

## مروری بر مقالات منتشره درباره روشهای مختلف حل پخش بار بهینه تا سال ۲۰۰۵ (قسمت اول: روشهای برنامه ریزی خطی و غیر خطی)



رضادوستی

قاسم صادقی

دانشگاه بیرجند - دانشکده مهندسی - گروه مهندسی قدرت

[rezapwr@gmail.com](mailto:rezapwr@gmail.com)

[ghasempwr@gmail.com](mailto:ghasempwr@gmail.com)

[sadeghy\\_ghasem@yahoo.com](mailto:sadeghy_ghasem@yahoo.com)

### چکیده

کاربرد روشهای بهینه سازی از جمله پخش بار بهینه در طراحی ساخت و بهره برداری سیستمهای قدرت یک زمینه فعال تحقیقاتی در دهه های اخیر بوده است. در این مقاله ضمن ارائه اصول اساسی روشهای مختلف حل پخش بار بهینه مقالات منتشره در این زمینه مرور و مقایسه شده اند. همگرایی و زمان حل از شاخصهای مورد توجه در این بررسی هستند. قسمت اول به روشهای برنامه ریزی خطی و غیرخطی اختصاص دارد.

**کلمات کلیدی:** پخش بار بهینه - برنامه ریزی خطی - برنامه ریزی غیر خطی - نقطه یابی درونی

### ۱- مقدمه

در یک سیستم قدرت، نیروگاهها در فواصل یکسان از مراکز بار واقع نشده اند و هزینه تولید انرژی آنها نیز متفاوت است. همچنین تحت شرایط بهره برداری عادی، ظرفیت تولید بیش از مجموع تقاضای بار و تلفات است. در یک سیستم قدرت بهم پیوسته یکی از اهداف اساسی این است که برنامه ریزی توانهای اکتیو و راکتیو در هر یک از نیروگاهها چنان باشد که هزینه بهره برداری حداقل شود. این بدان معنی است که ژنراتورها مجازند در محدوده معینی، توانهای اکتیو و راکتیو خود را چنان تغییر دهند که تقاضای بار مشخص با حداقل هزینه سوخت تامین شود. این مسئله را پخش بار بهینه (OPF)<sup>۱</sup> می نامند. به بیان دیگر OPF یک نرم افزار بهینه سازی جهت تنظیم شبکه قدرت برای رسیدن به مقادیر بهینه از قبل تعیین شده، از قبیل هزینه تولید و تلفات است. در صورت استفاده مناسب از OPF، این نرم افزار می تواند مزایای زیادی در بهره برداری و طراحی سیستم های قدرت داشته باشد [1]. کاربرد روشهای بهینه سازی در طراحی سیستم های قدرت و مسائل بهره برداری آن یک زمینه فعال تحقیقاتی در دهه های اخیر بوده است. در OPF تلاش می شود تا یک هدف خاص ضمن اعمال قیود بهره برداری و فیزیکی شبکه بهینه شود. در یک مسئله پخش بار بهینه مرسوم، هدف کمینه نمودن هزینه بهره برداری نیروگاههای حرارتی با عنایت به ارضا قیود مورد نظر است که این کار بوسیله روابط تعادل توانهای اکتیو و راکتیو شین هابر حسب ولتاژها و زوایای فاز انجام می شود. روشهای بهینه سازی متعددی برای حل مسائل OPF به کار می رود. این روشها را می توان به صورت زیر طبقه بندی نمود:

- برنامه ریزی خطی

<sup>1</sup> Optimal Power Flow

- برنامه ریزی غیر خطی
- برنامه ریزی درجه دو
- حل براساس روش نیوتن رافسون برای شرایط بهینه
- نوع ترکیبی از روش خطی و برنامه ریزی با اعداد صحیح (MIP)<sup>2</sup>
- روش نقطه درونی<sup>3</sup> (IP)

در قسمت اول این مقاله، ضمن ارائه اصول اساسی روشهای برنامه ریزی خطی و غیرخطی در حل یک مسئله OPF، مقالات منتشره در هریک از این زمینه ها مرور شده و خصوصیات آنها نظیر همگرایی و زمان حل مقایسه شده اند.

## ۲- برنامه ریزی خطی (LP)<sup>۴</sup>

روش برنامه ریزی خطی درمسائلی کاربرد دارد که توابع هدف و قیود آنها به شکل خطی بوده و دارای متغیرهای نامنفی باشند. این روش ساده و بسیار موثر است. توابع هدف (ولتاژ، تلفات، پخش باراقتصادی و توان راکتیو) در مسئله OPF بایستی خطی شوند تا قابل استفاده در روش LP باشند. چگونگی اصلاح برنامه ریزی خطی در یک مسئله OPF و کاربرد آن در امنیت سیستمهای قدرت در مراجع [2] و [3] ارائه شده است. در ادامه ابتدا به اختصار اصول برنامه ریزی خطی ذکر شده و سپس تلاشیایی که تا کنون در این زمینه در حل مسائل پخش بار بهینه صورت گرفته، ذکر شده اند.

### ۲-۱- اصول برنامه ریزی خطی

برای نخستین بار مسئله پخش بار بهینه به صورت زیر نمایش داده شد [4], [5]:

$$(1) \quad f(x, u) \text{ : کمینه کن}$$

با توجه به قیود تساوی و نا مساوی زیر:

$$(2) \quad g(x, u) = 0$$

$$(3) \quad h_{\min} \leq h(x, u) \leq h_{\max}$$

$$(4) \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

در روابط بالا:  $x$  بردار متغیرهای وابسته ( نظیر دامنه و فاز ولتاژ شین های بار) ،  $u$  بردار متغیرهای کنترل (نظیر توانهای تولیدی ژنراتورها و موقعیت تپ ترانسفورماتورها)،  $f(x, u)$  تابع هدف،  $g(x, u)$  قیود تساوی (معادلات پخش بار) و  $h(x, u)$  قیود نا مساوی شامل محدودیتهای مختلف پخش بار، تولید ژنراتورها و... است.

### ۲-۲- طرح OPF به صورت یک برنامه ریزی خطی

یک مسئله پخش بار بهینه قابل استفاده در برنامه ریزی خطی با خطی سازی توابع هدف و قیود به شکل کلی زیر قابل طرح است:

$$(5) \quad f(x^\circ + \Delta x) \text{ : کمینه کن}$$

$$(6) \quad g'(x^\circ + \Delta x) = 0 \text{ : وقتی}$$

$$(7) \quad h'(x^\circ + \Delta x) \geq 0$$

$x^\circ$  مقدار اولیه و  $g', h'$  تقریبهای خطی برای قیود غیرخطی مرجع هستند. از معادلات پخش بار تفکیک شده استاندارد داریم:

$$(8) \quad [\Delta P/V] = [B'][\Delta Q]$$

<sup>2</sup> Mixed Integer Programming

<sup>3</sup> Interior Point method (IP)

<sup>4</sup> Linear Programming (LP)

$$[\Delta Q] = [B''][\Delta V] \quad (9)$$

$B', B''$  المانهایی از ماتریس پراکندگی (B) هستند و معمولاً مدل خطی شده شبکه براساس ماتریس  $B', B''$  از الگوریتم تفکیک شده سریع پخش بار، مورد استفاده قرار می گیرد [6].

### ۳-۲- حل OPF از روش برنامه ریزی خطی

در سال ۱۹۶۸ ولز<sup>۵</sup> [7] رهیافت روش برنامه ریزی خطی را جهت توزیع اقتصادی بار، ارائه کرد. که تابع هدف آن هزینه تولید قدرت و قیود آن خطی بوده و از روش SM<sup>۶</sup> برای حل استفاده می کرد. الگوریتم اولیه یک رهیافت جداسازی بر اساس الگوریتم دانترنیک و ولف<sup>۷</sup> بود. محدودیت های روش عبارتند از:

۱- نتایج نهائی حاصله از یک وضعیت غیرعملی ممکن است بهینه نباشد.

۲- گرد کردن خطاها بوسیله کامپیوتر ممکن است موجب تخطی از قیود شود.

در سال ۱۹۷۰ شن ولانگتون<sup>۸</sup> [8] روش برنامه ریزی دوگانه خطی را ارائه کردند. روش بر روی سیستم قدرت ۲۳ شینه آزمایش شده است. ضمن مطالعات مقایسه ای با برنامه ریزی غیرخطی، روش بخوبی آزمایش شده و نتایج قابل قبول در اختیار گذاشته است.

در سال ۱۹۷۸ استات و هابسون<sup>۹</sup> [9] دومین سری از مقالات کاربرد برنامه ریزی خطی جهت حل مسائل عملی سیستمهای قدرت را ارائه کردند که از آن می توان جهت کنترل و بهره برداری سیستم و پخش مجدد تولید برای حذف اضافه بارهای شبکه استفاده کرد. در این مقالات از یک روش برنامه ریزی خطی تکراری استفاده شده است. بخاطر کاربرد روش برنامه ریزی خطی، با افزایش تعداد شین ها محاسبات افزایش می یابد. روش شامل شش تابع هدف است که اولویت بندی شده اند و قابلیت گنجاندن مدیریت خاموشی در آن نیز وجود دارد. روش توانایی استفاده از تپ های ولتاژ بالا را داشته و می توان آنرا در سیستم های قدرت بزرگ بکار برد. روش مذکور همچنین نقاط ناممکن را با استفاده از ساختار سلسله ای حل می کند.

در سال ۱۹۷۹ استات و مارینهو<sup>۱۰</sup> [10] رهیافت برنامه ریزی خطی با استفاده از تکنیک اصلاح شده SM برای پخش امنیتی و محاسبات کنترل های اضطراری در سیستم های قدرت بزرگ ارائه نمودند. این رویه به جای روش کلاسیک برنامه ریزی خطی، بر یک کد برنامه ریزی خطی تعمیم یافته استوار است. این روش روی کامپیوتر IBM370-158 گسترش یافته و روی سیستم های ۱۲۶ و ۳۰ باسه آزمایش شد. با توجه به اینکه روش از دو تابع هدف درجه دو استفاده می نماید جهت حصول حل نیازمند خطی سازی است. همچنین می توان اجزاء بهره برداری از قبیل نقطه تنظیم تپ ترانسفورماتورها را بعنوان متغیر مورد استفاده قرار داد.

در سال ۱۹۸۲ استادلین و فلچر<sup>۱۱</sup> [11] روشی را ارائه کردند که از یک مدل جریانی برای پخش و کنترل ولتاژ/توان راکتیو استفاده کرده و مسئله OPF با استفاده از روش برنامه ریزی خطی حل می کرد. یکی از مزیت های روش این است که معادلات اساسی پخش بار قابلیت تفکیک به توانهای موهومی و دامنه ولتاژ را داشته و ضرایب حساسیت را می توان از ضرایب ولتاژ و توانهای راکتیو بدست آورد. همچنین روش قابلیت گنجاندن مدلهای امکانات کنترلی نظیر، تپ ترانسفورماتورها، و مدلهای مختلف بار را دارد. این روش بر روی سیستم آزمایشی ۳۰ شینه IEEE آزمایش شده و مطالعات حساسیت را در دو بخش حساسیت به جریان راکتیو و حساسیت به تغییرات تپ ترانسفورماتورها انجام داده اند.

در سال ۱۹۸۳، ایروینگ و استرلینگ<sup>۱۲</sup> [12] یک روش برنامه ریزی خطی را جهت پخش اقتصادی توان حقیقی با قیود حالت مانا ارائه کردند که از معادلات پخش توان AC استفاده میکرد. اندازه سیستم مورد مطالعه عملاً به توانایی

<sup>5</sup> Wells

<sup>6</sup> Simplex method (SM)

<sup>7</sup> Dantzing and Wolfe

<sup>8</sup> Shen and laughton

<sup>9</sup> Stott and Hobson

<sup>10</sup> Stott and Marinho

<sup>11</sup> Stadlin and Fletcher

<sup>12</sup> Irving and sterling

و قابلیت‌های کامپیوتر مورد استفاده بستگی دارد. به هر حال روش قابلیت حل سیستم‌ها تا ۵۰ ژنراتور و ۳۰۰ گره را دارد.

در سال ۱۹۸۳ هوس و ایریساری<sup>۱۳</sup> [13] رهیافت روش برنامه ریزی خطی شبه نیوتنی که از تکنیک متغیرهای وزندار و ترکیب چند تابع هدف استفاده می‌کرد را ارائه کردند. در این روش، قیود خطی شده به صورت دسته‌ای از توابع جریمه با ضرایب وزندار متغیرها لحاظ می‌شوند. این روش همچنین از یک تابع "هدایت کننده"<sup>۱۴</sup> جهت حفظ قابلیت حل (حرکت در امتداد مسیر جواب) استفاده می‌کند. از این روش می‌توان جهت حل پخش بار بهینه استفاده نمود. روش مذکور روی سیستم‌های ۱۶ و ۱۸ شینه آزمایش شده و به نظر می‌رسد که برای سیستم‌های مقیاس کوچک در مقایسه با روشهای شناخته شده به خوبی عمل نماید.

در سال ۱۹۸۴ فرغال<sup>۱۵</sup> و دیگران [14] روشی را برای کنترل زمان واقعی سیستم‌های قدرت در شرایط اضطراری ارائه کردند که در آن مجموعه‌ای از اعمال کنترلی مبتنی بر یک تابع پخش مجدد بهینه، جهت تصحیح شرایط بهره برداری نامطلوب با استفاده از پارامترهای حساسیت به کار گرفته شده است. این روش روی یک سیستم ۳۰ شینه برای مدل‌های بار مختلف آزمایش شد و جهت حذف اضافه بار خطوط و بهره برداری‌های حین کار نیز مناسب است. همچنین در سال ۱۹۸۴، موتا-پالینو و کوپینتان<sup>۱۶</sup> [15] تکنیک برنامه ریزی خطی غیرمرسومی را شامل رهیافت توابع جریمه مشتق پذیر تکه‌ای<sup>۱۷</sup> ارائه کردند. این روش پخش اقتصادی مقید (CED)<sup>۱۸</sup> را با ارضاء قیود خطی حل می‌کند. این روش بوسیله سیستم‌های قدرت ۱۰، ۲۳ و ۱۱۸ شینه تصدیق شده و در آن به یک نقطه اولیه عملی جهت دستیابی به حل بهینه نیازی نیست. در همه موارد مطالعه شده روش ارائه شده، تکرارهای کمتری را جهت دستیابی به حل بهینه نسبت به تکنیک استاندارد اولیه SM دارد. روش برنامه ریزی خطی با توابع جریمه همچنین می‌تواند در فرمولبندی‌های برنامه ریزی دوگانه خطی استفاده شود. روش ارائه شده به سادگی قابلیت گسترش به مسائل برنامه ریزی درجه دو را دارد.

در سال ۱۹۸۶ موتا-پالینو و کوپینتان<sup>۱۹</sup> [16] برای حل مسئله پخش توان راکتیو، الگوریتمی مبتنی بر برنامه ریزی خطی به همراه توابع جریمه را ارائه کردند. این روش از یک ماتریس حساسیت توان راکتیو پراکنده، جهت بهینه سازی و تعیین قیود اجباری در حل استفاده می‌کند. به کمک این روش می‌توان مسائل غیر قابل حل را با یافتن نزدیک ترین نقطه به حل عملی، اجرا و حل نمود. این روش قابلیت اجرا بر روی سیستم‌های مقیاس بزرگ را دارد. مسئله پخش توان راکتیو مورد نظر در این مقاله، از توابع برداری مختلفی تشکیل شده که عبارتند از:

- بردار هزینه‌های مرتبط با تغییرات در ولتاژ شین‌های کنترل شده،
  - بردار هزینه‌های مربوط به تغییرات در بانکهای خازنی موازی متصل شده به شین‌ها،
  - بردار هزینه مرتبط با تغییرات نسبت دور ترانسفورماتورها.
- در روش ارائه شده قیود نامساوی محدودیت‌ها را روی تغییرات مجاز در متغیرها و تولید جریان راکتیو قرار داده و قیود نرم افزاری و سخت افزاری هر دو در فرمولبندی مسئله لحاظ شده‌اند.

در سال ۱۹۸۷ سانتوز و کوپینتان<sup>۱۹</sup> [17] یک روش برنامه ریزی خطی برای حل مسئله پخش توان راکتیو را ارائه کردند. از میان توابع هدف مطالعه شده، می‌توان تلفات توان حقیقی و انحراف ولتاژ بار را نام برد. یک الگوریتم برنامه ریزی خطی تابع جریمه همراه با طرحی برای غلبه بر واگرایی و عملی بودن جواب به کار برده شده است.

<sup>13</sup> House and Irisarri

<sup>14</sup> Guiding

<sup>15</sup> Farghal

<sup>16</sup> Mota- Palomino and Quintana

<sup>17</sup> Piece-wise differentiable Penalty Function

<sup>18</sup> Constrained Economic Dispatch

<sup>19</sup> Santos-Nioto and Quintana

این روش بر روی سیستم ۲۵۳ باسه مکزیک آزمایش و تصدیق شده ولی قابلیت حل و تحقق جواب عملی ناشی از حساسیت، در این فرمولبندی نشان داده نشده است.

### ۳- برنامه ریزی غیر خطی (NLP)<sup>۲۰</sup>

برنامه ریزی غیر خطی به مسائلی می پردازد که دارای توابع هدف و قیود غیر خطی هستند. قیود ممکن است شامل قیود تساوی و نامساوی باشند. لازم به ذکر است که در قیود نامساوی، حدود بالا و پایین مشخص هستند. روشهای متعددی مانند روش کمینه نمودن پی در پی نامقید (SUMT)<sup>۲۱</sup> و روش ضرایب لاگرانژ تا کنون معرفی شده اند. در این دسته فرض بر آن است که توابع هدف و قیود هر دو غیر خطی هستند. بررسی زمینه های کاربردی، بیانگر این مطلب است که ۸٪ از نرم افزارهای کاربرد عمومی OPF در مسائل بهره برداری حین کار و خارج خط از برنامه ریزی غیرخطی استفاده می کنند.

### ۳-۱- اصول برنامه ریزی غیر خطی

فرمولبندی ریاضی یک مسئله برنامه ریزی غیرخطی که معمولاً در مهندسی قدرت با آن مواجه هستیم به شکل زیر است:

$$f(x) : \text{کمینه کن} \quad (10)$$

$$g(x) = 0 \quad \text{وقتی} \quad (11)$$

$$\underline{h} < h(x) < \bar{h} \quad (12)$$

در روابط بالا:  $x \in R^n$  برداری از متغیرهای انتخابی شامل متغیرهای کنترل و متغیرهای وابسته غیر خطی،  $f: R^n \rightarrow R$  تابع عددی بیانگر هدف بهینه سازی در بهره برداری سیستم قدرت است،  $g: R^n \rightarrow R^m$  تابع برداری با معادلات مرسوم پخش بار و سایر قیود تساوی است و:  $h: R^n \rightarrow R^p$  برداری از محدوده های متغیرهای تابعی غیر خطی و محدوده های متغیرهای ساده به ترتیب با حدود بالا و پایین  $\underline{h}, \bar{h}$  است که این حدود به محدودیتهای فیزیکی و بهره بردای بستگی دارند.

### ۳-۲- مرور بر مقالات در زمینه برنامه ریزی غیر خطی

از جنبه تاریخی این روش اولین روش برنامه ریزی است که به خوبی با اصول کاری موجود در مدلهای فیزیکی شبکه های الکتریکی هماهنگ شده است.

در سال ۱۹۶۲، کارپنتر<sup>۲۲</sup> اولین کسی بود که فرمول برنامه ریزی غیر خطی را برای مسئله پخش بار اقتصادی، شامل ولتاژ و سایر قیود معرفی کرد [4].

در سال ۱۹۶۸، دومل و تینی<sup>۲۳</sup> [5] روش برنامه ریزی غیرخطی برای کمینه نمودن هزینه سوخت و تلفات توان حقیقی را با استفاده از رهیافت بهینه سازی توابع جریمه، ابداع کردند. این روش NLP، حدود را در استفاده از رهیافت ضرایب لاگرانژ چک می کند، و قادر به حل مسائل سیستم های قدرت تا ۵۰۰ شین است. محدودیت های روش در مدل کردن اجزایی از قبیل تپ ترانسفورماتورها است، که برای پخش بار استفاده می شوند.

در سال ۱۹۶۹ شن و لاگتون<sup>۲۴</sup> [18] روشی را ارائه دادند که بیانگر یک رهیافت تکرار غیر مستقیم، مبتنی بر شرایط لاگرانژ - کان تاکر برای حل مسائل سیستم های قدرت بود. اعتبار این روش با پیاده سازی آن بر روی سیستم قدرت<sup>kv</sup> ۱۳۵ انگلیس با ۲۷۰ شین آزمایش و تصدیق شد. در این آزمایش برای حل پخش بار اقتصادی از تابع هدف و قیودی

<sup>20</sup> Non-Linear Programming (NLP)

<sup>21</sup> Sequential Unconstrained Minimization Technique

<sup>22</sup> Carpenter

<sup>23</sup> Dommel and Tinney

<sup>24</sup> Shen and Laughton

که ارضا کننده شرایط لازم کان تیوکر بودند، استفاده شد. قیود شامل: سطح ولتاژ، بارگیری ژنراتورها، بارگیری منابع توان ر اکتیو، حدود تپ ترانسفورماتورها و ظرفیت باردهی خطوط انتقال بودند. در مقایسه با سایر روشهای توابع جریمه، این روش (با خطای انتخابی ۰/۰۰۱) نیاز به زمان محاسباتی کمتری خواهد داشت.

در سال ۱۹۶۹، ال ابیاد و جیمز<sup>۲۵</sup> [19] یک فرمول بندی عمومی از مسئله پخش بار بهینه اقتصادی را ارائه کردند. آنها از روش برنامه ریزی غیر خطی که از ضرایب لاگرانژ به عنوان قیود نامساوی استفاده می کرد، بهره بردند. این روش برای بهینه سازی توان حقیقی و دامنه ولتاژ گسترش یافته و بر روی یک سیستم قدرت نمونه نیز آزمایش شده است. همچنین این روش از پخش بار به عنوان یک قید در فرایند بهینه سازی استفاده نکرده و از ضرایب تسریع، جهت بهبود همگرایی بهره می برد.

در همان سال (۱۹۶۹) ساسون<sup>۲۶</sup> [20]، کار دومل و تینی [5] را گسترش داد. وی تلاش نمود تا همگرایی رهیافت مبتنی بر نیوتن را بهبود بخشد. این کار هزینه سوخت و تلفات خطوط انتقال را با استفاده از تکنیک برنامه ریزی غیر خطی که از الگوریتمهای پاول و فلتچر-پاول استفاده می کرد، کمینه نمود. این روش، همگرایی را در هر مرحله از بهینه سازی آزمایش می کند. به هر حال روش مذکور شباهت های زیادی با روش کان تاکر و لاگرانژ دارد. این روش بر روی سیستم ۳۰ شینه IEEE آزمایش شده و محدودیت آن در این است که بیشتر از دو قید در هر شین را نمی تواند اداره و اجرا کند.

همچنین در سال ۱۹۷۰ ساسون [21] روش تینی را گسترش داد. او تلاش کرد تا همگرایی روش نیوتن رافسن را افزایش دهد، این روش هزینه های سوخت و تلفات خطوط انتقال را به حداقل می رساند. همگرایی در هر سطح از بهینه سازی آزمایش شده و برای سیستم های قدرت در مقیاس بزرگ قابل اطمینان است. جهت بکارگیری روش فوق الذکر در سیستم های قدرت بزرگ، ممکن است استفاده از روش تجزیه الزامی شود. به هر حال روش فلتچر - پاول<sup>۲۷</sup> به ماتریس هسین<sup>۲۸</sup> بستگی دارد که در هر مرحله به کمینه خود می رسد.

در سال ۱۹۷۳ ساسون [22] ترکیبی از روشهای پاول و پاول - فلتچر را ارائه داد. روش پاول جهت حل مسئله بهینه سازی مقید استفاده شده در حالی که روش فلتچر - پاول برای حل مسئله بهینه سازی نا مقید بکار میرود. این روش در سیستم ۳۰ شینه آزمایشی IEEE، بوسیله یک کامپیوتر IBM707 آزمایش شد و مدت حل سیستم دو دقیقه طول کشید. تعداد مراحل مورد نیاز فلتچر - پاول در هر تکرار برای سیستم ۳۰ شینه ۱۶۱ مرحله و شامل ۱۰ تکرار می شد که قابل مقایسه با ۴۸۸ مرحله و ۱۴ تکرار در روش هسین است. اگر روش به طور پیوسته برای پخش بار اقتصادی با گام زمانی ثابت استفاده شود، اساسا زمان حل کاهش خواهد یافت.

در سال ۱۹۷۴، الساک و استوت<sup>۲۹</sup> [23] رهیافت برنامه ریزی غیر خطی مبتنی بر روش گرادیان کاهش یافته با استفاده از ضرایب لاگرانژ و توابع جریمه را ارائه کردند. این روش مسئله هزینه کل تولید توان حقیقی را کمینه نموده و قیود امنیتی و غیر امنیتی مانا را با هم ترکیب می نمود. این روش توسط سیستم ۳۰ شینه IEEE مورد تایید قرار گرفته و ۱۴/۳ ثانیه حل آن به طول انجامیده است. استفاده از قیود امنیتی حالت مانا محاسبات پخش بار بهینه را

<sup>25</sup> El Abaid and Jaimes

<sup>26</sup> Susson

<sup>27</sup> Fletcher-Powell

<sup>28</sup> Hessian Matrix

<sup>29</sup> Alsac and Sachdeva

ابزاری قدرتمند و عملی، جهت طراحی و بهره برداری سیستمها کرده است) با این روش خروجیهای گوناگون یا احتمال رخداد مختلف مورد ارزیابی قرار می گیرد). انتخاب گام حل مناسب، ضامن موفقیت الگوریتم است.

بیلنتون و سچدوا<sup>30</sup> [24] یک روش برنامه ریزی غیر خطی با استفاده از الگوریتمهای پاول و پاول-فلتچر که شامل فاکتورهای جریمه بود، ارائه کردند. توابع هدف بررسی شده در این روش: تلفات توان حقیقی و راکتیو و هزینه توزیع توانهای حقیقی و راکتیو است. روش بروی یک سیستم آزمایشی براساس مدل کاهش یافته سیستم قدرت شرکت سهامی ساس کاتچوان<sup>31</sup> پیاده سازی شده است. این الگوریتم ترکیبی از توابع هزینه نیروگاههای حرارتی و برق آبی را در محاسبات مورد استفاده قرار میدهد. که بترتیب به صورت خطی و غیرخطی لحاظ می شوند.

یافته مهم دیگر در باب حل پخش بار اقتصادی، در سال ۱۹۷۷ بوسیله بارسلو<sup>32</sup> [25] بدست آمد. او برنامه ریزی غیر خطی ای ارائه کرد که در آن، از ماتریس مختلط و تقریبی هسین برای یک پخش بار بهینه زمان واقعی مقید، استفاده شده بود. این روش برای مسائل بهره برداری حین کار<sup>33</sup>، طراحی شده، ولی برای مسائل خارج خط نیز، قابل استفاده است. براساس این روش، در ماتریس هسین محتوای تقریبی جدیدی وجود دارد که فضاهای خالی ایجاد کرده و حافظه قابل ملاحظه ای از کامپیوتر را اشغال می کند (که بدون استفاده می ماند). این روش از یک الگوریتم حذف ماتریس پراکندگی و بهینه سازی مبتنی بر یک منطق منحصر به فرد برای تغییر وضعیت قیود نامساوی، استفاده می کند. نتایج حاصله از پیاده سازی روش بر روی یک سیستم قدرت ۱۲۰۰ شینه عملی، قابل مقایسه با حل پخش بار نیوتن هستند. همچنین نتایج بدست آمده از این روش با روش توابع جریمه برای پخش بار اقتصادی مستقیم مقایسه شده اند و نویسنده مدعی صرفه جوئی دلاری قابل ملاحظه آن است.

در سال ۱۹۸۲ هوسوس و ایرسیاری<sup>34</sup> [26] روشی را ارائه کردند که یک تکنیک متریک متغیر را بکار می برد. در این الگوریتم بجای استفاده از ماتریس هسین، از کدگذاری پراکندگی برای بهبود ماتریس هسین استفاده شده که اساس آن بر روشهای BFGS<sup>35</sup> و DFP<sup>36</sup> بود. این روش برای حل مسائل بهینه سازی پخش توان در سیستم های ۱۴ و ۱۸ شینه بکار رفته و مورد تایید قرار گرفته است. نتایج حاصله با نتایج بدست آمده از روشهای مشهور قابل مقایسه است. به هر حال برای سیستمهای بزرگ ممکن است برخی مشکلات همگرایی بوجود آید. الگوریتم برای سیستم های کوچک مانند ۱۴ شینه به خوبی عمل نموده ولی برای سیستم های بزرگتر مثل سیستم های ۱۸ شینه یا بزرگتر دقت یکسانی نداشت.

در سال ۱۹۸۲، شولتز و سان<sup>37</sup> [27] مسئله OPF را مطرح کردند که اساس آن بر الگوریتم تجزیه به اجزای حقیقی و راکتیو (P/Q) بود. مسئله P درگیر کمینه کردن هزینه تولید ساعتی، با کنترل توان حقیقی خروجی ژنراتورها و تنظیم تپ در ترانسفورماتورهای تغییر دهنده فاز است. مسئله Q درگیر کمینه کردن تلفات حقیقی خطوط با کنترل ولتاژ ترمینال ژنراتورها و تنظیم تپ ترانسفورماتورهای تنظیم و خازنهای موازی است. هر دو مسئله P, Q شامل قیود امنیتی ایستا از قبیل محدوده ولتاژ شین ها، ظرفیت اسمی خطوط انتقال و محدودیت های توان راکتیو ژنراتورها هستند. این تحقیق نشان می دهد که اگر مسائل ترکیبی حل شوند، نتایج بدست آمده با نتایج الگوریتم تفکیک شده

<sup>30</sup> Billinton and Sachdeva

<sup>31</sup> Saskatchewan Power Corporation

<sup>32</sup> Barcelo

<sup>33</sup> On-Line

<sup>34</sup> Houses and Irisarri

<sup>35</sup> Broaden –Fletcher –Goldfrab-Shanno

<sup>36</sup> Darion- Fletcher-powell

<sup>37</sup> Shoults and Sun

یکسان خواهد بود. این روش اساساً یک راهکار بهینه سازی غیرخطی مبتنی بر روش گرادیان است که تکنیک کمینه سازی نامقید ترتیبی (SUMT) را به خدمت گرفته است. چون در این روش نیازی به یک نقطه شروع عملی نیست، تابع جریمه خاصی تعریف شده تا توابع وابسته را در نقطه بهینه، به عملی شدن وادار نماید. برای نشان دادن اینکه مسائل فرعی  $P$  و  $Q$  دارای جواب هستند، یک سیستم ۵ شینه به کار برده شد. البته این روش توانائی حل سیستم های بزرگ مانند سیستم ۱۵۰۰ شینه با ۲۵۰۰ خط انتقال را داشته و در واقع بر روی یک سیستم آزمایشی ۹۶۲ شینه آزمون شده است. حل روش با نقاط ابتدایی مختلف، نتایج یکسانی داشته، و سیستم ۹۶۲ شینه در ۴۶ ثانیه حل شده است. برای یک سیستم ۵ شینه  $2/3$  ثانیه محاسبات طول می کشد. یک نقطه ابتدایی مناسب، برای بدست آوردن راه حل عملی جهت تجزیه مسائل بزرگ به زیر مسئله ها، و در نتیجه کاهش زمان مورد نیاز، ضروری است. این روش برای بهره برداری های حین کار مفید می باشد.

در همان سال ۱۹۸۲ [28] دی وی و کساوان<sup>۳۸</sup> روش تابع جریمه انتقال یافته را ارائه کردند که بر شرایط ضعیف هسین در روش تابع جریمه برای حل مسائل غیر خطی مقید، غلبه کرد. این روش از مفهوم گرادیان کاهش یافته استفاده کرده و روش شبه نیوتنی فلتچر را جهت بهینه سازی توابع جریمه انتقال یافته اصلاح کرد، که این امر موجب افزایش بیشتر همگرایی و دقت آن شد. در این روش، متغیرهای  $OPF$  به متغیرهای مستقل  $x$ ، شامل متغیرهای شین های ژنراتور و متغیرهای وابسته  $y$ ، شامل متغیرهای ولتاژ شین های بار تقسیم شده اند. قیود تساوی در توابع جریمه انتقال یافته لحاظ نشده اند، اما از آنها برای بدست آوردن گرادیان کاهش یافته تابع جریمه، استفاده شده است. این روش از پخش بار به عنوان یک قید در فرمولاسیون مسئله استفاده نکرده اما از آن برای حذف متغیرهای  $P_g$  و  $Q_g$  از توابع هدف با جایگزینی مقادیر آنها برحسب اندازه ها و زوایای ولتاژها  $(|V|, \delta)$  استفاده کرده است. توابع هدف، توابعی با مقادیر عددی هستند و می توانند هزینه سوخت مورد نیاز جهت تامین میزان تلفات خطوط انتقال باشند و قیود تساوی همان معادلات بار مورد تقاضا و قیود نامساوی محدوده تغییرات مجاز توانهای حقیقی و موهومی تولیدی، بار و دامنه ولتاژ هستند. انتخاب شین اصلی برای حل مسئله مهم است. این روش روی سه سیستم قدرت که بزرگترین آنها ۱۱ شین است، آزمایش شده است. که نتایج نشان دهنده کاهش ۳۰ درصدی هزینه محاسبات در مقایسه با روش توابع جریمه است.

در سال ۱۹۸۲ تلوکدار<sup>۳۹</sup> [29] روش شبه نیوتن با متغیرهای متری را برای حل مسائل غیر خطی در  $OPF$  ارائه داد. این روش به دلایل زیر جذاب بود:

- این روش قیود  $OPF$  را در یک مسیر مستقیم رو به جلو قرار می داد.
  - این روش نیرومند بوده و به راه حلی عملی از یک نقطه ابتدائی غیرقابل حل می رسید.
  - این روش به نظر بسیار سریع می آمد.
- این روش برنامه ریزی، غیر خطی بود که بر نقایص توابع جریمه و همچنین بر مشکلات محاسباتی روش هسین در عمل، که اغلب ماتریسی معین و مثبت نبود، غلبه کرد.

به نظر می رسد این روش چندین بار سریع تر از سایر روشها باشد که برای بهینه سازی از تکنیک تجزیه BLW<sup>۴۰</sup> استفاده می کند. یک سیستم بزرگ ۱۰۰۰ شینه به سیستم های کوچک قسمت بندی شده و قادر به اجرا بوسیله

<sup>38</sup> Divi and Kesavan

<sup>39</sup> Tlukdur

<sup>40</sup> Berna, Locke and Westerberge



کامپیوترهای کوچک است. این روش برای اهدافی از قبیل کاهش تلفات، هزینه و خطای ولتاژ استفاده شده و به سیستم ۲۵ شینه محدود شده بود. متغیرهای استاندارد OPF در سیستم های قدرت نظیر جریان های خطوط ارتباطی مهم، موقعیت تپ ترانسفورمرهای تغییر دهنده فاز و راهکارهای بهره برداری امن خطوط در فرمولاسیون OPF گنجانده شده اند. این روش هنوز باید بر روی سیستم های بزرگ آزمایش شود تا اعتبار آن تایید شود.

در سال ۱۹۸۶ مومو<sup>۴۱</sup> [30] تکنیک برنامه ریزی غیر خطی ارائه داد که شرایط کان تا کر توسعه یافته (EKT) را با استفاده از یک الگوریتم ساده مشابه SM (یک روش حساسیت تعمیم یافته با استفاده از مشتق گیری و یا مقادیر ویژه) برآورده می کرد. مدل سیستم قدرت استفاده شده در این روش درجه دو بود و بر روی سیستم ۱۱۸ شینه آزمایش شد. به هر حال آزمایشهای محدود بر روی الگوریتم انجام شد و دقت نتایج بدست آمده برای سیستم تحت مطالعه مورد تایید و ضمانت قرار گرفته است. تکنیک برنامه ریزی پراکندگی در این روش استفاده نشده اما برای دستیابی به نتایج بهتر قابل استفاده است.

در سال ۱۹۸۷ لین<sup>۴۲</sup> [31] روش پخش بار اقتصادی زمان واقعی را ارائه داد که براساس فاکتورهای جریمه بدست آمده در حل اساسی، بود. این روش بر روی سیستم ۱۴ شینه آزمایش شد تا ویژگی های الگوریتم نمایش داده شود. در یک پخش بار اقتصادی کلاسیک ضرایب لاگرانژ با محاسبه فاکتورهای جریمه به کار گرفته شده و طی دو مرحله بدست می آیند: مرحله اول: حل مسئله اولیه (مقادیر اولیه) - مرحله دوم: استفاده کردن از حل مرحله اول به عنوان ورودی. این روش از فرمولبندی پخش اقتصادی مقید شده به پیشامدهای احتمالی استفاده نکرده و مدل بار در این روش خطی نبوده ولی می تواند تصادفی<sup>۴۳</sup> باشد.

در سال ۱۹۸۹ رن<sup>۴۴</sup> [32] الگوریتم بهینه سازی ولتاژ را با استفاده از روش شبه نیوتن با خصوصیات همگرایی یکسان مثل روش هن پاول<sup>۴۵</sup> ارائه داد. این روش مشخص می کند که چه قیودی فعال و چه قیودی غیر فعال هستند. این روش در عمل به یک سیستم آزمایشی ۴۱ شینه محدود شده و تقریب نامناسب از ضرایب لاگرانژ ممکن است منجر به نتایج نادرستی شود. در ضمن مطالعات مقایسه ای و تحلیل انتشار حساسیت به طور کامل انجام نشده است. الگوریتم شامل تپ ترانسفورماتورها در فرمولاسیون نبوده و طرح بهینه سازی شامل جریان بار به عنوان یک قید نیست. این روش توانایی بدست آوردن یک جواب بهینه، برای یک نقطه شروع اولیه غیر عملی را دارد.

در سال ۱۹۸۹ حبیب الله زاده<sup>۴۶</sup> [33] الگوریتمی را ارائه داد که از روش دوم زوتندیک<sup>۴۷</sup> برای حل مسائل بهینه سازی غیر خطی استفاده می کرد. در این روش از خصوصیات پراکندگی و ساختار شبکه ای قیود جهت بالا بردن سرعت همگرایی حل و از روش تانژانت های موازی برای بالا بردن سرعت همگرایی تکنیک غیر خطی استفاده شده است. این روش قابلیت حصول به جواب بهینه، حتی با نقطه شروع غیر بهینه را دارد و در مورد قیدهای خطی و غیر خطی قابل اجرا می باشد. این روش روی سیستم های ۵ شینه و ۳۹ شینه و ۱۱۸ شینه آزمایش شده است. ویژگیهای روش عبارتند از: اولاً وجوب جواب تعیین شده است و ثانیاً بهینه سازی در دو مرحله اجرا می شود. در مرحله اول با استفاده از روس تقریب خطی تکه ای از منحنی های تولید نیروگاههای حرارتی جواب بهینه بدست آمده و در مرحله دوم با استفاده از تابع هدف غیر خطی (با تقریب درجه دوم منحنی هزینه تولید) جواب بهبود می یابد. به دلیل کد گذاری

<sup>41</sup> Momoh

<sup>42</sup> Lin

<sup>43</sup> Stochastic

<sup>44</sup> Rehn

<sup>45</sup> Han-Powell

<sup>46</sup> Habibollahzadeh

<sup>47</sup> Zoutendik

پراکندگی ها، زمان پردازش کاهش می یابد. نویسندگان مدعی هستند این روش در مقایسه با روش برنامه ریزی خطی بهتر بوده ولی به هر حال، زمان مورد نیاز برای تحلیل با افزایش اندازه سیستم افزایش یافته و با توجه به اینکه بهینه سازی حول نقطه کار صورت می گیرد و انحراف از نقاط کار ممکن است منجر به بروز مشکلاتی شود.

در سال ۱۹۸۹ پونراجا و گالینا<sup>۴۸</sup> [34] روش پیوسته ای<sup>۴۹</sup> را ارائه دادند تا مشکلات برنامه نویسی غیر خطی در جهت بهینه سازی را حل کنند. در این روش برای بهینه نمودن مسئله از تابع هزینه سوخت که یک تابع هدف درجه دو با قیدهای خطی می باشد استفاده شده است. این روش بر روی سیستمهای ۳۰، ۱۰، ۶، ۱۸ و ۱۱۸ شینه آزمایش شده است. روش پونراجا فقط یک ابزار محک برای تحقیقات بوده و روش تصحیح کننده تخمینگر مورد استفاده در آن موجب مشکلاتی در همگرایی حل می شود. نویسندگان تصریح می کنند که این روش سریع تر از روشهایی است که به روشهای رهگشا یا روش های تشخیص وجوب جواب مشهورند. این روش قابلیت وارد نمودن تغییرات بار و حساسیت را نیز دارد.

در سال ۱۹۹۹ جرال د لیت تورس و کویینتان<sup>۵۰</sup> [35] روش برنامه ریزی غیر خطی مکمل (NCP)<sup>۵۱</sup> را برای حل مسائل غیر خطی پخش بار ارائه کردند که بوسیله روش نیوتن حل می شود. جهت فرمولبندی مجدد مسئله پخش بار به شکل معادلات غیر خطی، تابع  $\varphi_M : R^2 \rightarrow R$  تعریف شده است. که باید دارای خواص زیر باشد:

$$\varphi_M(a, b) = 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$$

که برای هر  $\mu > 0$  داریم:  $a.b = \mu$

در واقع تفاوت اصلی این روش با IP این است که برخلاف روش IP، که در آن زیر مجموعه متغیرها باید نامنفی باشند و این شرط در هر بار تکرار باید چک شود، در این روش با تعریف تابع  $\varphi_M(a, b)$  با خواص مذکور، دیگر به این مرحله نیازی نیست. این روش بر روی سیستم های مشهور ۳۰، ۵۷، ۱۱۸، ۳۰۰ شینه IEEE و حتی بر روی مدل تقلیل یافته شبکه قدرت برزیل با ۲۰۹۸ شین آزمایش شده و نتایج عددی نمایانگر کارآمدی روش بوده است. این روش حتی با روش قدرتمند IP نیز مقایسه شده که نتایج نشان دهنده کاهش زمان محاسباتی در مقایسه با این روش بوده است.

#### ۴- نتیجه گیری

همگرایی روش برنامه ریزی خطی (LP) تضمین شده نیست و در صورت انتخاب یک نقطه اولیه نامناسب ممکن است واگرا شده و یا اینکه حل بدست آمده یک حل بهینه نباشد. با توجه به غیر خطی بودن معادلات پخش بار، در این روش نیاز به خطی سازی معادلات داریم که منجر به افزایش زمان حل می شود. روش LP برای سیستمهای عملی با تعداد شین زیاد مناسب نمی باشد.

روش برنامه ریزی غیر خطی جزو اولین روشهایی است که با مدلهای فیزیکی شبکه های قدرت هماهنگ شده و می تواند محاسبات را برای سیستمهای قدرت با تعداد شین نسبتاً زیاد انجام دهد. البته با توجه به محدودیت تعداد قیود قابل اجرا و لزوم استفاده از یک نقطه اولیه عملی و زمان محاسبات (عاملی که در استفاده حین کار بسیار مهم است)، در سالهای اخیر گرایش به سمت سایر روشهای حل، بخصوص روش نقطه یابی درونی (IP) بوده که این مطلب باعث شده در سالهای اخیر تحقیقات کمتری درباره این دو روش انجام شود و تمرکز روی روشهای قدرتمندتر باشد. این روشها که عموماً بر پایه روش برنامه ریزی غیرخطی هستند، در قسمت دوم مقاله مورد بررسی قرار گرفته اند.

#### ۵- مراجع

- [1] M. Huneault, F.D. Galliana, "A Survey of the Optimal Power Flow Literature," IEEE Transaction on Power System, Vol. 6, No.2, pp. 762-770, May 1991.

<sup>48</sup> -Ponraja and Galena

<sup>49</sup> -Homotype method

<sup>50</sup> Geraldo Leite Torres and V.H. Quintana

<sup>51</sup> Nonlinear Complementarity programming

- [2] B. Stott and J. L. Marinho, "Linear programming for power system network security," IEEE Trans. On Power Apparatus and systems, Vol. PAS-95, pp. 837-848, May / June 1979.
- [3] M. A. Pai and S. R. Paranjothi, "Optimal power Flow with Security constraints using successive linear programming "A- 75455-6IEEE PES summer Meeting. San Francisco, July 1975.
- [4] J. Carpentier, "Contribution a l'etude du dispatching Economique," Bulletin de la societe Francaise des electronics, vol.3'pp.431-447'aug.1962
- [5] H.W Dommel and W.F Tinny,"optimal power flow solution,"IEEE Transactions on power Apparatus and systems, vol. PAS-87, pp. 1866, October 1968
- [6] K. Mukherjee, "Optimal power flow by linear Programming based optimization" IEEE Tran. On power Apparatus and system, 1992.
- [7] D. W Wells, " Method for Economic secure loading of power system "Proceeding of IEEE vol. 115 No. 8, pp. 606 – 614, 1968
- [8] C. M. Shen and M. A. Lavhtan. "Power system Load scheduling with security constraints using Dual Linear programming "T Proceeding of IEEE, vol .117, No.1, pp. 2117–2127, 1970
- [9] B. Stott and E. Hobson. "Power system security control calculation using Linear programming " Parts I and II, IEEE transaction on power apparatus and systems , vol , pas- 97 , pp 1713 – 1731 , 1978
- [10] B. Stott and J. L. Marinho," Linear Programming for power system network security Applications, " IEEE trans, on power Apparatus and systems, vol. Pas – 98, pp.837-848, 1979.
- [11] W. O Stadlin and D. L Fletcher, "Voltage Versus Reactive current model for dispatch and control", 'IEEE Tran .On power Apparatus and systems, vol. PAS -101, No .10, pp. 3751 – 3758, October 1982.
- [12] M.R Irving, and M.J. H. Sterling, "Economic Dispatch of active power with constraints Relaxation" IEEE Proceeding. Vol. 130, No. 4, 1983
- [13] E. Housos and Irisarri, "Real and Reactive power system security Dispatch using a variable weights optimization Method". IEEE Tran .on power Apparatus and system. Vol. PAS – 102, pp. 1260 – 1268, 1983
- [14] S. A Farghal, M.A Tantawy, M. S Abou- Hussein. S. A. Hassan and A.A Abou – slela, "A Fast Technique for power system security Assessment using sensitivity parameters of linear programming, "IEEE trans. On power Apparatus and systems, vol. PAS-103, No.5, pp. 946-953, May 1984.
- [15] R. Mato-Palomino and V.H Quintana, "A Penalty Function- Linear Programming Method for solving power system constrained Economic operation problem, "IEEE trans. On power Apparatus and system, vol. PAS – 103, pp.1414- 1442, June 1984.
- [16] R. Mota-Plomina and V.H. Quintana, "Sparse Reactive power scheduling by a penalty–Function–Linear–Programming Technique,"IEEE Tran sanction on power system vol. PWRS – 1, No.3, pp. 31-39, 1986.
- [17] M. Santos-Neito, V.H. Quintana, "Linear Reactive power studies for Longitudinal power systems", 9th PSCC conference, pp 783-787 1987
- [18] C M Shen and M .A Laughton," Determination optimal power Flow operation conditions" proceeding of IEEE vol.116, No.2, pp.225-239 1969
- [19] A.H El Abiad, and F.J Jaimes,"A Method for Optimum Scheduling of Power and voltage magnitude" IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol.PAS-88 NO.4, pp. 413-422, April 1969.

- [20] Albert M. Sasson, "Combined use of parallel and Fletcher-Powell Non-linear programming method for optimal load flows" IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol.PAS-88, NO. 10, pp. 1530-1537, October 1969.
- [21] Albert M. Sasson, "Decomposition technique Applied to the Non-linear Programming Optimal Load Flow Method" IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol.PAS-89, NO.1, pp. 78-82, January 1970.
- [22] A.M Sasson, F. Aboytes, "Optimal load flow solution using the Hessian Matrix" IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol.PAS-92, pp. 31-41, 1973.
- [23] O. Alsac and B. Stort, "Optimal Load Flow with Steady State Security," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS – 93, pp. 745-754, 1974.
- [24] R. Billinton, S.S. Sachdeva, "Optimal Real and Reactive Power Operation in a Hydro–thermal System", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS–91, pp.1411, July/August 1972.
- [25] W.R Barcelo, W.W Emmon and H.R Koen, "Optimization of the Real–Time Dispatch with Constraints for Secure Operation of Bulk Power Systems," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems , Vol .PAS-96, No. 3, pp. 741-757, May / June 1977.
- [26] E.C Housos and G.D Irisarri, "A Sparse Variable Metric Optimization Applied to the Solution of Power System Problems", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol .PAS 101, pp. 195–202, January 1982.
- [27] R.R Shoults, D.T Sun, "Optimal Power Flow Based on P-Q Decomposition ", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS–101, pp.397–405, February 1982.
- [28] R. Divi and H.K Kesavan, "A shifted Penalty Function Approach for Optimal Power Flow", IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1982.
- [29] S.N. Talukdar, T .C Giras and V .K Kalyan, "Decompositions for Optimal Power Flows," IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS–102, No.12, pp.3877- 3884, December 1983.
- [30] J .A Momoh, "A generalized Quadratic –Based Model for Optimal Power Flow. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics 1986.
- [31] C.E Line Y.Y Hong and C.C Chuko, "Real–Time Fast Economic Dispatch," IEEE Transaction on Power Systems, Vol PWRS –2, No.4, pp. 968-972, November 1987
- [32] C.J. Rehn, J.A Bubenko and D. Sjølvgven, "Voltage Optimization Using Augmented Lagrangian functions and Quasi-Newton Techniques," IEEE Transaction on Power Systems .Vol-PWRS–4, No.4, pp.1470-1483, December, 1989.
- [33] H. Habiabollahzadeh, G. X Luo, and A.Semlyen. "Hydrothermal Optimal Power Flow Based on a Combined Linear and Non-Linear Programming Methodology," IEEE Transaction on Power Systems, Vol. PWRS –4, NO, 2 pp. 530-537, May 1989.
- [34] R.A Ponrajah and F.D Galiana, " The Minimum Cost Optimal Power Flow Problem Solved via the Restart Homotopy Continuation Method ", IEEE .Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol .PAS–93 pp.1640 – 1649, 1974.
- [35] G.L. Torres, V.H. Quintana, "Optimal Power Flow by a Nonlinear Complementarity Method", IEEE Transaction on Power Systems, 1999.