

ارائه یک الگوریتم مش‌بندی با قابلیت تعیین دقت ناهمگن در حل مسائل الکترومغناطیس به روش عناصر محدود

دکتر جلیل راشد محصل
دانشکده فنی، دانشگاه تهران
jrashed@ut.ac.ir

امیر صفائی
دانشکده فنی، دانشگاه زنجان
a.safaei@mail.znu.ac.ir

چکیده:

یکی از روش‌های عددی در حل معادلات لاپلاس و پواسون در الکترومغناطیس مهندسی، روش عنصر محدود^۱ می‌باشد. این روش را می‌توان برای فضاهای ۲ یا ۳ بعدی به کار گرفت و یکی از مراحل اساسی و زمان‌بر این روش، تقسیم‌بندی اشکال نامنتظم به عناصر مربعی و مثلثی می‌باشد. با افزایش تعداد عناصر در یک زیرناحیه مشخص از ناحیه مورد بررسی، می‌توان دقت جواب را در آن ناحیه افزایش داد که این خود نیاز به انعطاف‌پذیری الگوریتم مش‌بندی دارد.

واژه‌های کلیدی: عنصر محدود، مش، زیرناحیه^۲، شماره گذاری محلی، نواحی ناهمگن

۱. مقدمه

در این مقاله پس از تقسیم‌بندی مراحل حل مسئله به روش مذکور، الگوریتمی برای تولید مش‌هایی در اشکال نامنتظم ۲ بعدی و با قابلیت تعیین تراکم عناصر جهت به دست آوردن مشی ناهمگن ارائه می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی که در محیط VB^3 انجام گرفته، در انتهای مقاله آورده شده است. محوریت مقاله بر روی مش‌بندی مثلثی در ۲ بعد می‌باشد که می‌توان آنرا به مش‌بندی مربعی و یا در فضای ۳ بعدی تعمیم داد.

به کارگیری روش‌های کامپیوتری جهت حل مسائلی که در زمینه‌های الکتروستاتیک مطرح می‌شوند، بایستی دارای الگوریتمی بهینه شده و دقیق باشند. چراکه فرآیند تحلیل اینگونه مسائل توسط کامپیوتر دارای روشی متفاوت از روش‌های حل دستی آنهاست. این روش‌ها که غالباً بر مبنای ماتریس‌ها بنا نهاده شده‌اند، در اغلب موارد به ماتریس‌هایی

-
1. Finite Element
 2. Sub Region
 3. Visual Basic

با ابعاد بزرگ منجر می‌شوند و چون در مراحل متعددی از این ماتریس‌ها استفاده می‌گردد، می‌تواند زمان دریافت نتیجه نهایی را حتی در کامپیوترهای سریع امروزی افزایش دهد. روش عنصر محدود نیز که بر پایه تشکیل ماتریس‌ها کار می‌کند، این مزیت را دارد که می‌تواند شامل مسائلی با نواحی حل ناهمگن باشد. این روش را می‌توان به چهار مرحله اصلی تقسیم‌بندی کرد:

الف) تجزیه شکل به نواحی کوچکتر (عناصر)،

ب) استخراج معادلات حاکم بر هر زیر ناحیه،

ج) کنارهم قراردادن این عناصر در ناحیه اصلی،

د) حل دستگاه معادلات به دست آمده.

اساس کاهش زمان تحلیل را باید در مرحله اول جستجو کرد، چرا که مراحل دیگر پیرو این مرحله بوده و هر مرحله از نتایج مرحله قبل استفاده می‌کند. همچنین این مراحل شامل معادلاتی هستند که توسط روش عنصر محدود اعمال می‌شوند و در بهینه سازی کل فرآیند تأثیر بسزایی دارند.

۲. روش تولید مش:

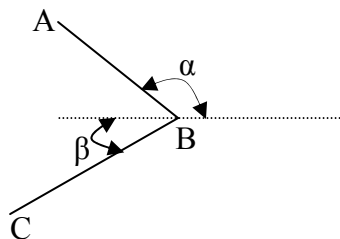
در این قسمت روش تولید مش در حل معادلات لاپلاس مورد بررسی قرار می‌گیرد. [1] شرایط مرزی حاکم بر ناحیه توسط مسئله مشخص می‌باشند. نقاط دلخواهی روی مرز در نظر گرفته می‌شوند، به طوریکه چند ضلعی‌ای که درون ناحیه محاط می‌شود، بتواند با دقت مورد نظر، ناحیه دلخواه را تقریب بزند. در مرحله اول این چند ضلعی را به زیر عناصر مثلثی یا مربعی شکل و یا تلفیقی از آندو تقسیم‌بندی می‌کنیم و زیرناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌نمائیم. سپس به هر رأس شماره ترتیبی یکتائی نسبت می‌دهیم. از آنجائی که عناصر مربعی و یا مثلثی قابل تبدیل به یکدیگر هستند، کل ناحیه را به عناصر مثلثی شکل تقسیم‌بندی می‌کنیم. به هر رأس یک عنصر یا زیر ناحیه اعداد ۱ تا ۳ را به عنوان شماره‌گذاری محلی و در جهت پادساعتگرد نسبت می‌دهیم.

برای ایجاد یک مش درون این چند ضلعی دلخواه، ابتدا زوایای داخلی آنرا به ۴ دسته اصلی تقسیم‌بندی می‌کنیم: زوایای حول 90° ، 180° ، 270° و 360° .

اگر تعداد رئوس را S بنامیم، مجموع زوایای داخلی چند ضلعی عبارتست از:

$$\pi(s - 2) \quad (1-1)$$

زاویه بین دو پاره خط دلخواه مانند شکل ۱ به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:



شکل ۱- چگونگی یافتن زاویه

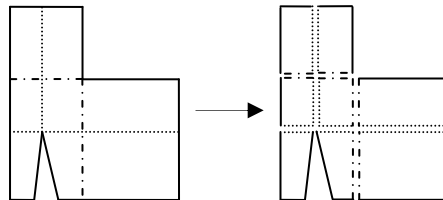
$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ \beta &= \tan^{-1} \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \end{aligned} \right\} \rightarrow \angle B = |\alpha - (\pi + \beta)| \quad (2-1)$$

باید توجه داشت که مقدار زاویه α یا β با توجه به ربعی که در آن واقع می‌شوند، تعیین می‌گردند. از این لحاظ مقدار β با π جمع شده است.

حال اگر رئیس را به ترتیب ادامه دهیم، تا به اولین رأس باز گردیم، تمام زوایای به دست آمده یا همگی زوایای داخلی و یا همگی زوایای خارجی خواهند بود، که این به جهت ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن رئیس متوالی بستگی دارد. از آنجائی که زوایای داخلی مورد توجه می‌باشند، اگر مجموع زوایای به دست آمده برابر $\pi(s+2)$ بود، تمام زوایا خارجی بوده و بایستی هر زاویه را از 360° کم کنیم. این نشان‌دهنده آنست که رئیس متوالی، ساعتگرد قرار گرفته‌اند. در این وضعیت نیاز به تعویض نامگذاری رئیس در جهت پادساعتگرد می‌باشد. اما اگر مجموع زوایا برابر $\pi(s-2)$ گردید، آنگاه زوایای داخلی محاسبه شده‌اند و توالی رئیس نیز پادساعتگرد می‌باشد.

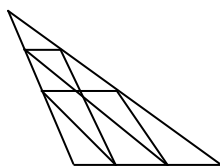
۳. نحوه ایجاد زیرنواحی:

در این مرحله، رئیس را که زوایای آنها حوالی 270° یا 360° (به عنوان مثال در بازه 210° تا 360°) است را از محل رأس تجزیه می‌کنیم. این کار بدین صورت است که دو خط متعامد به موازات محورهای مختصات دکارتی از محل رأس مورد نظر رسم می‌شوند، تا با رئیس یا اضلاع ناحیه مورد بررسی تقاطع یابند (شکل ۲). این عمل برای هر رأسی که دارای زاویه‌ای در حدود 270° تا 360° باشد، صورت می‌گیرد.



شکل ۲- تجزیه زوایا و تشکیل زیر نواحی

در این حالت شکل به زیر ناحیه‌هایی تجزیه خواهد شد که هر زیر ناحیه خود یک شکل «محدب» است. حال از یکی از رئیس هر زیرناحیه، به دیگر رئیس همان زیرناحیه خطی وصل می‌کنیم تا شکل به مثلث‌های کوچکتری تقسیم گردد. سپس برای به دست آوردن مشی با دقت بیشتر، می‌توان سه ضلع مثلثی که در ناحیه مطلوب واقع می‌شود را به n قسمت مساوی تقسیم کرد و تقسیم‌بندی‌های روی هر ضلع را به ترتیب تناظرشان به یکدیگر وصل نمود (شکل ۳). در روش عنصر محدود، هر زیر ناحیه مثلثی یک شماره محلی و یک شماره عام دارد که با به دست آوردن رئیس این زیرنواحی می‌توان شماره‌گذاری محلی را انجام داد.



شکل ۳- افزایش دقت مش در یک زیرناحیه

۴. شبیه‌سازی^۴:

از آنجائیکه روند تولید مش (بخصوص مش‌هایی با دقت بالا) برای کاربر خسته‌کننده و وقتگیر است و عدم اشتباه در آن اجتناب ناپذیر می‌باشد، لذا این فرایند به صورت یک برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی گردیده است.

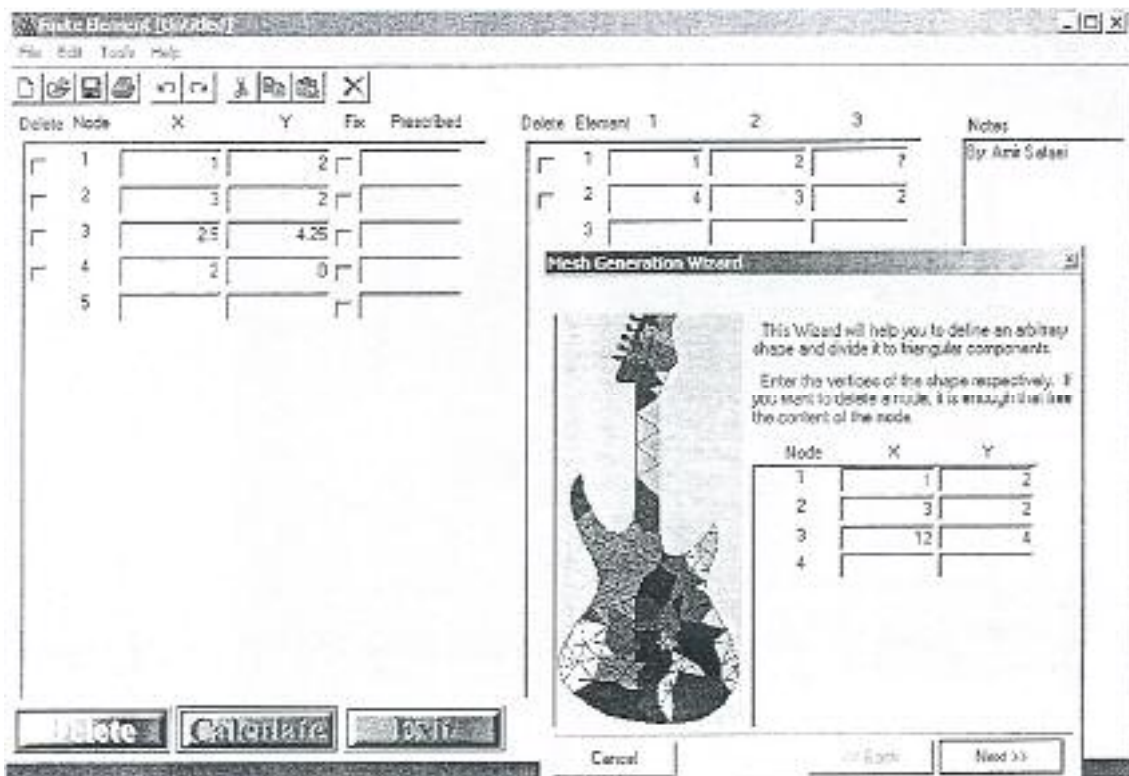
محیط برنامه‌نویسی VB برای طرح و توسعه این روش مش‌بندی به کار گرفته شده است. «رابط گرافیکی کاربر»^۵ در این برنامه به گونه‌ای طراحی گردیده که امکان ویرایش رئوس را با استفاده از یک «معجزه‌گر»^۶ به کاربر می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری:

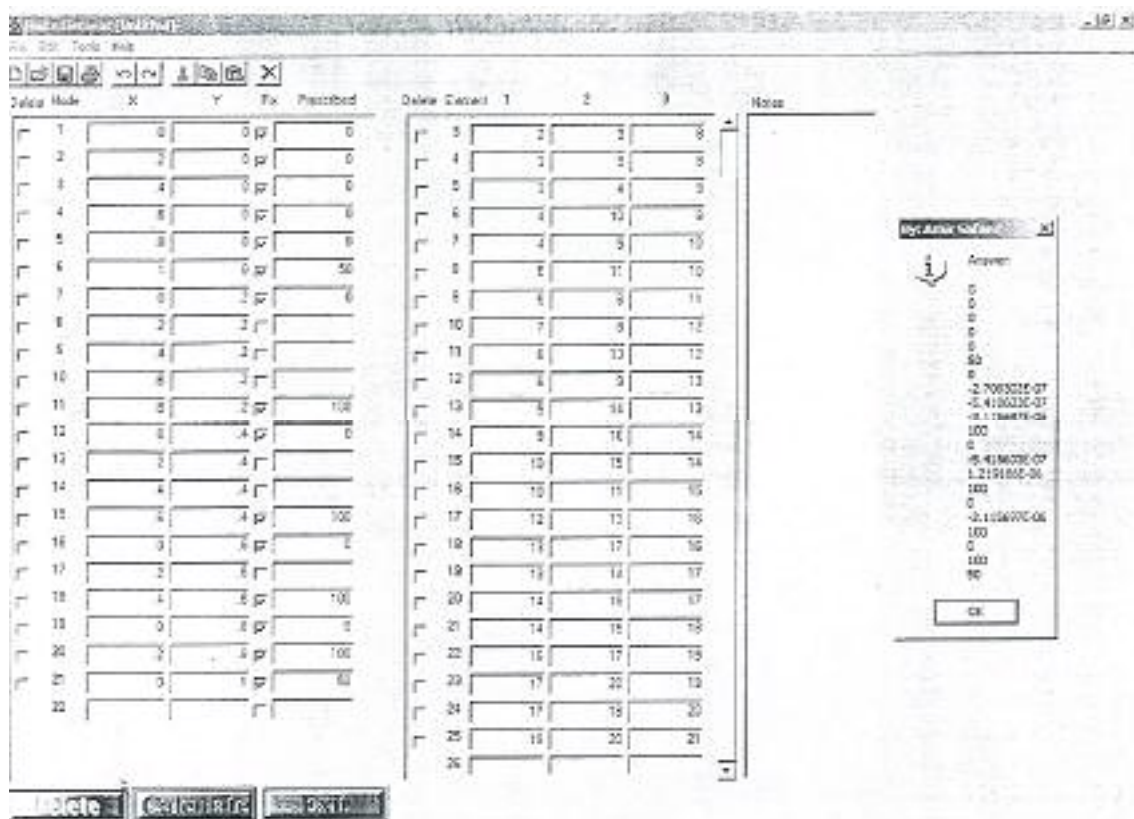
در این مقاله یک روش تولید مش جهت تقسیم‌بندی نواحی دو بعدی ارائه شد که میزان سرعت تولید مش و تقریب خوب مرزهای ناحیه نسبت به سایر روش‌های متداول از ویژگی‌های آن به شمار می‌رفت. از سوئی دیگر، با افزایش تعداد زیرنواحی در یک محدوده از ناحیه مورد بررسی، می‌توان به جوابی با دقت بالاتر در آن ناحیه خاص دست یافت. همچنین برنامه اجراکننده این الگوریتم که در محیط Visual Basic 6 طرح و توسعه داده شده است، خروجی‌هایی در حد حل معادلات به روش دیفرانسیلی ارائه می‌دهد که می‌تواند برای مسائلی که حل دستی آنها وقتگیر و پیچیده است، به کار گرفته شود.

۶. مراجع:

- [1] Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill, 1984, pp. 340-345, 436.
- [2] Buell, W. R., and Bush, B. A., "Mesh generation-A survey", *J. Eng. Ind.*, pp. 332-338, Feb. 1973.
- [3] Hoburg, J. F., and Davis, J. L., "A student-oriented finite element program for electrostatic potential problems." *IEEE Trans. Educ.*, vol. E-26, pp. 138-142, Nov. 1983.



شکل ۴- معجزه گر برنامه



شکل ۵- ورودی و خروجی برنامه