

## کاهش اثر بایاس در الگوریتم فیلتر های وقفی با پاسخ ضربه نامحدود

محمد علی مسندی

امید مهدی یار، حمید کیوانی

بخش برق دانشکده مهندسی شیراز

بخش برق دانشگاه آزاد اسلامی. واحد کازرون

Amir – mahdiyar @ yahoo.com

**چکیده:** دو الگوریتم مهم در فیلتر های وقفی با پاسخ ضربه نامحدود (IIR)<sup>1</sup>، روشهای OE<sup>2</sup> و EE<sup>3</sup> می باشد که روش EE علی رغم آنکه دارای یک مینیمم محلی است، در حضور نویز دارای مقداری با یاس می باشد [1,2]. جهت کاهش با یاس در EE در سال ۱۹۹۵ روشی به نام QCEE<sup>4</sup> ارائه شده است [3] که تا حدودی باعث برطرف شدن بایاس می گردد. ضمن اینکه این روش دارای محاسبات بسیار زیادی می باشد، در این مقاله با بکارگیری روشی بنام CNC<sup>5</sup> و شبیه سازی آن روی یک فیلتر مرتبه دوم، نشان داده می شود که روش مذکور نسبت به QCEE دارای محاسبات راحت تر، بایاس کمتر و نیز سرعت همگرایی بیشتری می باشد.

**کلمات کلیدی:** فیلتر های وقفی IIR، بایاس، EE، QCEE، CNC

### ۱- مقدمه:

فیلتر های وقفی با پاسخ ضربه نامحدود اصولاً به فیلتر هایی گفته می شود که دارای قطب هستند، جهت کاهش خطا در اینگونه فیلترها دو روش EE و OE ارائه می گردد. روش OE که مبتنی بر فیدبک می باشد دارای مینیمم های محلی است و این باعث می شود فیلتر به سمت نقطه ای غیر از بهینه همگرا شود. روش دوم (EE) مبتنی بر فیدبک نمی باشد دارای یک مینیمم محلی است اما در حضور نویز دچار مقداری بایاس می گردد [1,2] روشهای متعددی جهت برطرف کردن این بایاس ارائه شده است که یکی از متداول ترین روشها QCEE می باشد [3] که تا حد قابل

---

- Infinite Impulse Response

- Output Error

- Equation Error

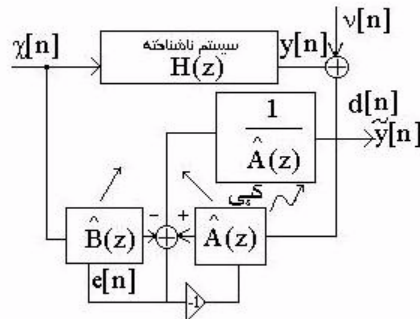
- Quadratically Constrained Equation Error

- Constant Norm Constraint

ملاحظه ای باعث کاهش بایاس می گردد ، اما نیاز به محاسبات طولانی و پیچیده دارد . در این مقاله با بررسی روشی با عنوان CNC که یکی از الگوریتم های کاهش بایاس در مورد EE محسوب می گردد [4,5] نشان داده می شود که این روش در مقایسه با روشهای EE, QCEE, دارای محاسبات ساده تر ، سرعت همگرایی بیشتر و مقدار بایاس کمتری است.

## ۲- فرمول بندی روش EE [1,2] :

شکل ۱- بلوک دیاگرام یک فیلتر وقتی با الگوریتم EE را نشان می دهد :



شکل ۱- بلوک دیاگرام فیلتر وقتی IIR مبتنی بر الگوریتم EE

X [n] ورودی با میانگین صفر برای سیستم ناشناخته <sup>۱</sup> H(z) محسوب می گردد که :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^K b_k z^{-k}}{\sum_{\ell=0}^L a_{\ell} z^{-\ell}} \quad ( )$$

y [n] خروجی این سیستم از رابطه زیر بدست می آید :

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left( \sum_{k=0}^K b_k x[n-k] - \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} y[n-\ell] \right) \quad ( )$$

که در حالت عمومی  $a_0=1$  فرض می گردد . سیگنال خواسته از رابطه زیر بدست می آید :

$$d[n] = y[n] + v[n] \quad ( )$$

که در آن  $v[n]$  یک نویز سفید با واریانس  $\sigma_v$  می باشد. اصولاً یک فیلتر وقتی IIR ضرایب سیستم ناشناخته  $\hat{H}(z)$  را تخمین می زند .

$$\hat{H}(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^K \hat{b}_k z^{-k}}{\sum_{\ell=0}^L \hat{a}_{\ell} z^{-\ell}} \quad ( )$$

در آن  $\hat{a}_{\ell}$  و  $\hat{b}_k$  ضرایب فیلتر وقتی می باشند که بر حسب تخمینی از  $a_{\ell}$  و  $b_k$  بدست می آیند .

$\hat{A}(z)$  و  $\hat{B}(z)$  فیلترهای وقتی با پاسخ ضربه محدود<sup>۱</sup> (FIR) با خروجی های به ترتیب  $u[n]$ ,  $w[n]$  می باشند و داریم :

<sup>1</sup> Desired signal

$$\omega[n] = \hat{a}^T d[n] \quad (5)$$

$$u[n] = \hat{b}^T \chi[n] \quad (6)$$

که:  $\hat{a}^T = [\hat{a}_0 \dots \hat{a}_L]$  و  $\hat{b}^T = [\hat{b}_0 \dots \hat{b}_K]$  و  $d[n] = [d[n] \dots d[n-L]]$  و  $\chi[n] = [\chi[n] \dots \chi[n-K]]$  می باشد. بنابراین خطا در روش EE از رابطه زیر بدست می آید:

$$e[n] = \omega[n] - u[n] \quad (7)$$

## ۲-۱- خطای میانگین مربعات برای EE (MSEE) [1,2]:

با توجه به وجود نویز خطای میانگین مربعات از رابطه (۸) بدست می آید.

$$MSEE = E[e^2[n]] = E[e^2[n]] + \sigma_v^2 E\left[1 + \sum_{i=1}^L \hat{a}_i^2\right] \quad (8)$$

که در آن  $e_s[n]$  خطای بدون نویز و برابر  $\hat{a}^T y[n] - \hat{b}^T \chi[n]$  می باشد. جمله دوم از رابطه (۸) که خواسته ما نیز نمی باشد تابعی از نرم  $\hat{a}$  بوده و بایاس به حساب می آید و این ناشی از توان متوسط نویز  $\sigma_v^2$  می باشد. که در ادامه به بررسی روشهای حذف این بایاس خواهیم پرداخت.

## ۳- فرمول بندی روش QCEE [3]:

روش QCEE در سال ۱۹۹۵ توسط T.chan و C.ho جهت کاهش بایاس موجود در روش EE که در حضور نویز ایجاد می گردد ارائه شد. در این روش خطای میانگین مربعات از رابطه (۹) حاصل می گردد:

$$MSEE = E \left\{ \left( \hat{a}^T [n] d[n] - \hat{b}^T [n] \chi[n] \right)^2 \right\} + \eta \left( \hat{a}^T [n] \hat{a}[n] - 1 \right) \quad (9)$$

در این روش تنظیم ضرایب بگونه ایست که داشته باشیم:

$$\hat{a}^T [n] \hat{a}[n] = 1 \quad (10)$$

اجزای رابطه (۹) عبارتند از:

$$\hat{a}[n] = (R_{dd} + \eta I)^{-1} r_{do} \quad (11)$$

$$\hat{a}[n] = (I + \eta R_{dd}^{-1})^{-1} R_{dd}^{-1} r_{do} \quad (12)$$

$$\hat{a}[n] = (I + \eta R_{dd}^{-1})^{-1} R_{dd}^{-1} r_{do} \quad (13)$$

که در آن  $\eta$  ضریب لاگرانژ<sup>۱</sup>،  $R_{dd} = E[d[n]d^T[n]]$ ،  $R_{dd} = E[\chi[n]\chi^T[n]]$ ،  $R_{dx} = E[d[n]\chi^T[n]]$ ،  $r_{dx} = E[u[n]\chi[n]]$  و  $u[n] = \hat{b}^T[n]\chi[n]$  می باشد.

در شبیه سازی و مقایسه ای که این روش با روش CNC می گردد خواهیم دید که سرعت همگرایی این الگوریتم نسبت به CNC کمتر بوده و نیز بایاس توسط این روش بیشتر حذف می گردد. از طرفی روابط (۹) الی (۱۳) نشان می دهد محاسبات روش QCEE زیاد می باشند.

#### ۴- فرمول بندی روش CNC [4,5]:

با توجه به رابطه (۸) در روش CNC داریم:

$$\left[1 + \sum_{\ell=1}^L \hat{a}_{\ell}^2\right] = c \quad (14)$$

و خطای میانگین مربعات در این حالت بصورت زیر در می آید:

$$MSEE = E[e^2[n]] + c\sigma_v^2 \quad (15)$$

همانطور که دیده می شود جمله  $c\sigma_v^2$  مقداری ثابت است و با حل بهینه QCEE تفاوت دارد. حل بهینه در روش CNC مینیمم کردن رابطه (۱۴) می باشد. تابع هدف این رابطه بوسیله روش CNC و ضریب لاگرانژ  $\eta$  چنین بدست می آید:

$$J = E[e^2[n]] + \eta \left( c - \hat{a}^T \hat{a} \right) \quad (16)$$

هدف در این روش تنظیم ضرایب  $\hat{a}$ ،  $\hat{b}$  و  $\eta$  بگونه ایست که J به سمت صفر میل کند از این رو داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{a}} = R_{dd} \hat{a} - R_{dx} \hat{b} - \eta \hat{a} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{b}} = -R_{dx} \hat{a} + R_{xx} \hat{b} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = c - \hat{a}^T \hat{a} = 0 \quad (19)$$

از ترکیب روابط (۱۷) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$(R_{dd} - R_{dx} R_{xx}^{-1} R_{dx}^T) \hat{a} = \eta \hat{a} \quad (20)$$

بردار دلخواه و ستونی P را چنانچه در نظری می گیریم که داشته باشیم:  $P^T \hat{a} \neq 0$  از این رو مقدار  $\eta$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$\eta = \frac{P^T (R_{dd} - R_{dx} R_{xx}^{-1} R_{dx}^T) \hat{a}}{P^T \hat{a}} \quad (21)$$

اگر داشته باشیم  $f = R_{dd} \hat{a} - R_{dx} \hat{b}$  آنگاه خواهیم داشت:

$$\eta = \frac{P^T f}{P^T \hat{a}} \quad (22)$$

که بردار P را بردار غربالی<sup>۱</sup> [5] می نامیم . و  $\eta$  برابر توان نویز  $\sigma_v^2$  می باشد . با بکار گیری روابط قبلی مقدار f از رابطه (۲۳) بدست می آید :

$$\begin{aligned} f &= d[n] \left\{ d^T[n] \hat{a}[n] - \chi^T[n] \hat{b}[n] \right\} \\ &= e[n] d[n] \end{aligned} \quad (23)$$

و بر این اساس خواهیم داشت :

$$\lambda = e[n] \frac{P^T d[n]}{P^T \hat{a}[n]} \quad (24)$$

بنابراین روابط (۱۷) و (۱۸) بصورت زیر در می آید :

$$\frac{\partial J[n]}{\partial \hat{a}[n]} = e[n] d[n] - e[n] \frac{P^T d[n]}{P^T \hat{a}[n]} \hat{a}[n] \quad (25)$$

$$\frac{\partial J[n]}{\partial \hat{b}[n]} = -e[n] \chi[n] \quad (26)$$

از اینرو روابط باز گشتی چنین بدست می آید :

$$\begin{aligned} \hat{a}[n+1] &= \hat{a}[n] - \mu \frac{\partial J[n]}{\partial \hat{a}[n]} \\ &= \hat{a}[n] - \mu e[n] \left\{ d[n] - \frac{P^T d[n]}{P^T \hat{a}[n]} \hat{a}[n] \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

و

$$\begin{aligned} \hat{b}[n+1] &= \hat{b}[n] - \mu \frac{\partial J[n]}{\partial \hat{b}[n]} \\ &= \hat{b}[n] + \mu e[n] \chi[n] \end{aligned} \quad (28)$$

با انتخاب مناسب بردار ستونی P و رسیدن به نقطه ایستان رابطه (۱۹) مینیمم می گردد . وقتی که  $\hat{a}[n]$  به  $\hat{a}$

همگرا می شود ، خواهیم داشت:  $c = \hat{a}^T \hat{a}$

#### ۴-۱- تحلیل نقاط ایستان :

چنانچه از رابطه (۲۷) میانگین آماری بگیریم خواهیم داشت :

$$E(\hat{a}[n+1]) = E(\hat{a}[n]) - \mu E(e[n]d[n]) + \mu \sigma_v^2 E(\hat{a}[n]) \quad (29)$$

$$E(\hat{a}[n+1]) = E(\hat{a}[n]) - \mu E(e_s[n]y[n]) \quad (30)$$

همانطور که دیده می شود در رابطه (30) هیچ گونه اثری از نویز نیست . در حالت دائمی و وقتی به نقطه ایستادن رسیدیم داریم :

$$E(e_s[n]y[n]) = 0 \quad (31)$$

و در این در حالیکه در روش EE خواهیم داشت :

$$E(e_s[n]y[n]) = -\sigma_v^2 E(\hat{a}[n]) \quad (32)$$

و این نتیجه مهم حاصل بکارگیری روش CNC است .

## ۲-۴) تحلیل عددی مسئله :

در روابط مربوطه به روش CNC بردار ستونی  $p$  بایستی در شرط  $P^T \hat{a}[n] \neq 0$  صدق کند [5]: در این بخش با بررسی دو مقدار مختلف از بردار ستونی  $P$  طی دو مثال مختلف مشخصه رفتاری این الگوریتم را بررسی می کنیم و در بخش بعد با شبیه سازی کامپیوتری مطالعات دقیق تری روی این الگوریتم انجام خواهیم داد .

مقدار عددی یک : فرض کنید داشته باشیم  $P = \hat{a}[n]$  در این صورت  $\hat{a}^T[n]\hat{a}[n] > 0$  خواهد بود و  $\eta$  طبق معادله (22) برابر  $\eta = e[n]\omega[n]/\hat{a}^T[n]\hat{a}[n]$  می گردد . و از معادله (27) خواهیم داشت :

$$\hat{a}[n+1] = \hat{a}[n] - \mu e[n] \left\{ d[n] - \frac{\omega d[n]}{q[n]} \hat{a}[n] \right\} \quad ( )$$

و از معادله (28) داریم :

$$\hat{b}[n+1] = \hat{b}[n] + \mu e[n] \chi[n] \quad ( )$$

که در آن  $q[n] = \hat{a}^T[n]\hat{a}[n]$  بوده و از آنجا :

$$\hat{a}^T[n+1]\hat{a}[n+1] = \hat{a}^T[n]\hat{a}[n] + Q(\mu^2) \quad ( )$$

$Q(\mu^2)$  نشان می دهد که جملات با مرتبه  $\mu^2$  یا بیشتر هستند و محاسبه  $q[n]$  در هر تکرار تنها به مقدار  $Q(\mu^2)$  وابسته است .

مقدار عددی ۲: فرض کنید داشته باشیم  $P^T = [1 \ 0 \dots \ 0]$  آنگاه داریم :  $P^T \hat{a}[n] = \hat{a}_0[n]$  و  $\hat{a}_0[n]$  اغلب دارای مقدار واحد می باشد و خواهیم داشت :

$$\hat{a}[n+1] = \hat{a}[n] - \mu e[n] \{ d[n] - d[n]\hat{a}[n] \} \quad ( )$$

نتیجه مقادیر عددی بالا در بخش بعد شبیه سازی شده است .

## ۵- نتایج شبیه سازی :

در این بخش روشهای EE، QCEE و دو مقدار عددی از روش CNC شبیه سازی شده است . در این شبیه سازی سیستم ناشناخته  $H(z)$  یک سیستم مرتبه دوم بصورت زیر در نظر گرفته شده است :

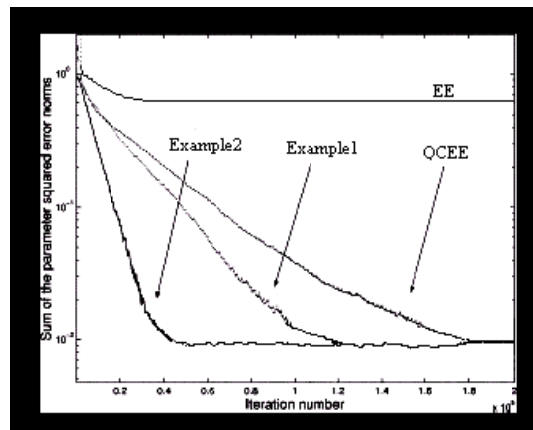
$$H(z) = k \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \quad (37)$$

که همانطور که دیده می شود سیستم مذکور دارای یک صفر در  $Z=0.5$  و دو قطب در  $z = \sqrt{0.5} \angle \pm 45^\circ$  می باشد . در این مثال بهره  $k$  برابر  $k=0.8465$  انتخاب شده است . نسبت سیگنال به نویز از رابطه زیر بدست می آید :

$$SNR = 10 \log(E[y^2[n]] / E[v^2[n]]) \quad (38)$$

در این مثال داریم :  $SNR=10\text{db}$

نتایج این شبیه سازی کامپیوتری که توسط نرم افزار MATLAB صورت گرفته است در شکل (۲) دیده می شود . در این شکل نتایج همگرایی روشهای EE و QCEE [3] با روش CNC که طی مقادیر عددی انجام شده است با هم مقایسه شده است . همان طور که ملاحظه می شود منحنی مربوط به روش QCEE نسبت به EE دارای سرعت همگرایی بیشتر و نیز از نقطه نظر بایاس وضعیت به مراتب بهتری می باشد . در این شکل همچنین نتیجه شبیه سازی مقادیر یک و دو در مقایسه با منحنی رفتاری EE و QCEE ترسیم شده است.



شکل ۲- نتایج شبیه سازی کامپیوتری

همانطور که دیده می شود سرعت همگرایی الگوریتم CNC نسبت به QCEE بیشتر بوده و این الگوریتم نسبت به QCEE بهتر توانسته است با یاس را کاهش دهد .

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله روشهای EE و QCEE و CNC با هم مقایسه شدند. همانطور که ملاحظه گردید روش Constant \_ Norm Constraint یک تابع هدف جدید را جهت مینیمم کردن خطا بررسی می کند. در این الگوریتم با بکار گیری بردار ستونی P و انتساب یک مقدار انتخابی به آن، الگوریتم فرمول بندی می شود. الگوریتم CNC از نظر رفتاری نسبت به EE و QCEE در سرعت همگرایی و صحت تخمین، عملکرد به مراتب بهتری دارد. ضمن اینکه الگوریتم فوق از نقطه نظر محاسبات دارای ساختار ساده تری می باشد. البته رفتار این الگوریتم در حالت گذرا نیاز به مطالعه بیشتری دارد.

## ۷) مراجع

- [1] J.Jshynk, "Adaptive IIR Filtering," IEEE Acoustics, speech, signal Processing magazine, vol.6, no.2, pp.4-21, Apr.1989 .
- [2] C.R Johnson, Jr., "Adaptive IIR Filtering: current result and open issues," IEEE Trans.inform.Theory, vol.IT-30, no.2, pp.237-250, mar.1984.
- [3] K.C.Ho and Y.T chan "Bias removal in equation – error adaptive IIR Filtering," IEEE Trans. signal Processing, vol.43, PP.51-62, Jan1995.
- [4] H.N.Kim and W.J.song "Unbiased equation – error adaptive IIR Filtering based on Monic normalization," IEEE signal processing Lett., Vol., no2, pp.35-37, feb.1999.
- [5] W.J.Song and H.C.Shin "Bias-Free Adaptive IIR Filtering," IEEE 2000.