پهن؟در پنجر ه ی باریک تفکیک پذیری زمانی خوب ،و تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف می باشد.و بالعکس در پنجر ه ی پهن تفکیک پذیری فرکانسی خوب وتفکیک پذیری زمانی ضعیف می باشد.بعلاوه پنجر ه ی پهن ممکن است خاصیت ایستائی را نیز نقض کند.پس مسئله ای که برای ما در ***STFT*** پیش می آید ،به طور قطع نتیجه ی انتخاب نوع تابع پنجره و استفاده از آن در سراسر تجزیه ی سیگنال می باشد.اگر مولفه های فرکانسی در سیگنال اصلی به خوبی از یکدیگر جدا شده باشند ممکن است تفکیک پذیری فرکانسی را از دست بدهیم و در عوض تفکیک پذیری زمانی خوبی بدست آوریم به خاطر اینکه مولفه های طیفی قبلا به خوبی از یکدیگر جدا شده اند.

تا اینجا باید فهمیده باشیم که تیدیل ***WT*** چگونه به کار می آید،تبدیل ویولت ***WT*** وضـعیت پیچیـده ی تفکیک پذیری را تا یک اندازه ی معینی برطرف می کند که در بخش بعدی این موضوع را می بینیم

۴.بخش چهارم

۴-۱.خلاصه

تا اینجا فهمیدیم که ***FT*** برای آنالیز سیگنال های غیر ایستا کـار بـردی نـدارد و بـه جـای آن از ***STFT*** استفاده کردیم ضمنا با مـشکلی کـه ***STFT*** هـم داشـت آشـنا شـدیم (مـشکل تفکیـک پـذیریِ زمـانی وفرکانسی)

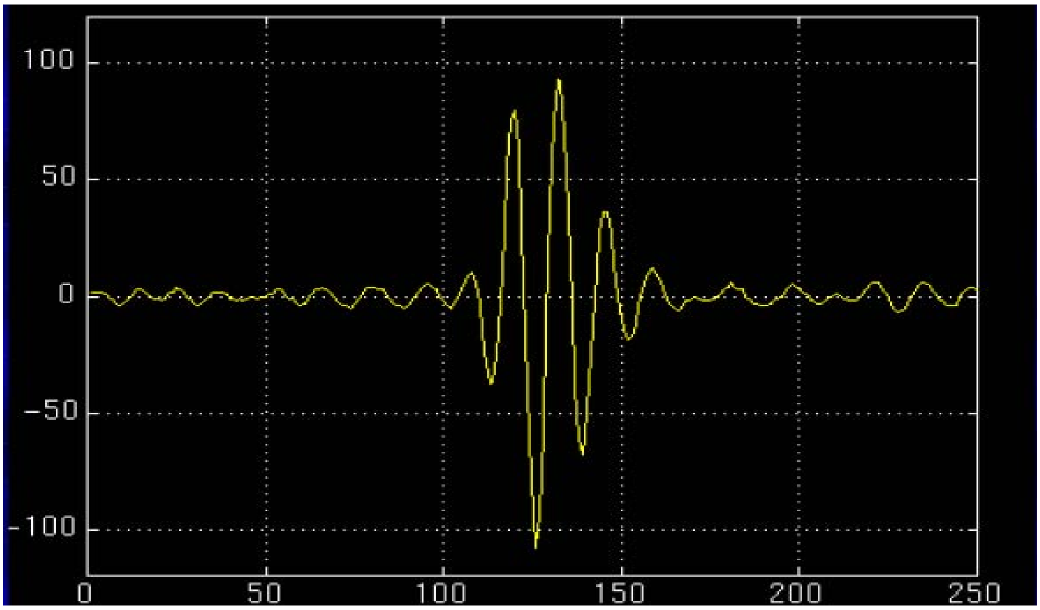
در این بخش ازابزار جدیدی به نام ***WT*** استفاده می کنیم.

۴-۲.تبدیل ویولتِ پیوسته

۴-۲-۱. آنالیز تفکیک پذیرِ چند گانه

اگر چه تفکیک پذیری زمانی و فرکانسی از نتـایج پدیـده هـای فیزیکـی هـستند (اصـل عـدم قطعیـتِ هایزنبرگ)و با وجود تبدیل استفاده شده هنوز وجود دارد این امکان وجـود دارد کـه هـر سـیگنال را بـا استفاده از نظریه ی دیگری که ***MRA*** نام دارد (***multiresolution analysis***) بتوانیم تجزیه کنیم.

MRA همانطور که از نامش پیداست سیگنال را در فر کانس های مختلف با تفکیک پذیری های متفاوت تجزیه می کند و هر مولفه ی طیفی مانند آنچه که در ***STFT*** بود تجزیه نمی شـود.***MRA*** بـرای بدسـت آوردن تفکیک پذیری زمانی خوب و تفکیک پذیری فرکانسی ضـعیف در فرکـانس هـای بـالا ؛و تفکیـک پذیری فرکانسی خوب و تفکیک پذیری زمانی ضعیف در فرکانس های پـائین طراحـی شـده اسـت.ایـن نظریه خصوصا در مواقعی که سیگنال مورد نظر مولفه های فرکانسی بالائی برای مدتِ کوتـاهی و مولفـه های فرکانسی پائینی برای زمان های طولانی ای داشته باشد مفید واقع می شود.و خوشـبختانه سـیگنال هائی که در عمل با آنها مواجه هستیم از این نوع هستند سیگنال زیر یک نمونـه از ایـن سـیگنال هـا را نشان می دهد این سیگنال یک مولفه ی فرکانسی تقریبا بالا برای یـک محـدوه ی زمـانی کوتـاه و یـک فرکانس تقریبا پائین در سرتاسر سیگنال دارا می باشد



۴-۳.تبدیل ویولت پیوسته(*CWT*)

تبدیل ویولت پیوسته بعنوان یک راه حل دیگری برای غلبه بر مشکل تفکیک پذیری در ***STFT*** ایجاد شد آنالیز ویولت به روشی مشابه آنالیز ***STFT*** عمل می کند به فرمی که سیگنال در یک تابع ضرب می شود(که این تابع،ویولت می باشد)مشابه تابع پنجره در ***STFT***، و تبدیل بطور جداگانه در بخش های مختلفِ حوزه ی زمان سیگنال محاسبه می شود. با وجود این دو تفاوت عمده بین ***CWT*** و ***STFT*** وجود دارد:

۱.تبدیل فوریه ی یک سیگنای پنجر ه ای محاسبه نمی شود و بنابراین قله های واحد در سیگنال معادل معادل سینوسی می باشند یعنی فرکانس های منفی محاسبه نمی شوند

۲.عرض پنجره هنگامیکه تبدیل برای هر مولفه ی تنهای طیفی محاسبه می شود تغییر می کند.که این خاصیت با مفهوم ترین ویژگی تیدیل ویولت ***(WT)*** می باشد.

تبدیل ***CWT*** به صورت زیر تعریف می شود:

$$CWT_x^{\psi}(\tau,s)=\Psi_x^{\psi}(\tau,s)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int x(t)\ \psi^*(\frac{t-\tau}{s})\ dt \qquad (3-1)$$

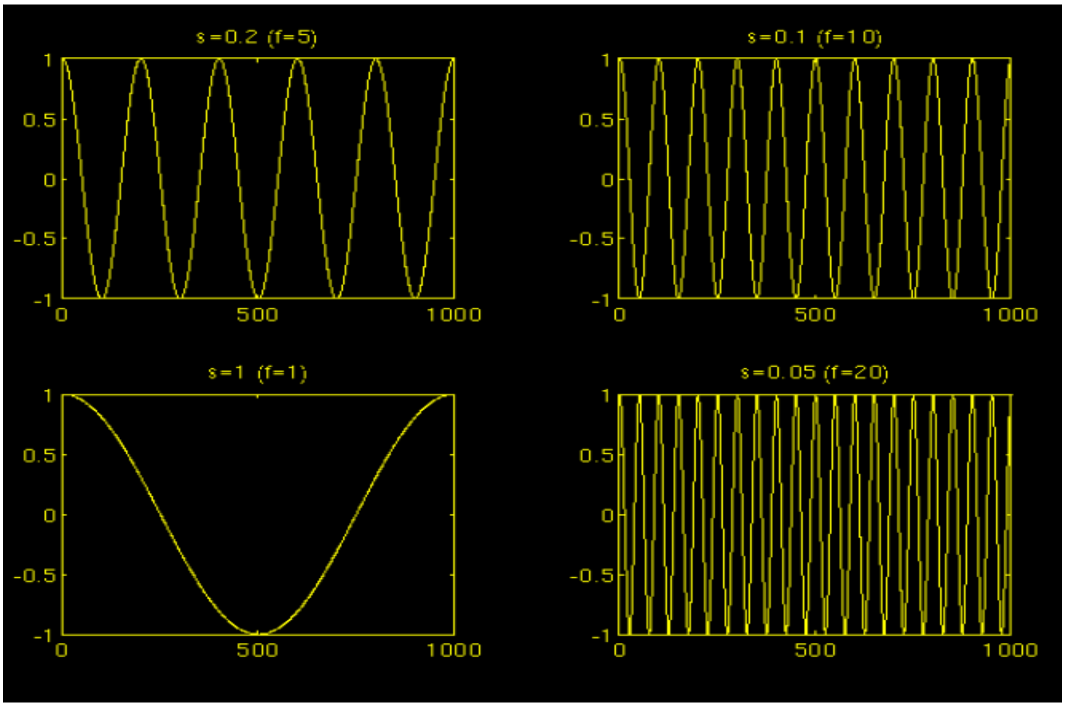
تبدیل ویولت پیوسته تابع دو متغییرِ τ,s می باشد که پارامتر های مقیاس و انتقال می باشند.تابع ***psi(t)*** تابع تبدیل می باشد و ویولتِ مادر(ویولت اصلی)نامیده می شود.عبارت ویولتِ مادر نام خود را از دو ویژگی مهم آنالیز ویولت که در زیر توضیح داده می شود می گیرد:

عبارت ویولت به معنی موج کوچک می باشد(موجک)کوچکی به شرایطی مربوط می شود که این تابع (پنجره) دارای طول محدود می باشد (***Compactly supported***)کلمه ی موج به شرایطی برمی گردد که

این این تابع نوسانی می باشد.عبارتِ مادر بیان می دارد که توابعی با نـواحی پـشتیبانی مختلـف کـه در فرآیند تبدیل به کار می روند از یک تابع اصلی اشتقاق می یابند (ویولتِ مادر)به عبارت دیگر ویولتِ مادر نمونه ی اصلی برای تولید توابع پنجرهای دیگر(ویولت ای دیگر) می باشد.عبارت انتقال مشابه چیزی کـه در ***STFT*** به کار رفت می باشد که به مکانِ پنجره ها هنگامیکه پنجره ای در طول سیگنال شیفت پیـدا می کند مرتبط می باشد .اگر چه ما در تبدیل هائی که معرفی کردیم پارامترِ فرکانس نداشتیم بجـای آن پارامتر مقیاس مطرح بود.که به صورت عکس فرکانس تعریف می شد.

۴–۴.مقیاس *(Scale)*

پارامتر مقیاس در آنالیزِ ویولت معادلِ ،مقیاس در کاربرد نقشه ها می باشدمانند حالتی کـه در نقـشه هـا داریم مقیاس بالا معادل نگاه کلی و غیر دقیق به (یک سیگنال)و مقیاس های پائین معادل معـادل نگـاه دقیق و جزئی می باشد.به طور مشابه بر حسب فرکانس ؛فرکانس های پائین (مقیـاس هـای بـالا)معـادل اطلاعات کلی از یک سیگنال که معمولا در کل سیگنال انـدازه گیـری مـی شـود مـی باشـد در حالیکـه فرکانس های بالا(مقیاس پائین)معادل اطلاعات جزئی یک الگوی مخفی شده در سیگنال مـی باشـد(کـه معمولا در یک زمان نسبتا کوتاه وجود دارند).سیگنال های کسینوسی مرتبط بـه مقیـاس هـای مختلـف بعنوان مثال در زیر مطرح می شوند:



خوشبختانه در کاربرد های عملی مقیاس های پائین(فرکانس های بالا)در تمـام سـیگنال حـضور ندارنـد برخلاف مثالی که در بالا داریم.اما این سیگنال ها در یک محدوده ی زمانی کوتاهی وجـود دارنـد ماننـد

قطار های ضربه و یا پالس های کوتاه مدت.مقیاس های بالا (فرکانس های پائین)معمولا برای تمام مدت سیگنال حضور دارند.

مقیاس دهی مانند عملگر ریاضی آن خواه به صورت بسط دادن ویا فشرده سازی سیگنال می باشد مقیاس بالا معادل بسط دادن یک سیگنال و مقیاس های پائین معادل فشرده سازی سیگنال می باشند

تمام سیکنال های بالا اشتقاق یافته ی یک سیگنال کسینوسی می باشند یعنی تمام سیگنال های بالا نمونه ی بسط داده شده یا فشرده شده ی یک سیگنال می باشند.در شکل بالا ***s=0.05*** کمترین و ***s=1*** بیشترین مقیاس می باشد.

به بیان ریاضی اگر $f(t)$ یک سیگنال مفروض باشد $f(st)$ برای $s>1$
معادل نمونه ی فشرده شده و برای $0<s<1$ معادل نمونه ی منبسط شده ی سیگنال $f(t)$ می باشند
با توجه به رابطه ی (۱-۳) و توجه به این مطلب که عبارت مقیاس در مخرجِ تعریف ***CWT*** قرار گرفته در مورد مقیاس برای آنالیز ویولت عکس مطالب فوق را نتیجه می گیریم یعنی:
مقادیر $s>1$ سیگنال را بسط می دهند در حالیکه مقادیر $0<s<1$
باعث فشرده سازی سیگنال می گردند.

۴-۵.محاسبه ی CWT

در این بخش معادله ی ***3-1*** راشرح می دهیم فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که قرار است آنالیز شود.ویولت مادر طوری انتخاب می شود که بعنوان یک نمونه برای تمام پنجره ها اعمال شود تمام پنجره هائی که استفاده ه می شوند نمونه ی نسط داده شده(فشرده شده ی)ویولت مادر می باشند.تعدادی توابع مانند ویولتِ ***Morlet*** و ویولتِ ***Mexican*** توابعی هستند که در آنالیز ویولت به کار می روند که در مثال های بخش های قبل آنها را دیدیم.

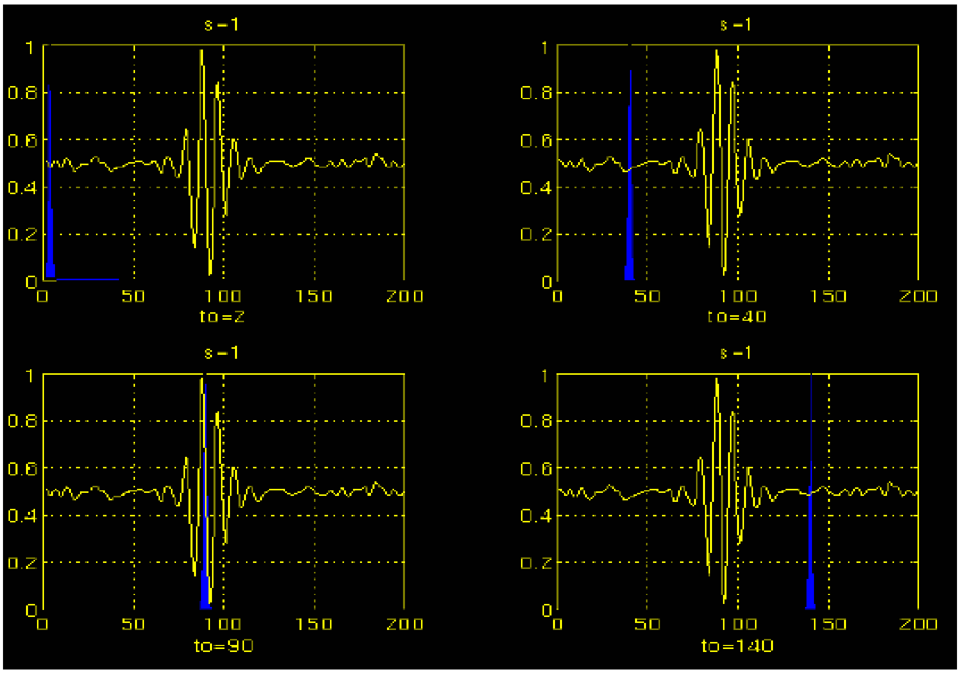
هنگامیکه ویولت مادر انتخاب شد محاسباتِ ***CWT*** با انتخاب ***s=1***
آغاز می شوند و***CWT*** برای تمام مقادیرِ ***s*** بزرگتر و کوچکتر از مقدار انتخابی محاسبه می شود.اگر چه؛ بسته به طول سیگنال،محاسباتِ تبدیل کامل همیشه مورد نیاز نیست برای اهداف عملی سیگنال ها محدود باند می باشند و بنابراین محاسبات تبدیل برای یک مقدار محدود مقیاس کافی می باشد

برای راحتی، فرآیند با ***s=1*** آغاز می شود و با افزایش ***s*** ادامه می یابد یعنی فرآیند از فرکانس های بالا آغاز می شود و به سمت فرکانس های پائین ادامه می یابد اولین مقدارِ ***s*** معادل فشرده ترین ویولت می باشد و با زیاد شدن مقدارِ ***s*** ویولت بسط داده می شود.

ویولت در نقطه ی شروع سیگنال معادل ***t=0*** قرار می گیرد تابعِ ویولت در مقیاس ***s=1*** در سیگنال اصلی ضرب می شود و در سر تاسر زمان انتگرال گرفته می شود مقدرا این انتگرال در مقدار ثابتِ $\frac{1}{\sqrt{s}}$ این عامل برای نرمال سازی انرژی می باشد تا اینکه سیگنال تبدیل در تمامی مقادیر مقیاس یکسان دارای

انرژی یکسانی باشد.نتیجه ی نهائی مقدار تبدیل می باشد یعنی مقـدار ***CWT*** در نقطـه ی ***t=0*** و مقیـاس ***s=1*** می باشد به عبارت دیگر تاین مقدار معادل نقطه ی $\tau=0,s=1$ در صفحه ی زمان-مقیاس می باشد این فرآیند ادامه می یابد تا اینکه ویولت به انتهای سیگنال برسد در این قسمت یک ردیف از نقاط صفحه ی زمان-مقیاس برای مقیاس های ***s=1*** تکمیل شد.سپس ***s*** به یک مقدار کوچکی افزایش مـی یابدتوجـه کنید که تبدیل ما ***CWT*** می باشد و هر دو مقدار s,τ باید به طور پیوسته افزایش یابند.اگر چه وقتی که این تبدیل با کامپیوتر گرفته می شود هر دوی این پارامتر ها در انداز ه های به قدر کافی کوچک افزایش می یابند که این روند معادل نمونه برداری از صفحه ی زمان-مقیاس می باشد

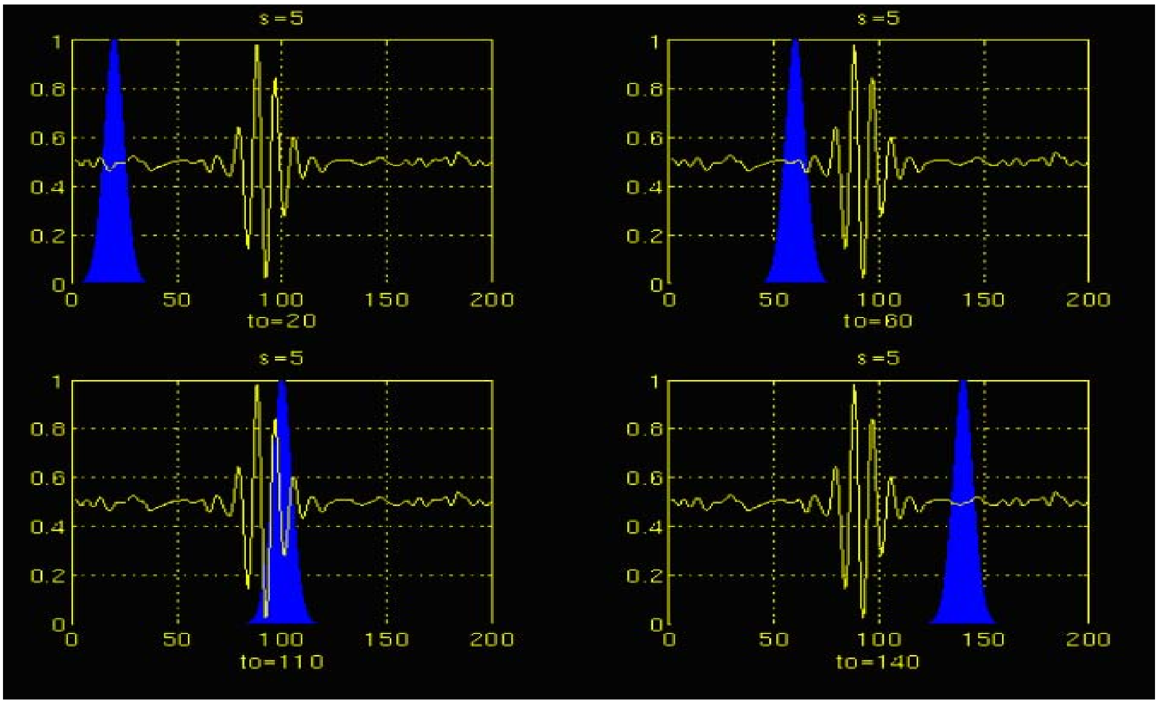
فرآیند بالا برای هر مقدار ***s*** انجام می شود و هر مقدار ***s*** داده شده یک ردیف از صفحه ی مقیاس-زمان را تکمیل می کند هنگامیکه فرآیند برای تمامی مقادیر مطلوبِ ***s*** به اتمام رسید ***CWT*** ی سیگنال محاسبه شده است.شکل زیر این مراحل را توضیح می دهد:

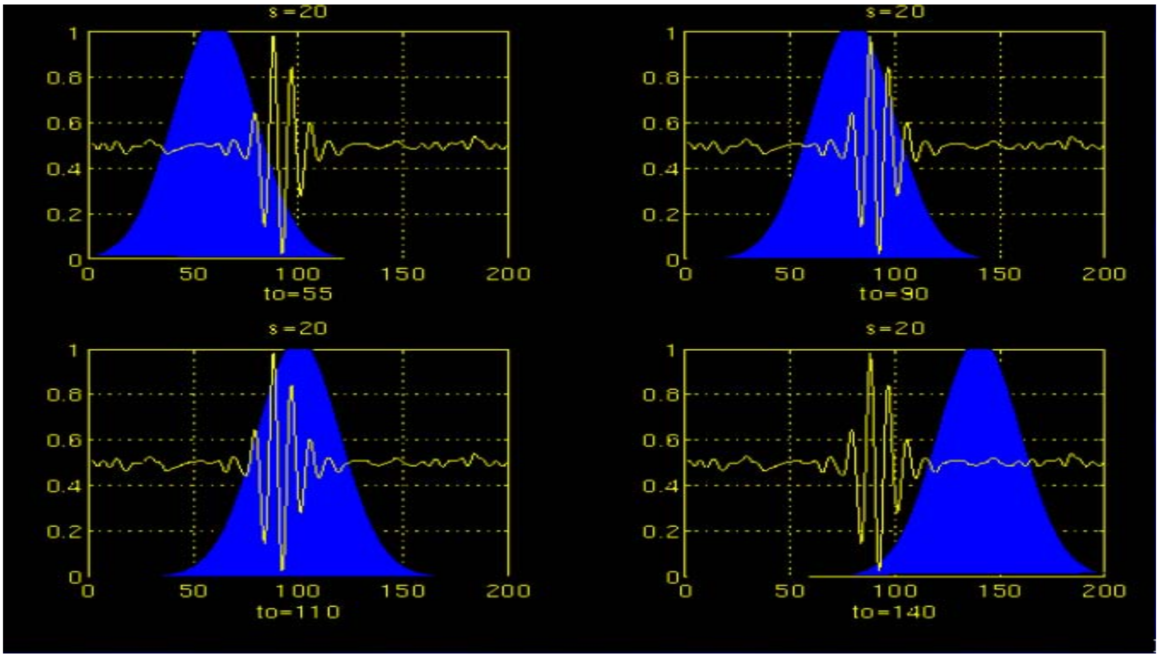


شکل بالا سیگنال و تابه ویولت را برای چهار مقدار مختلف τ نشان می دهـد ایـن سـیگنال یـک بخـش ناقصی از سیگنال ابتدای همین بخش را نشان می دهد مقدار مقیاس برابر ۱ است کـه معـادل کمتـرین مقیاس(بیشترین فرکانس) می باشد توجه کنید ویولت چگونه فشرده شده(پنجره ی آبی)است این پنجره باید به اندازه ی بالاترین مولفه ی فرکانسی که در سیگنال وجود دارد باریک باشـد.در هـر بخـش نـشان داده شده ویولت در سیگنال ضرب می شود این حاصلضرب در مکان هائی که ویولت حضور دارد مخـالف صفر و در بقیه ی مکان ها صفر میباشد با شیفت دادن ویولت در حـوزه ی زمـان سـیگنال در حـوزه ی زمان و با تغییر مقدار ***s*** سیگنال در حوزه ی مقیاس(فرکانس)متمرکز می شود.

اگـر سـیگنال مولفـه ی طیفـی ای معـادل مقـدار جـاری s داشـته باشـد(کـه در ایـن حالـت منظـور 1 است)حاصلضرب ویولت در سیگنال در مکانی که این مولفه های طیفی وجود دارند نسبتا مقـدار بزرگـی می باشداگر مولفه ی طیفی ای که معادل مقدار جاری s است در سیگنال وجود نداشته باشد مقدار ایـن حاصلضرب تقریبا کوچک یا برابر صفر می باشد

در شکل صفحه ی قبل سیگنال در حوالی $t=100ms$ در مقایسه با عرض پنجره در ***s=1*** مولفه ی طیفـی قابل ملاحظه ای می باشد بنابراین ***CWT*** ی سیگنال برای مقادیر مقیاسِ پـائین در حـوالی $t=100ms$ مقدار بزرگی دارد و در سایر مکانها کوچک است.برای مقیاس هـای بـالا بـه عبـارت دیگـر ***CWT*** مقـدار بزرگی برای تقریبا تمام طول سیگنال دارد بخاطر اینکه فرکانس پائین در تمام زمان ها وجود دارد

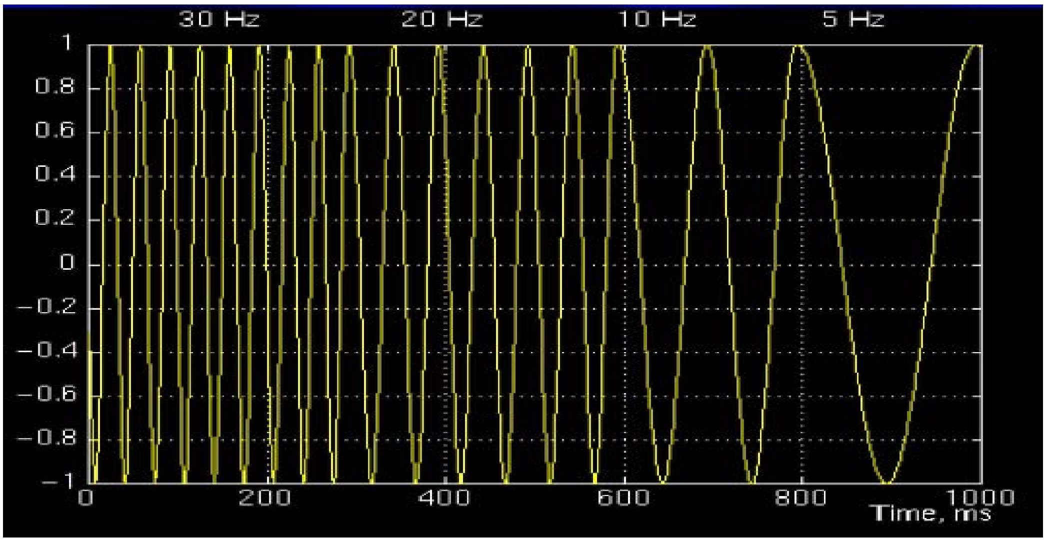




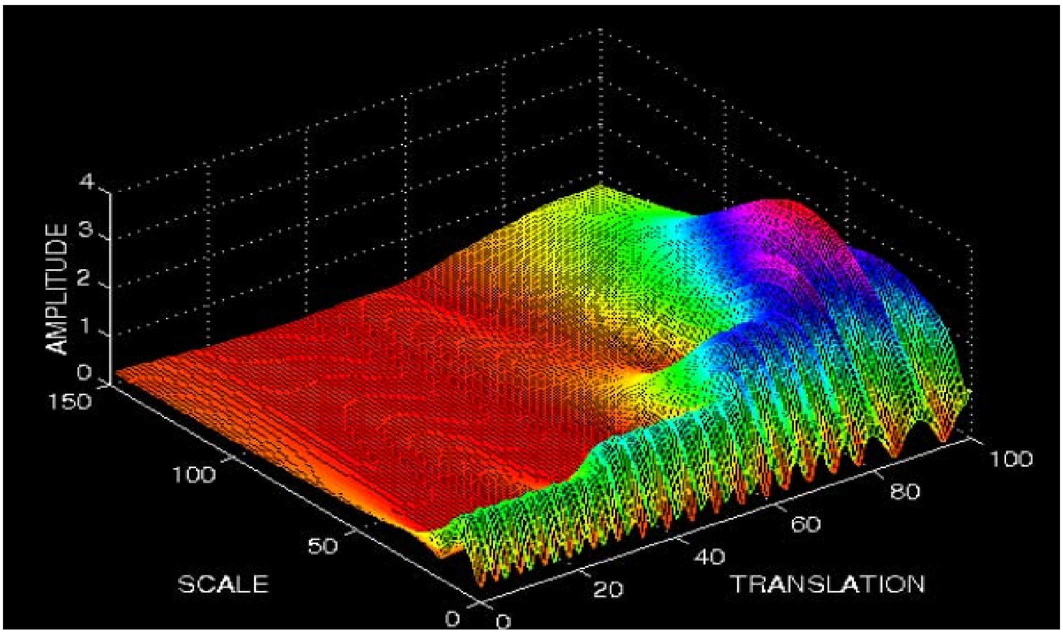
دو شکل صفحه ی قبل فرآیند یکسانی برای $s=5, s=20$ را نشان می دهند توجه کنید که عرض پنجره با افزایش مقیاس (کاهش فرکانس)تغییر می کند.با زیاد شدن عرض پنجره تبدیل شروع به بدست آوردن مولفه های فرکانس پائین می کند.

به عنوان یک نتیجه برای هر مقیاس و بازه ی زمانی یک نقطه از صفحه ی زمان-مقیاس محاسبه می شود.محاسبات برای یک مقیاس معین ،یک ردیف از صفحه ی زمان-مقیاس را تشکیل می دهد و محاسبات در مقیاس های دیگر ستونهای صفحه ی زمان-مقیاس را تشکیل می دهند.

(مثال)سیگنال زیر را در نظر بگیرید این سیگنال شامل فرکانس های ***30Hz,20Hz,10Hz,5Hz*** می باشد

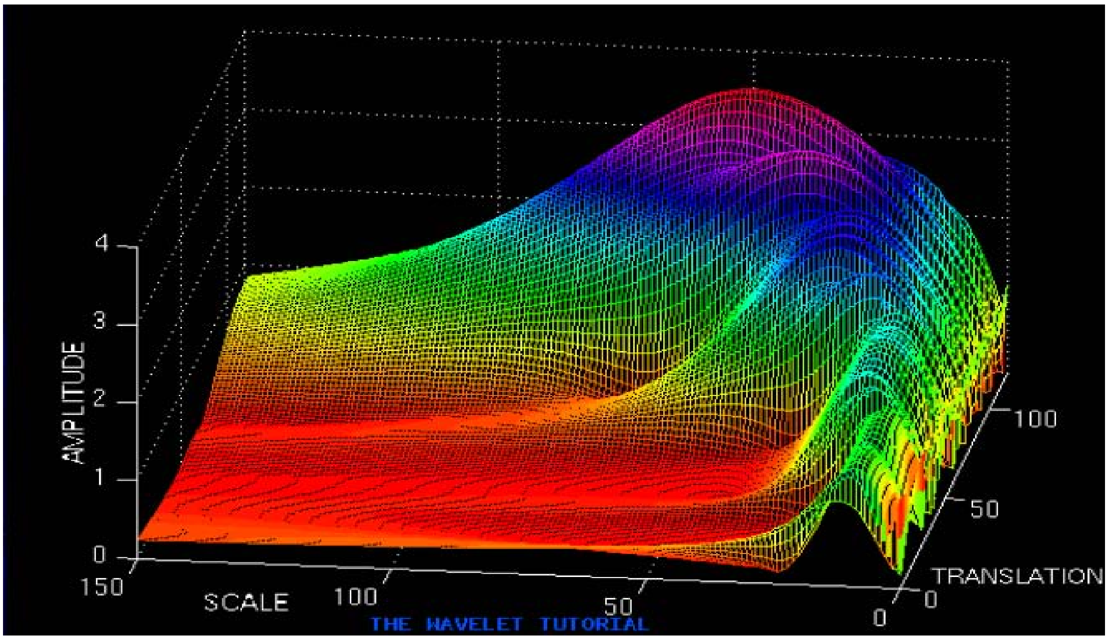


شکل زیر ***CWT*** این سیگنال را نشان می دهد:



توجه کنید که مقیاس های کوچکتر معادل فرکانس های بالاتر هستند یعنی با کاهش فرکـانس مقیـاس افزایش می یابد بنابراین آن بخش سیگنال با مقیاسِ نزدیک صفر واقعا بالاترین فرکانس و مقیاس هـای بالا معادل فرکانس پائین تر در آنالیز سیگنال می باشند توجه کنید که بیشترین مولفـه ی فرکانـسی در این سیگنال(*30Hz*)که در ابتدای سیگنال قرار دارد در بخش کمترین مقیـاس در فاصـله ی *0* تـا*30* روی محور ***Translation*** قرار دارد به مین ترتیب بخش های دیگر سیگنال هم در تبدیل مطابق شکل قرار می گیرند و مولفه ی *5Hz* در آخرین بخش در روی محور ***Translation***در مقیاس بالاتری(فرکانس پائین تر) قرار می گیرد

به یاد داشته باشید بر خلاف ***STFT*** که برای تمام زمانها و فرکانس ها تفکیک پذیری ثـابتی داشـت ***WT*** در فرکانس های بالا دارای تفکیک پذیری زمانی خوب و تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف می باشـد و در فرکانس های پائین دارای تفکیک پذیری فرکانسی خوب و تفکیک پذیری زمانی ضعیف می باشد شـکل زیر تبدیل ***WT*** مثال قبل را از یک زاویه ی دیگر نشان می دهد:

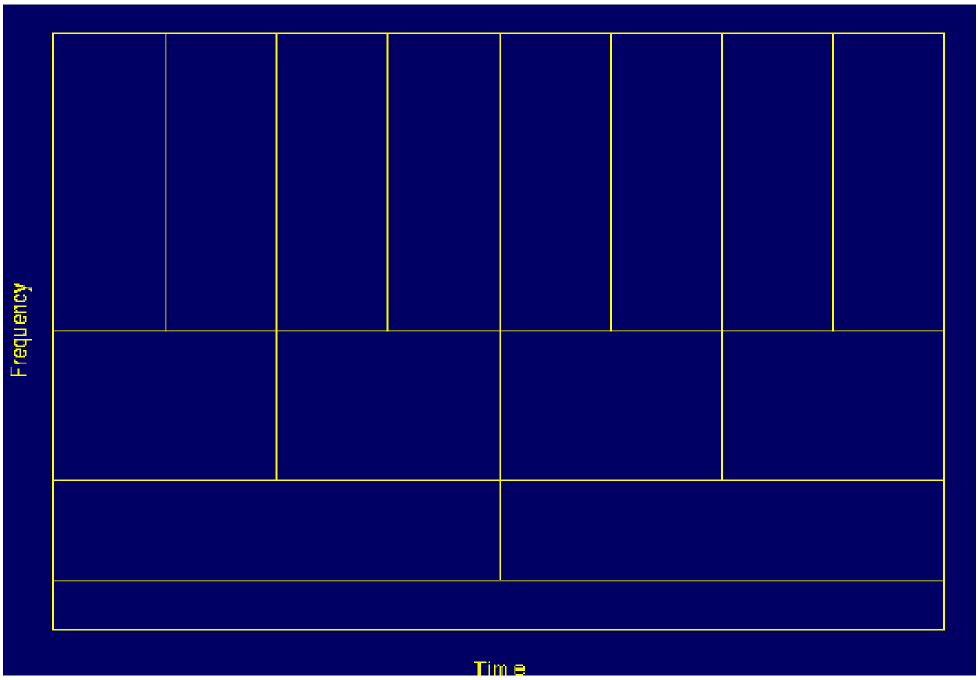


در شکل بالا مقیاس های پائین تر (فرکانس های بالاتر)تفکیک پذیری مقیاسی بهتـری دارد کـه معـادل تفکیک پذیری فرکانسی ضعیف می باشد بطور مشابه مقیاس های بالاتر که معادل فرکانس هـای پـائین می باشند دارای تفکیک پذیری فرکانسی بهتری می باشند

توجه:محور های دو شکل قبل به نحوی نرمالیزه شده اند تقریبا مـی تـوان گفـت ۱۰۰ نقطـه در محـور ***Translation*** معادل ***1000ms*** و ***150*** نقطه در روی محور ***Scale*** معادل یک باند فرکانسی ***40Hz*** می باشد (اعداد روی محور ***Translatiol***, ***Scale***معادل ثانیه و هرتز نمی باشنداین اعداد فقط تعدادنمونه های یـک محاسبه می باشند)

۴-۶.تفکیک پذیری زمان و فرکانس

به یاد داشته باشید که مشکلاتی که در تفکیک پذیری داشتیم مهمترین دلیل برای استفاده از ***WT*** بجای ***STFT*** بود.به شکل زیر توجه کنید:



هر خانه در شکل بالا معادل یک مقدار تبدیل ویولت در صفحه ی زمان- فرکانس می باشد توجه کنید که هر خانه یک مساحت غیر صفر معین دارد که به مفهوم این است که مقدار یک نقطه ی معین در صفحه ی زمان- فرکانس مشخص نیست تمام نقاطی که در صفحه ی زمان –فرکانس در این خانه ها قرار می گیرد با یک مقدار ***WT*** نشان داده می شود.در شکل بالا با توجه به اینکه عرض و ارتفاع خانه ها تغییر می کند اما مساحت ثابت است بخاطر اینکه هر خانه یک سهم مساوی از صفحه ی زمان – فرکانس را با خصوصیات متنوعی از زمان و فرکانس ارائه می کند.در فرکانس های پائین ارتفاع خانه ها کوتاهتر است(که به معنای تفکیک پذیری فرکانسی بهتر است)اما عرض خانه ها بزرگتر می باشد(که به معنای تفکیک پذیری زمانی ضعیف تر می باشد)در فرکانس های بالا عرض پنجر ها کاهش می یابد ،یعنی تفکیک پذیری زمانی بهتر و ارتفاع خانه ها افزایش می یابد،یعنی تفکیک پذیری زمانی ضعیف تر می شود.

در***STFT***تفکیک پذیری فرکانسی را عرض پنجر ه ای تعیین می کند که در سر تاسر پردازش سیگنال به کار می رود و این پنجر ه یک بار برای کل سیگنال انتخاب می شودیعنی تفکیک پذیری فرکانسی و زمانی ثابت هستند بنابر این صفحاتِ زمان-فرکانس شاملِ مر بعاتی در حالت ***STFT*** می باشند

۴-۷.تئوری ویولت – نظریه ی ریاضی

هر برداری در فضای برداری می توئاند بر حسب ترکیبی ار بردار های پایه در آن فضای برداری نوشته شود.یعنی با ضرب بردار ها در بعضی اعداد ثابت و سپس با جمع این حاصلضرب آ«الیز سیگنال شامل تخمین این ضرائب (ضرائب تبدیل،ضرائب فوریه،ضرائب ویولت)می باشد.

۴-۷-۱.بردار های پایه

یک پایه برای فضای برداری V مجموعه ای از بردار های خطی غیر وابسته می باشد مثلا هر بردار v در فضای V می تواند بر حسب ترکیب خطی برار های پایه نوشته شود.

$$v = \sum_k \upsilon^k b_k$$

بردار v می تواند بر حسب ترکیب خطی بردار های پایه ی b_k نوشته شود.این مفهوم برداری می توان برای توابع نیز تعمیم یابد

$$f(t) = \sum_k \mu_k \phi_k(t)$$

در این رابطه $\phi_k(t)$ بجای b_k و تابع $f(t)$ بجای بردار v قرار گر فته است.توابع مختلط نمائی (سینوس،کسینوس)پایه های ***FT*** هستند این پایه ها توابع متعامد می باشند که برای بازسازی تابع دارای برخی مطلوب می باشند.

۴-۷-۲.ضرب داخلی دو تابع

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)\ g^*(t)\ dt$$

با توجه به تعریف بالا ***CWT*** نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$CWT_x^{\psi}(\tau, s) = \Psi_x^{\psi}(\tau, s) = \int x(t).\psi_{\tau,s}^*(t)\ dt$$

که در آن:

$$\psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

این تعریف ***CWT*** نشان می دهد که آنالیز ویولت در واقع تعیین همسانی بین توابع پایه(ویولت)و خود سیگنال می باشد که در اینجا همسانی در یکسان بودن محتوی فرکانسی می باشد.و ضرائب ویولتِ محاسبه شده(***CWT***) نزدیکی سیگنال را به موج ویولت در یک مقیاسِ خاص نشان می دهند یعنی اگر سیگنال محتوی فرکانسی بزرگی مرتبط با یک مقیاسِ خاص داشته باشد، ویولت(توابع پایه)در یک مقیاس خاص به خود سیگنال در محل ویژه ای که محتوی فرکانسی را دارا می باشد نزدیک (شبیه)است.

۴-۷-۳.تعامد

دو بردار v,w متعامد هستند اگر ضر ب داخلی آنها صفر باشد:

$$\langle v,w\rangle = \sum \upsilon_n \omega_n^* = 0$$

بطور مشابه برای دو تابع متناوب داریم:

$$\langle f(t),g(t)\rangle = \int_a^b f(t)\,.g^*(t)\,dt\ = 0$$

یک مجموعه از بردار ها $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$متعامد نامیده می شوند اگر دو بدوی آنها متعامد باشند و تمام آنها دارای طول ۱ باشند:

$$\langle v_m,v_n\rangle = \delta_{mn}$$

به طور مشابه یک مجموعا از توابع $\{\psi_k(t)\},k=1,2,\dots$،متعامد هستند اگر:

$$\int_a^b \phi_k(t)\ \ \phi_l^*(t)\,dt = 0\ \ ,k \ne l$$

و

$$\int_a^b \left\{ |\phi_k(t)|\ \ \right\}^2 dt = 1$$

یا به طور معادل :

$$\int_a^b \phi_k(t)\phi_l^*(t)\,dt = \delta_{kl}$$

که داریم:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & if\ \ k = l \\ 0 & if\ \ k \ne l \end{cases}$$

احسان میرحیمی
www.ECA.ir

همانطور که در بالا اشاره شد امکان دارد بیش از یک مجموعه توابع متعامد وجود داشته باشد اما از میان آنها توابع پایه ی متعامد بخاطر خواص ویژه ای که دارند بریا یافتن ضرائب نجزیه مناسب می باشند.پایه های متعامد باعث می شوند که محاسبات ضرائب به خاطر خواص تعامد، بسیار ساده و آسان باشند.

برای پایه های متعامد ضرائب μ_k به صوری زیر محاسبه میشود:

$$\mu_k = \langle f, \phi_k \rangle = \int f(t).\phi_k^*(t)\, dt$$

و تابع $f(t)$ به صورت زیر باز سازی می شود:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \mu_k\, \phi_k(t) \\ &= \sum_k \langle f, \phi_k \rangle\, \phi_k(t) \end{aligned}$$

پایه های متعامد امکان دارد برای هر کاربردی وجود نداشته باشند در حالیکه یک نمونه ی تعمیم یافته ی پایه ی دو تعامدی در این حالت می تواند استفاده شود.عبارت "دو تعامدی" به پایه های متعامدی برمی گردد که نسبت به یگدیگر متعامد باشند اما هیچ کدام از آنها به تنهائی تشکیل یک پایه ی متعامد نمی دهند

۴-۸.معرفی دو ویولت مادر در آنالیز ویولت

Mexican Hat:

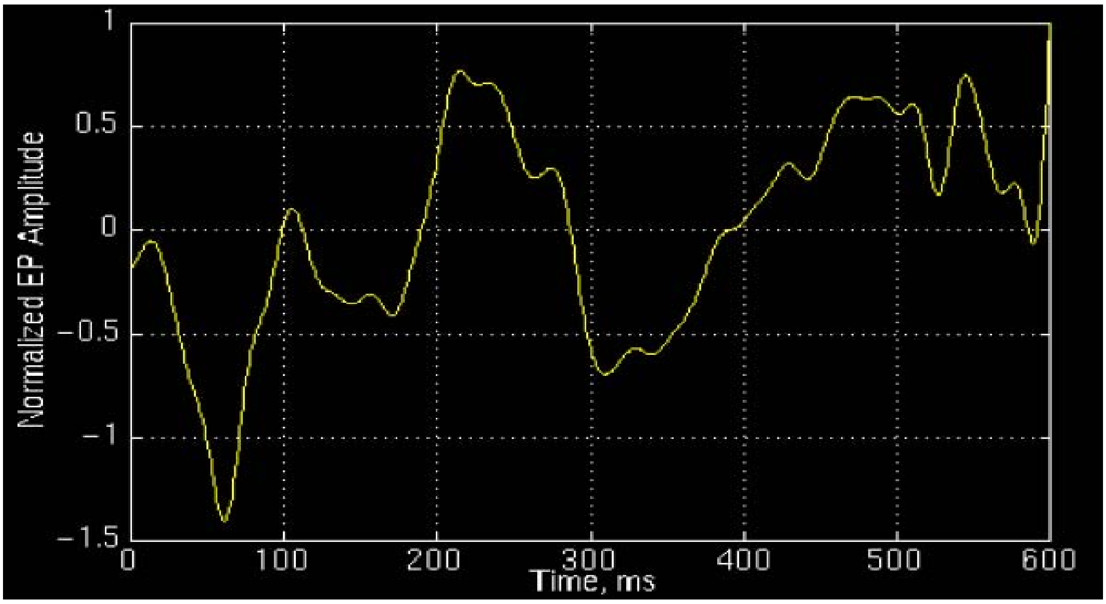
$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Morlet Wavelet:

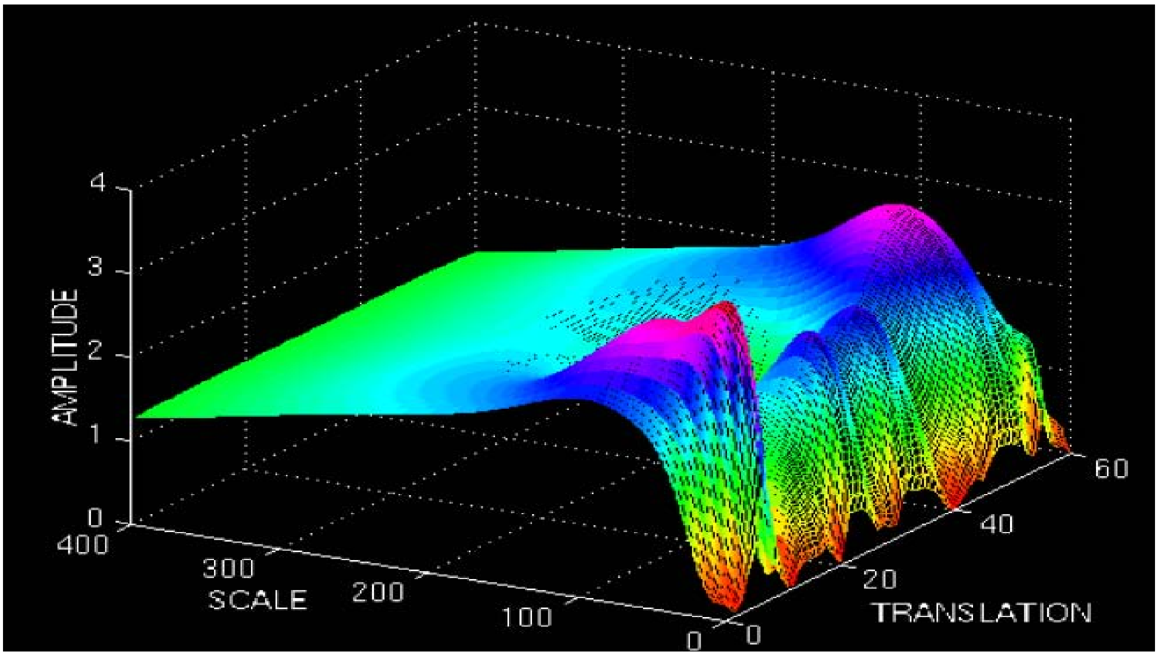
$$\omega(t) = e^{iat}.e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}$$

که در این رابطه a پارامتر مدولاسیون و σ پارامتر مقیاس دهی می باشد که عرض پنجره را تحت تاثیر قرار می دهد.

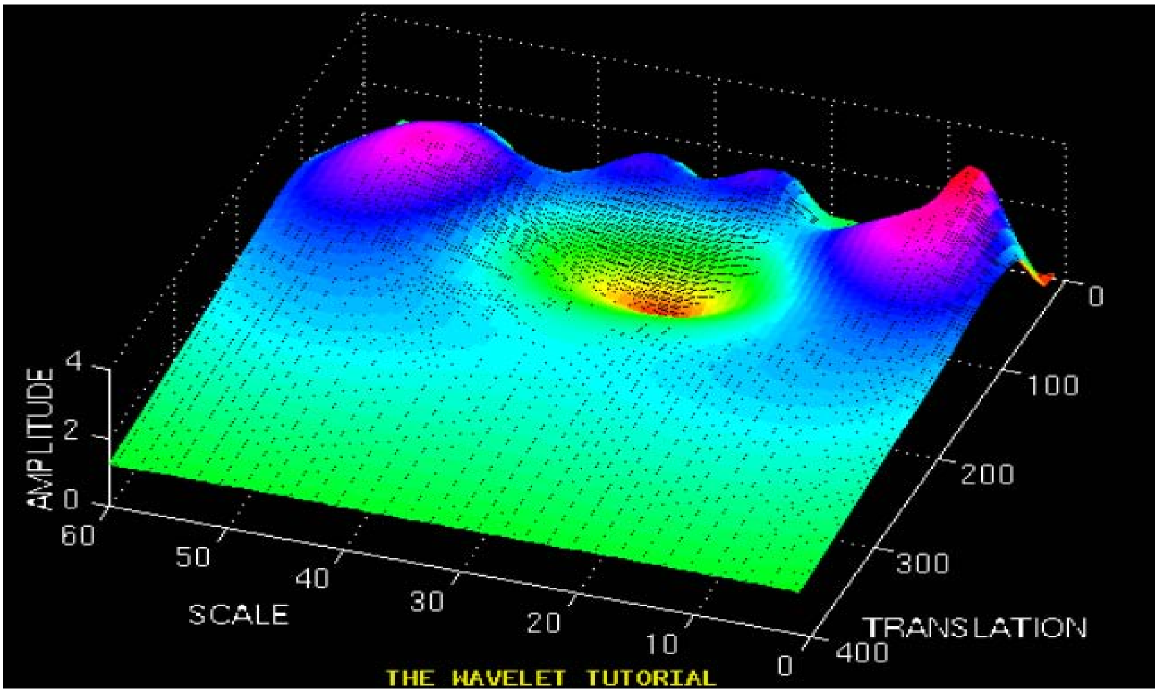
مثال)سیگنال زیر نمونه یک سیگنال واقعی و نتیجه ی آزمایش بیماری آلزایمر برای یک شخص سالم می باشد و برخلاف سیگنال های سینوسی تفسیر این سیگنال دشوار است



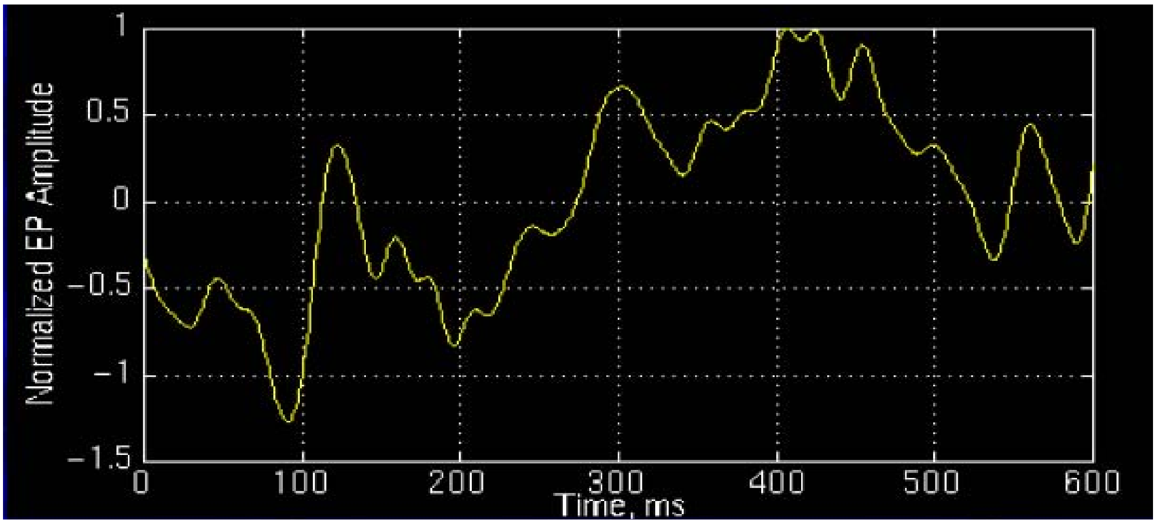
CWT این سیگنال در زیر نشان داده شده است البته اعدادی که در روی محور های ***CWT*** نوشته شده چندان مهم نیست نکته قابل توجه این است که محاسبات در اصل یک ***CWT*** ی واقعی نیستند همانطور که از محاسبات مشخص است این محاسبات در یک مکان محدودی انجام شده است این نوع تبدیل در اصل نمونه ی گسسته شده ی ***CWT*** می باشد که در بخش های بعدی توضیح داده می شود.



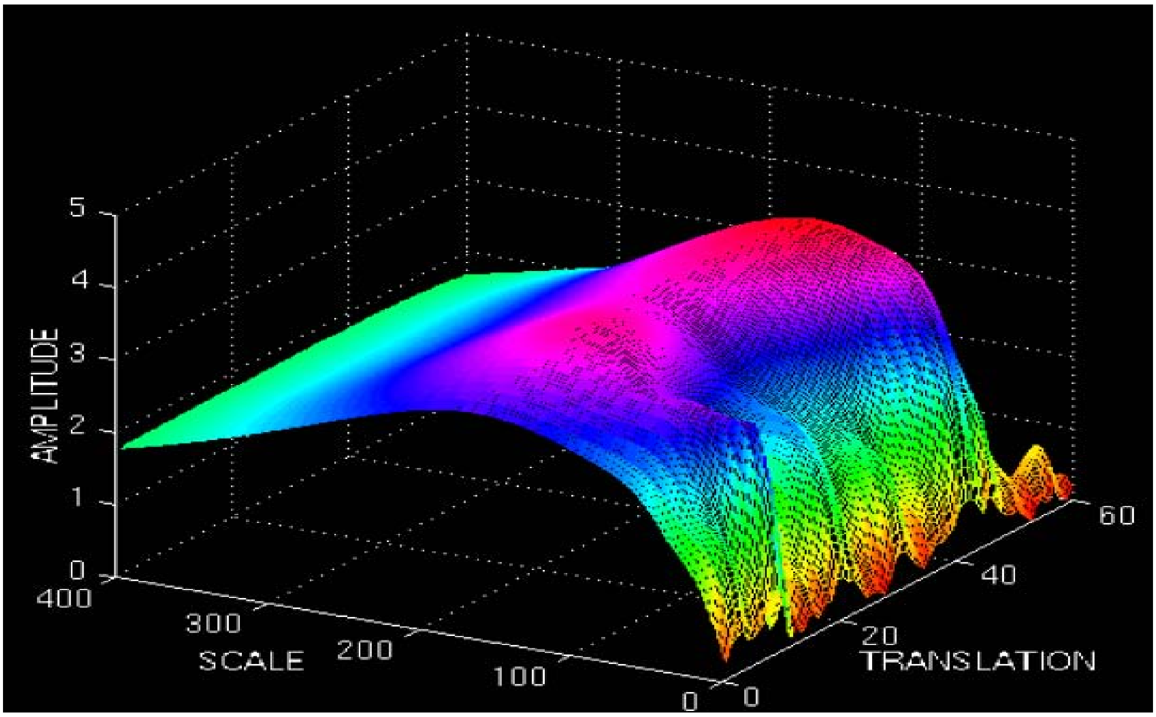
در شکل زیرهمان تبدیل از زاویه ای دیگر نشان داده شده:



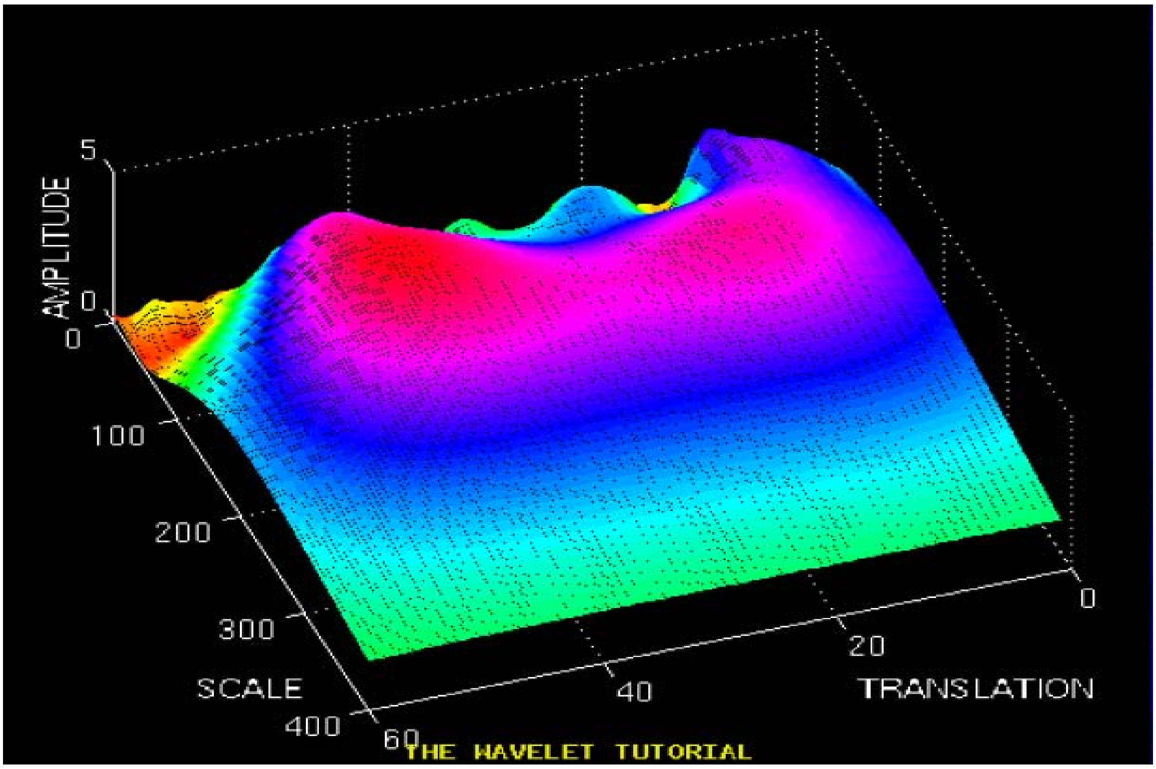
سیگنال زیر نمونه ی آزمایش یک فرد بیماراست که دارای آلزایمر می باشد:



و ***CWT*** این سیگنال به صورت زیر است:



همین سیگنال از نمائی دیگر:



۴-۹.ترکیب ویولت

تبدیل ویولت یک تبدیل برگشت پذیر می باشد اگر شرایط زیر بر قرار باشد:

$$C_{\psi} = \left\{ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\zeta)\right|^{2}}{|\zeta|} d\zeta \right\}^{1/2} \langle \infty$$

و بازسازی سیگنال با استفاده از معادله ی زیر امکان پذیر است:

$$x(t) = \frac{1}{C_{\psi}^{2}} \int_{s}\int_{\tau} \Psi_{x}^{\psi}(\tau,s)\, \frac{1}{s^{2}}\, \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau\, ds$$

در رابطه ی بالا C_{ψ} یک ثابت است که به ویولتی که استفاده می کنیم بستگی داردر رابطه ی اول $\hat{\psi}(t)$ تبدیل ***FT*** ی $\psi(t)$ می باشد.

معادله ی C_{ψ} بیان می دارد که $\hat{\psi}(0) = 0$.

$$\int \psi(t)\, dt = 0$$

برای اینکه این رابطه برآورده شود باید ویولت نوسانی باشد.

۴–۱۰.سری ویولت (گسسته سازی *CWT*)

در عمل هیچکدام از روابط ***FT,STFT,CWT*** را نمی توان با معادلات تحلیلی یا انتگرال محاسبه نمود.شهودی ترین راه گسسته سازی یک سیگنال نمونه برداری از آن در صفحه ی زمان - فرکانس می باشد

در مقیاس های بالا (فرکانس پائین)مطابق رابطه ی نایکوئست نسبت نمونه برداری می تواند کاهش یابد به عبارت دیگر اگر صفحه ی زمان- مقیاس نیاز داشته باشد با نسبت نمونه برداری N_1 در مقیاس s_1 نمونه برداری شود صفحه ای مشابه می تواند با آهنگ N_2 در مقیاس s_2 نمونه برداری شود که:

$$\begin{cases} s_1 \langle s_2 \\ , \\ N_2 \langle N_1 \end{cases}$$

رابطه ی واقعی بین N_1, N_2 به صوت زیر می باشد:

$$N_2 = \frac{s_1}{s_2} N_1$$

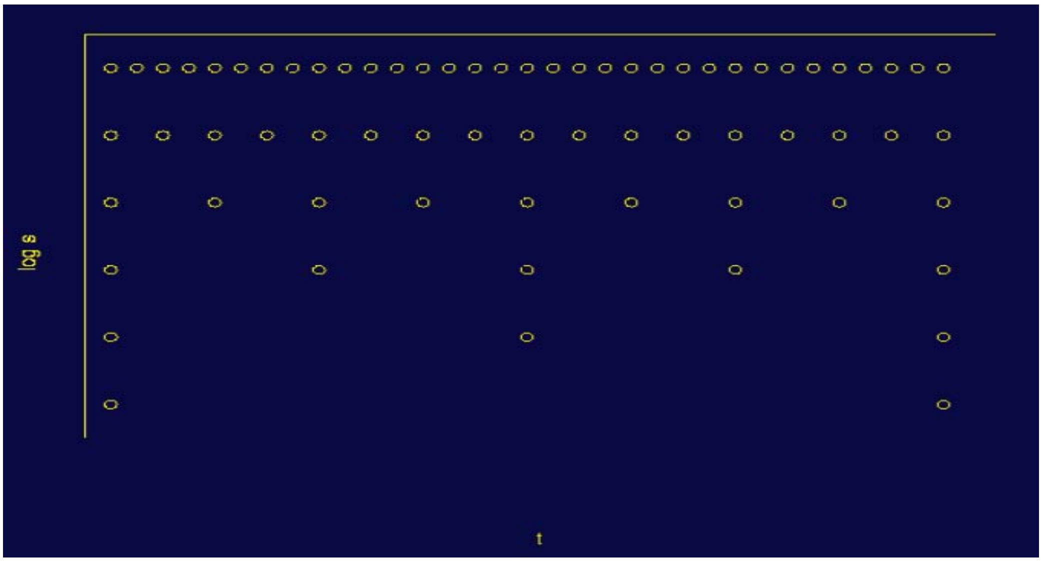
یــا

$$N_2 = \frac{f_2}{f_1} N_1$$

به عبارت دیگر در فرکانس های پائین تر آهنگ نمونه برداری میتواند کاهش یابد که این کـاهش آهنـگ نمونه برداری باعث صرفه جوئی قابل ملاحظه ای در محاسبه می شود.

تا اینجا باید مشخص شده باشد که گسسته سازی می تواند به هر روشی بـدون هـیچ محـدودیتی انجـام شود تاجائیکه به آنالیز سیگنال ارتباط داشته باشد.محدودیت های گسسته سازی سـیگنال آ]نـگ نمونـه برداری مهم هستند اگر وتنها اگر بازسازی سیگنال درست باشد.آهنگ نمونه برداری نایکوئست کمتـرین آهنگ نمونه برداری است که امکان بازسازی پیوسته-زمانِ سیگنال را از روی نمونه های گسسته فـراهم می کند.

سوالی که در اینجا مطرح میشود این است که آیا هنوز می توانیم سیگنال را با وجود اینکه پـارامتر هـای زمان و مقیاس را گسته کر ده ایم باز سازی کنیم؟
بله تحت شرایط معینی می توان این کار را کرد.پـارامتر مقیـاس ***(s)*** ابتـدا در یـک مختـصات لگـاریتمی گسسته سازی می شود پارامتر زمان هم نسبت به پارامتر مقیاس گسسته مـی شـود یعنـی یـک آهنـگ نمونه برداری متفاوت برای هر مقیاس به کار می رود.به عبـارت دیگـر نمونـه بـرداری در نمونـه بـرداری دوتائی مانند شکل زیر انجام می شود:



CWT مقادیر چی در چی ای به نقاط صفحه ی زمان-مقیاس نسبت می دهد بنابر این ضرائب نامحدودی **CWT** وجود دارد ابتدا گسسته سازی محور مقیاس را در نظر بگیرید.از میان تعـداد نامحـدودی نقـاط بـا استفاده از رابطه ی لگاریتمی فقط یک دسته نقاط محدود انتخاب می شود.مبنای لگاریتم بسته به کـاربر دارد ولی رایج ترین مقدار انتخابی ۲ می باشـد.اگـر ۲ بعنـوان مبنـا انتخـاب شـود فقـط مقیـاس هـای ۲و۴و۸و۱۶و۳۲و۶۴و...محاسبه می شوند با انتخاب مبنای ۳ مقیاس هـای ۳و۹و۲۷و۸۱و۲۴۳و...محاسـبه خواهند شد.نهایتا محور زمان مطابق گسسته سازی محور مقیاس گسسته مـی شـود.بـا توجـه بـه اینکـه مقیاس گسسته با ضریب ۲ تغییر می کند آهنگ نمونه برداری برای محور زمان بـا ضـریب ۲ بـرای هـر مقیاس تغییر می کند.

بیان فرآیند گسسته سازی به بیان ریاضی به صورت زیر می باشد:

با فرض اینکه مقیاس گسسته سازی s_0^j و انتقال گسسته سازی $\tau = k.s_0^j.\tau_0$

باشد.توجه کنید که انتقال گسسته سازی چگونه به مقیاس گسسته سازی وابسته است.

مشابه رابطه ای که بین تبدیل فوریه ی پیوسته و سری فوریه و تبدیل فوریه ی گسسته وجود داشت در حوزه ی ویولت نیز تبدیل ویولت پیوسته و تبدیل ویولت نیمه گسسته(سـری ویولـت)و تبـدیل ویولـت گسسته مطرح می شوند

برای **CWT** داریم:

$$\psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-\tau}{s})$$

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2}\,\psi(s_0^{-j}t - k\tau_0)$$

اگر $\psi_{j,k}$ تشکیل پایه های متعامد دهد تبدیل سری ویولت به صورت زیر در می آید:

$$\Psi_x^{\psi_{j,k}} = \int x(t)\psi^*_{j,k}(t)\,dt$$

یا

$$x(t) = C_\psi \sum_j \sum_k \Psi_x^{\psi_{j,k}}\, \psi_{j,k}(t)$$

یک سری ویولت نیاز دارد که $\psi_{j,k}$ هم متعامد و دو تعامدی باشد اگر $\psi_{j,k}$ متعامد نباشد داریم:

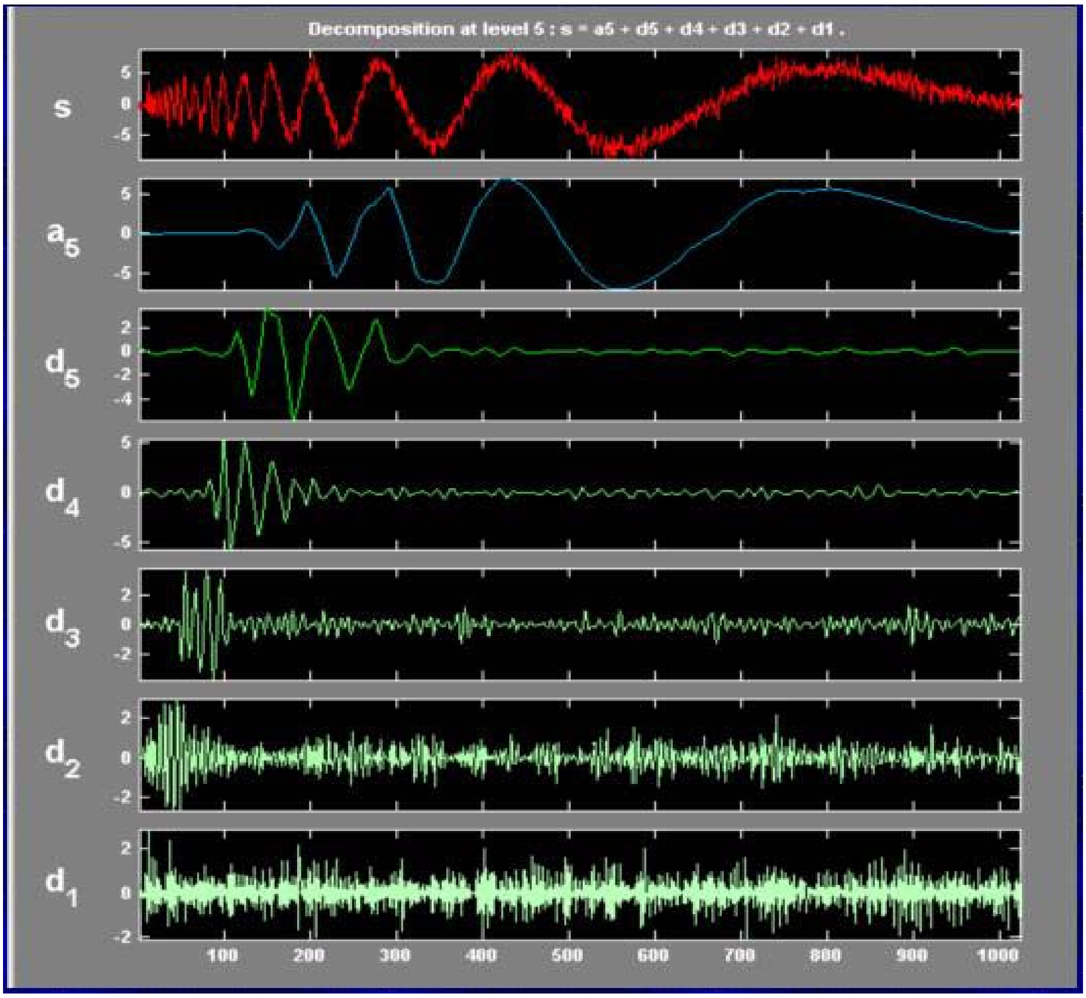
$$\Psi_x^{\psi_{j,k}} = \int x(t)\hat{\psi}^*_{j,k}(t)\,dt$$

اگر $\psi_{j,k}$ متعامد و یا دو تعامدی باشد محاسبات تبدیل اضافی نمی باشد و اگر در جائی تشکیل قالب ***(Frame)*** دهد تبدیل اضای خواهد بودبه عبارت دیگر پیدا کردن قالب(***Frame***)برای ویولت ساده تر از پیدا کردن توابع متعامد و دو تعامدی خواهد بود.مثال زیر برای روشن شدن این مبحث کمک می کند.کل فرآیند را به صورت نگاه کردن به یک شیء خاصی در نظر بگیرید چشم انسان ابتداً یک نگاه کلی از شیء تعیین می کند که بستگی به فاصله ی چشم تا آن جسم دارد

که این فرآیند معادل تنظیم پارامتر مقیاس s_0^{-j} است .هنگامیکه چشم از یک فاصله ی خیلی نزدیک به جسمی با جزئیات زیاد نگاه می کند ***j*** مقداری منفی و بزرگ دارد.حرکت دادن سر(یا چشم)به آهستگی و به اندازه ی کوچک معادل مقادیر کوچک $\tau = k.s_0^j.\tau_0$ می باشد.توجه کنید وقتی که ***j*** منفی و بزرگ باشد این حالت معادل تغیرات کوچک در زمان و τوتغییرات بزرگ در s_0^{-j} است.

۵.بخش پنجم

DWT.۱-۵



گسسته سازی یک سیگنال پیوسته ،محاسبه ی تبدیل آن را با کامپیوتر امکان پذیر می کند البته این یک تبدیل گسسته نمی باشد

در اصل سری ویولت حالت نمونه برداری شده ی ***CWT*** می باشد و اطلاعاتی که فراهم می کند بمقدار زیادی زائد می باشند تا جائیکه بازسازی سیگنال را در بر می گیرند این محاسبات اضافی زمان زیادی برای تلف می کنند.تبدیل گسسته ی ویولت اطلاعاتی در مورد تجزیه و ترکیب سیگنال (در هر دو مورد) ارائه می کند و نسبت به ***CWT*** برای پیاده سازی ساده تر می باشد.

اساس تبدیل گسسته ی ویولت ***(DWT)*** به سال ۱۹۷۶ بر می گردد هنگامیکه ***Croise,Esteban,Galand*** یک روشی برای تجزیه ی سیگنال های گسسته ارائه

احسان میرحیمی
www.ECA.ir

کردند.***Crochiere,Weber,Flanagan*** نیز کار مشابهی در مورد کد گذاری بر روی سیگنال های صوتی انجام می دادند آنها روش کار خودرا ***Subband coding*** نامیدند.در سال ۱۹۸۳ ***Burt*** یک روشی مشابه روش ***Subband coding*** ارائه کرد و آن را ***Pyramidal coding*** نامید که هم اکنون با نام ***Multioresolution analysis*** شناخته می شود.در سال ۱۹۸۹ ***Vetterli*** و***Le Gall*** در برنامه ی ***Subband coding*** پیشرفت هائی ایجاد کردند و و بعضی از اضافات ***Pyramidal coding*** را حذف کردند.

۵-۲.Subband coding و Multiresolution analysis

ایده ی اصلی مشابه ***CWT*** است یک بیان زمان- فرکانس از یک سیگنال دیجیتال با ایتفاده از روش های فیلتر کردن بدست می آید.یادآوری می کنیم که ***CWT*** همبستگی ای بین یک ویولت در مقیاسهای مختلف و سیگنالی با مقیاسی یکسان می باشد.در ***CWT*** با تغییر مقیاس پنجره و جابجائی آن در حوزه ی زمان و ضرب کردن آن در سیگنال و نهایتا انتگرال گیری در سرتاسر زمان ***CWT*** را بدست می آوردیم.اما در ***DWT*** فیلتر هائی با فرکانس قطع مختلف برای تجزیه ی سیگنال در مقیاس های مختلف به کار می روند.سیگنال در ***DWT*** از یک فیلتر بالاگذر برای تجزیه ی فرکانس بالا و یک فیلتر پائین گذر برای تجزیه ی فرکانس پائین برای تجزیه ی فرکانس های پائین عبور داده می شود ***DWT*** در مقایسه با ***CWT*** برای پیاده سازی بسیار ساده تر است.تفکیک پذیری سیگنال که معیاری از اطلاعات جزئی در سیگنال می باشد ب عمل فیلتر کردن تغییر می کند و مقیاس به عملیات ***Upsampling*** و***Subsampling*** تغییر می کند.

Upsampling افزایش آهنگ نمونه برداری با اضافه کردن نمونه های جدید به سیگنال می باشداین عمل تعداد نمونه های یک سیگنال را با ضریب ***n*** افزایش می دهد.***Subsampling*** نیز کاهش آهنگ نمونه برداری سیگنال با حذف بعضی نمونه ها است.***Subsampling*** با ضریب ***n*** تعدادنمونه های یک سیگنال را ***n*** مرتبه در زمان کاهش می دهد.

اگر چه این تنها بیان درست نیست ولی میتوان گفت ***DWT*** معمولا از***CWT*** نمونه برداری شده است یعنی $s_0=2\ ,\ \tau_0=1$ منجر به $s=2j\ ,\ \tau=k*2j$ و روابط گسسته سازی می شود که در بخش قبل بدست آوردیم.وقتی یک سیگنال گسسته داشته باشیم بجای عبارت تابع برای سیگنال از عبارت دنباله استفاده می کنیم و آن را با $x[n]$ نشان می دهیم .

فرآیند ***DWT*** با عبور سیگنال از فیلترِ ***Halfband*** پائین گذر $h[n]$ آغاز می شود که با بیان ریاضی به صورت:

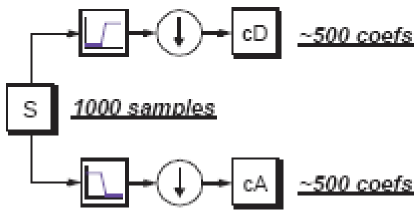
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\ .\ h[n-k]$$

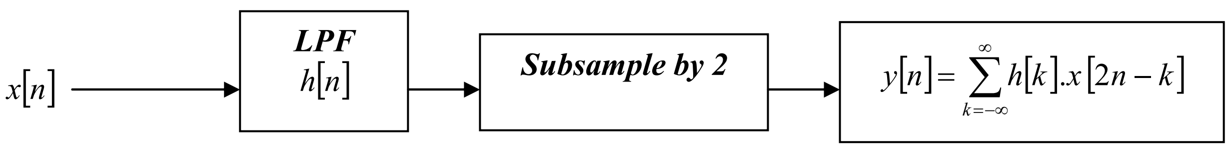
یک فیلتر ***Halfband*** تمام مولفه های فرکانسی بالاتر از نصف بیشترین فرکانس در سیگنال را حذف می کند.اگر بیشترین فرکانس موجود در سیگنال ***1000Hz*** باشد فیلتر ***Halfband*** تمام فرکانس های بیشتر از ***500Hz*** را حذف می کند در سیگنال های گسسته واحد فرکانس رادیان می باشد.فرکانس نمونه برداری ِ سیگنال معادل 2πرادیان فرکانس شعاعی می باشد بنابر این بیسترین فرکانس موجود در سیگنال برابر πرادیان می باشد. پس به خاطر داشته باشید که واحد فرکانس در سیگنال های گسسته زمان بر حسب رادیان می باشد.

با عبور سیگنال از یک فیلتر ***Halfband*** پائین گذر نیمی از نمونه ها مطابق رابطه ی نایکوئیست حذف می شوند و سیگنال بجای π اکنون دارای ماگزیمم فرکانس $\frac{\pi}{2}$ می گردد به بیان ساده حذف هر نمونه ی دیگری از سیگنال باعث می شود سیگنال با ضریب ۲ ،***Subsample*** شود .توجه کنید که فیلتر پائین گذر اطلاعات فرکانس بالا را حذف می کند ولی مقیاس را دست نخورده باقی می گذارد.تفکیک پذیری نیز تحت تاثیر عمل فیلتر کردن قرار می گیرد و به اطلاعات سیگنال بستگی دارد.به طور خلاصه فیلتر پائین گذر تفکیک پذیری را نصف می کند اما مقیاس را دست نخورده باقی می گذاردسیگنال سپس با ضریب ۲ ***subsample*** می شود که این عمل مقیاس را دو برابر می کند.

این فرآیند به صورت زیر بیان می شود:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k].x[2n-k]$$



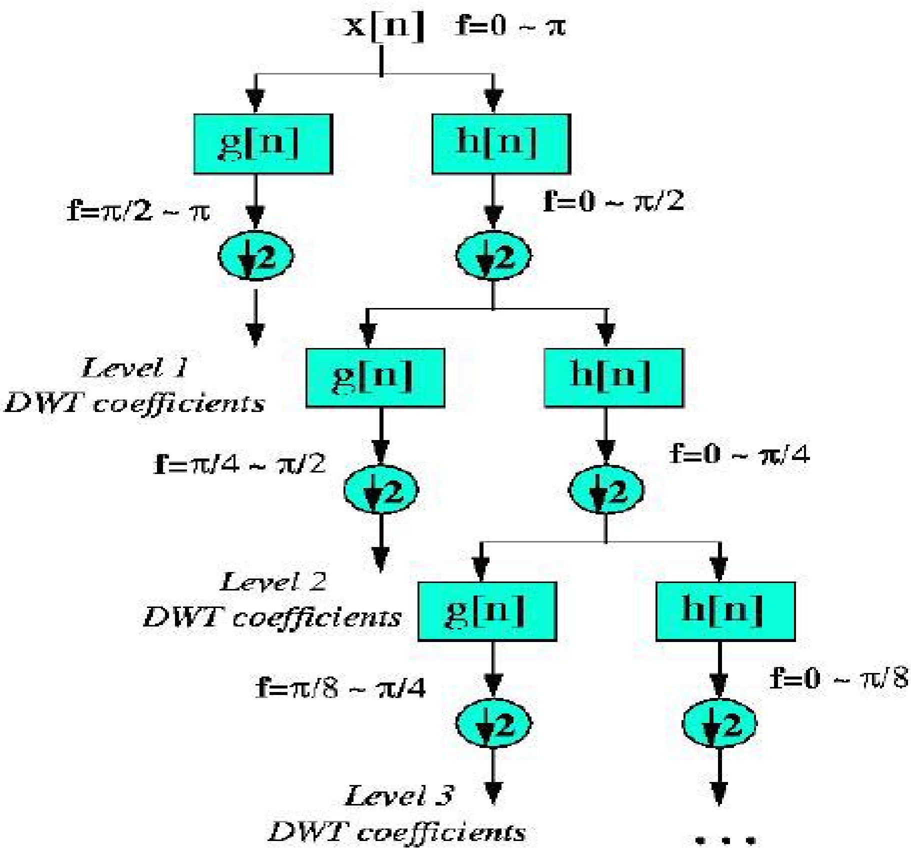


آنالیز ***DWT*** در باند ها ی فر کانسی متفاوتی با مقیاس های مختلفی با تجزیه ی سیگنال به دو بخش ***Approximation*** و***Detail*** انجام می شود.***DWT*** از دو دسته تابع استفاده می کند ***:*** تابع مقیاس دهی و تابع ویولت که به ترتیب به فیلتر های پائین گذر و فیلتر بالا گذر مرتبط می باشد تجزیه ی سیگنال به بخش های فرکانسی متفاوت با فیلتر کردن حوزه ی زمان سیگنال با فیلتر های بالا گذر و پائین گذر بدست می آید.سیگنال $x[n]$ ابتدا از یک فیلتر ***halfband*** بالا گذر $g[n]$و یک فیلتر پائین گذر $h[n]$عبور می کند بعد از فیلترز کردن نیمی از نمونه های سیگنال با توجه به رابطه ی نایکوئست و سیگنال به جای π داری ماگزیمم فرکانس $\frac{\pi}{2}$ می باشد.سپس برای حذف دور انداختن بقیه ی نمونه ها سیگنال با ضریب ۲،***Subsample*** می شود

این مراحل باعث تجزیه ی سطح اول سیگنال می شوند.

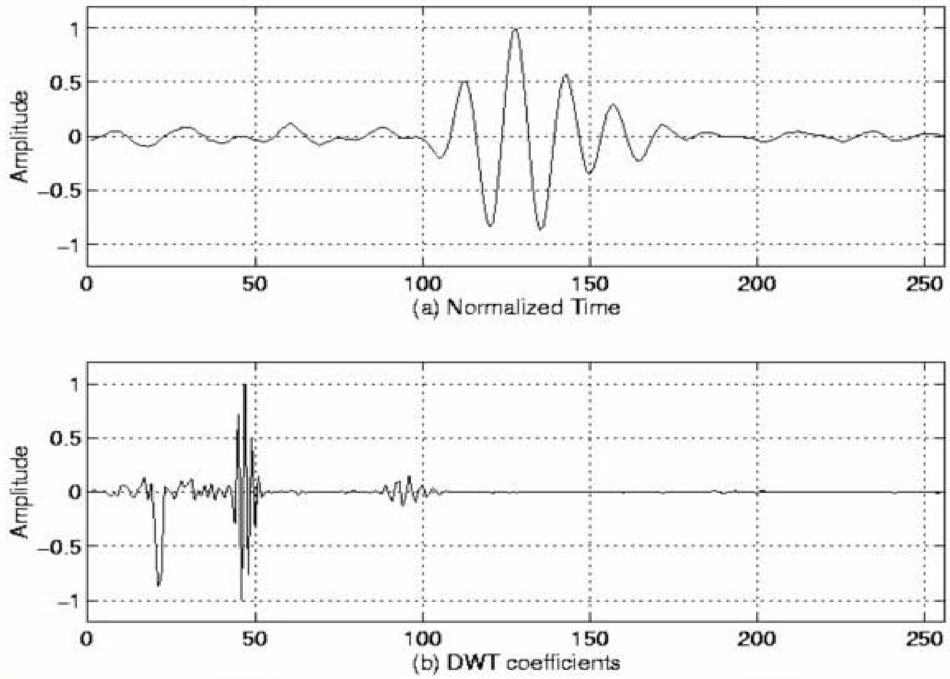
$$y_{high}[k] = \sum_n x[n].g[2k-n]$$
$$y_{low}[k] = \sum_n x[n].h[2k-n]$$

این نحوه ی تجزیه تفکیک پذیری زمانی را نصف می کند یعنی تنها نصف نمونه های موجود در سیگنال ،تمام سیگنال را توصیف می کنند و تفکیک پذیری فرکانسی را دو برابر می کند.مراحل فوق می توانند در هر سطحی انجام شوند.شکل زیر این مراحل را بیان می کند:



بعنوان مثال فرض کنید $x[n]$ سیگنالی با ۵۱۲ نمونه و در محدوده ی فرکانس ۰ تا π باشد در اولین مرحله ی تجزیه سیگنال از یک فیلتر پائین گذر و بالا گذر عبور می کند و سپس با ضریب ۲ در آتن تغییر مقیاس حاصل می شود(***Subsample***)خروجی قیلترِ بالا گذر در این حالت ۲۵۶ نمونه دارد اما فقط در محدوده ی $\frac{\pi}{2}$ تا π گسترده شده است ۲۵۶ نمونه ی اول تشکیل ضرائب سطح اول را می دهند.خروجی فیلتر پائین گذر هم ۲۵۶ نمونه دارد اما در محدوده ی ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ گسترده شده است این سیگنال مجدداّ از فیلتر های بالا گذر و پائین گذر بریا تجزیه ی بیشتر عبور می کند خروجی فیلتر پائین گذر که تغییر مقیاس هم یافته دارای ۱۲۸ نمونه می باشد و در محدوده ی فرکانسی ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ قرار دارد بطور مشابه فیلتر بالا گذر نیز دارای ۱۲۸ نمونه می باشد که در فاصله ی فرکانسی $\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{2}$ قرار دارد.این فرآیند تا جائی ادامه می یابد که دو نمونه از سیگنال باقی بماند. برای این مثال خاص که سیگنال اولیه ی ما ۵۱۲ نمونه داشت این فرآیند در ۸ مرحله انجام می شود.و نهایتاً ***DWT*** ی سیگنالِ اصلی با بهم پیوستن تمامی ضرائب از آخرین سطح (که در این مثال دو نمونه داشت)انجام می شود.فرکانس های مهم در سیگنال اصلی بصورت دامنه ی بالا در نواحی ای که ***DWT*** سیگنال دارای آن فرکانس هلی ویژه می باشد قرار می گیرند.تفاوت مهم بین این تبدیل و تبدیل فوریه این است که زمان حضور این فرکانس ها در تبدیل از بین نمی روند(مشخص است که چه فرکانسی در چه زمانی حضور

دارد).محدوده ی فرکانسی ای که در سیگنال اصلی برجسته نمی باشد دارای دامنه ی کوچکی می باشد و آن بخش از ***DWT***ی سیگنال بدون از دست دادن اطلاعات مهمی می تواند در نظر گرفته نشود.
مثال زیر نشان می دهد ***DWT*** ی یک سیگنال چگونه است و حذف اطلاعات در یک سیگنال چگونه ممکن می شود.



شکل ***a*** یک سیگنال با ۵۱۲ نمونه را نشان می دهد که دامنه ی آن به انداز ه ی واحد نرمالیزه شده است و شکل ***b*** یک ***DWT*** در ۸ مرحله از سیگنال را نشان می دهد ۲۵۶ نمونه ی آخر در سیگنال معادل بالاترین باند فرکانسی و همچنین ۱۲۸ نمونه ی فرکانس بالا در مرحله ی دوم.در این سیگنال ۶۴ نمونه ی اول که معادل فرکانس های پائین تر می باشد داراری اطلاعات مناسب می باشند و بقیه ی سیگنال اطلاعات خاصی ندارد بنابراین بجز ۶۴ نمونه ی اول سیگنال می توانیم از بقیه ی نمونه ها بدون از دست دادن اطلاعاتی صرفنظر کنیم.این مثال نشان می دهد که ***DWT*** چگونه باعث حذف موثر اطلاعات در سیگنال می شود.

یک از خصوصیات مهم ***DWT*** رابطه ی بین پاسخ ضربه ی فیلتر بالا گذر و فیلتر پائین گذر می باشد که با رابطه ی زیر بیان می شود:

$$g[L-1-n]=(-1)^n.h[n]$$

که در این رابطه ؛ $g[n]$ فیلتر بالاگذر و $h[n]$ فیلتر پائین گذر می باشد،L طول فیلتر می باشدو عبارت $(-1)^n$ برای تبدیل پائین گذر و بالاگذر استفاده میشود.فیلتر هائی که در این روابط صدق می کنند در پردازش سیگنال کاربرد دارند و به فیلتر های متقارن ربعی معروفند (QMF).روابط بخش بالا گذر و پائین گذر به بیانی دیگر به صورت زیر مطرح می شوند:

$$y_{high}[k] = \sum_n x[n].g[-n+2k]$$
$$y_{low}[k] = \sum_n x[n].h[-n+2k]$$

باز سازی سیگنال در این حالت بسیار ساده تر از استفاده از پایه های متعامد می باشد برای باز سازی سیگنال در هر مر حله سیگنال ***Upsample*** می شود و از فیلتر های ترکیبی $g'[n],h'[n]$ که به ترتیب بالاگذر و پائین گذر می باشند عبور داده می شود.و سپس جمع می شوند:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(y_{high}[k].g'[-n+2k]) + (y_{low}[k].h'[-n+2k])$$