طراحی کنترل کننده مد لغزشی برای پاندول معکوس

میثم شیبانی نژاد [1]
meisamsheibani@yahoo.com

حمید ایران منش [1و2]
hiranmanesh@graduate.uk.ac.ir

سید هادی حسینی [2]
S.Hadi.Hosseini@Gmail.com

۱-گروه مهندسی برق ، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲- گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه مازندران

چکیده: عدم دقت در مدل ممکن است ناشی از عدم قطعیتهای پلان، یا به خاطر انتخاب هدف دار یک نمایش ساده شده از دینامیکهای سیستم باشد. از دیدگاه کنترلی، عدم دقت در مدلسازی را می توان به دو نوع اصلی طبقه بندی کرد: عدم قطعیتهای ساختاری و عدم قطعیتهای غیر ساختاری.نوع اول به عدم دقت در جملاتی که واقعاً در مدل هستند مربوط می شود، در حالی که نوع دوم به عدم دقت در مرتبه سیستم . یک روش ساده برای کنترل مقاوم این گونه سیستمها، روش کنترل لغزشی نامیده می شود. در این مقاله به معرفی دو روش مختلف طراحی کنترل کننده مد لغزشی پرداخته می شود. در نهایت با استفاده از روش مذکور کنترل کننده ای برای آونگ معکوس طراحی می شود.

کلمات کلیدی: کنترل کننده مد لغزشی، پاندول معکوس

۱- مقدمه:

عدم دقت در مدلسازی می تواند اثرات نامطلوب شدیدی بر سیستمهای غیر خطی بگذارد. بنابراین، هر طراحی عملی بایستی آنها را صریحاً مورد نظر قرار دهد. ساختار نوعی یک کنترل کننده مقاوم تشکیل شده است از یک قسمت اسمی، مشابه خطی سازی پسخوردی یا قانون کنترل معکوس، و جملات اضافی معطوف به، مقابله با عدم قطعیتهای مدل شده است.

یک روش ساده برای کنترل مقاوم، چیزی است که اصطلاحاً روش کنترل لغزشی نامیده می شود.اساس این روش بر این مسأله استوار است که بجای سیستمهای عمومی مرتبه $n-$ام سیستمهای مرتبه اول، (چه غیر خطی باشند چه نامعین) را کنترل کنیم. به همین خاطر، در حقیقت،ساده سازی اجازه می دهد مسائل مرتبه n- ام بامسائل مرتبه اول معادل جایگزین شوند. آنگاه می توان نشان دهیم که، برای مسائل تبدیل شده، عملکرد "کامل" می تواند در اصل با وجود بی دقتیهای دلخواه پارامتر به دست آید. اما چنین عملکردی، درازای بهای بسیار زیاد فعالیتهای کنترلی به دست می آید. این مسئله نوعاً با سایر منابع عدم قطعیت مدلسازی در تضاد است. مثلاً حضور دینامیکهای صرفنظر شده، که ممکن است فعالیتهای زیادی کنترلی را تحریک کند. این مطلب ما را به اصلاح قوانین کنترلی که، با داشتن فعالیت کنترل قابل قبول، معطوف شود با به دست آوردن مصالحه بین عملکرد ردیابی و عدم قطعیت پارامتر، سوق می دهد.

طرح کنترل کننده لغزشی، در آن دسته از سیستمهایی که قابل اعمال است، روشی قانونمند برای مسئله حفظ پایداری و عملکرد یکنواخت در روبه رویی با بی دقتیهای مدلسازی است. به علاوه، با اجازه دادن به اینکه مصالحه بین مدلسازی و عملکرد به صورت ساده ای کمی شود، می توان کل فرایند طراحی را روشن کرد[۱و۲].

۲-روشهای طراحی کنترل کننده مد لغزشی

۱-۱- روش اول

سیستم ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f_0[x] + \delta_1(x) + G(x)[u + \delta_2(x,u)] \qquad (۱)$$

که $x \in R$ حالت و $u \in R^p$ ورودی کنترل است.

فرض کنید f_0 و G معلوم و δ_1 و δ_2 جملات عدم قطعیت باشند که δ_2 عدم قطعیت سازگار و δ_1 عدم قطعیت ناسازگار است.

تغییر متغیرهای:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x)$$

سیستم را به صورت زیر می آورد.

$$\dot{\eta} = f(\eta,\xi) + \delta_\eta(\eta,\xi) \qquad (۲)$$

$$\dot{\xi} = f_a(\eta,\xi) + G_a(\eta,\xi)[u + \delta_\xi(\eta,\xi,u)] \qquad (۳)$$

ξ ورودی کنترل است می خواهیم کنترل پسخور حالت پایدار ساز $\xi = \phi(\eta)$ با شرایط $\phi(0) = 0$ را چنان بیابیم که مبدا سیستم زیر را:

$$\dot{\eta} = f(\eta,\phi(\eta)) + \delta_\eta(\eta,\phi(\eta)) \qquad (۴)$$

پایدار مجانبی نماید[۳].

در ادامه بحث کنترل مد لغزشی، متغیر (۵) $z = \xi - \phi(\eta)$ را تعریف می کنیم. واضح است با شرط z=0 داریم: $\xi = \phi(\eta)$ و متغیر η نیز به طور جانبی به سمت مبدا میل می کند.

در روش کنترل مد لغزشی مساله را اینگونه حل می کنیم: در این رویکرد، کنترل u چنان طرح می شود که z را در زمان محدودی به صفر برساند و سپس شراط z=0 را در تمامی لحظات آتی حفظ کند؛ بدین ترتیب z=0 به شکل مجموعه پایای مثبت سیستم حلقه - بسته در می آید. برای رسیدن به این هدف، معادله $\dot{z}$ را به شکل زیر:

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \phi(\dot{\eta}) = f_a(\eta,\xi) + G_a(\eta,\xi)[u + \delta_\xi(\eta,\xi,)] - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\left[f(\eta,\xi) + \delta_\eta(\eta,\xi)\right] \qquad (۶)$$

و u را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$u = u_{eq} + G_a^{-1}(\eta,\xi)\nu = G_a^{-1}(\eta,\xi)\left[-f_a(\eta,\xi) + \frac{\partial\phi}{\partial\eta} f(\eta,\xi)\right] - G_a^{-1}(\eta,\xi)\frac{\beta(\eta,\xi)}{1-k}\operatorname{sgn}(z)$$

(۷)

که ν اندکی بعد معرفی خواهد شد. u_{eq} چنان برگزیده می شود که جملات معلوم سمت راست معادله (۶) را حذف کند؛ یعنی:

$$u_{eq} = G_a^{-1}(\eta,\xi)\left[-f_a(\eta,\xi) + \frac{\partial\phi}{\partial\eta} f(\eta,\xi)\right]$$

مولفه کنترل u_{eq} را کنترل هم ارز می گویند. درغیاب عدم قطعیت با انتخاب $u=u_{eq}$ داریم: $\dot{z}=0$ که تضمین کننده بقای شرط $z=0$ در همه لحظات است.

$$\dot{z} = \upsilon + G_a(\eta,\xi)\delta_\xi\left(\eta,\xi,u_{eq} + G_a^{-1}(\eta,\xi)\upsilon\right) - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\delta_\eta(\eta,\xi)$$

که:

$$\Delta(\eta,\xi,\upsilon) = G_a(\eta,\xi)\delta_\xi\left(\eta,\xi,u_{eq} + G_a^{-1}(\eta,\xi)\upsilon\right) - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\delta_\eta(\eta,\xi)$$

فرض می کنیم Δ در نامساوی زیر صدق کند:

$$\|\Delta(\eta,\xi,\upsilon)\|_\infty \le \rho(\eta,\xi) + \kappa\|\upsilon\|_\infty, \forall[\eta,\xi,\upsilon]$$

که $\rho(\eta,\xi) \ge 0$ تابعی پیوسته و $k \in [0,1)$ معلوم هستند.

با استفاده از $V = \frac{1}{2}z^2$ به عنوان نامزد تابع لیاپانوف نتیجه می شود:

$$\dot{V} = z\dot{z} = z\nu + z\Delta(\eta,\xi,\upsilon) \le z\nu + |z|\left[\rho(\eta,\xi) + \kappa\|\upsilon\|_\infty\right]$$

υ را به شکل زیر بر می گزینیم:

$$\upsilon = -\frac{\beta(\eta,\xi)}{1-k}\operatorname{sgn}(z)$$
$$\beta(\eta,\xi) \ge \rho(\eta,\xi) + b, \forall(\eta,\xi) \in D$$

b مقداری مثبت و sgn(.) نیزغیرخطی گری علامت است؛ لذا:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\le z\upsilon + |z|\left[\rho(\eta,\xi) + k\|\upsilon\|_\infty\right] \\
&\le -\frac{\beta(\eta,\xi)}{1-k}|z| + \rho(\eta,\xi)|z| + \frac{k\beta(\eta,\xi)}{1-k}|z| \\
&= -\beta(\eta,\xi)|z| + \rho(\eta,\xi)|z| \\
&\le -b|z|
\end{aligned}$$

یکی از روشهای حذف zig- zag استفاده از تقریبی پیوسته برای کنترلگر ناپیوسته مدلغزشی است. با استفاده از این تقریب همچنین می توان از مشکلات نظری ناشی از کنترلگرهای ناپیوسته احتراز نمود. بدین منظور غیر خطی گری علامت را با علامت خطی گری اشباع با شیب زیاد تقریب می زنیم. بدین معنی که مولفه های کنترل مدلغزشی را به شکل ذیل بیان می کنیم:

$$\upsilon = -\frac{\beta(\eta,\xi)}{1-k}\operatorname{sgn}(z)$$
$$\cong -\frac{\beta(\eta,\xi)}{1-k}\operatorname{sgn}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

Sat(.) تابع اشباعی با تقریب ذیل است[۴].

$$sat(y) = \begin{Bmatrix} y & if|y| \le 1 \\ \operatorname{sgn}(y) & if|y| \ge 1 \end{Bmatrix}$$

۱-۲- روش دوم

سیستم دینامیکی تک - ورودی زیر را در نظر بگیرید

$$x^{(n)} = f(x) + b(x)u \qquad (۸)$$

که در آن اسکالر x خروجی مورد نظر اسکالر u ورودی کنترل و $x = [x\,\dot{x}....x^{(n-1)}]^T$ بردار حالت اند.

مسئله کنترل این است که حالت x را چنان بیابیم که یک حالت متغیر با زمان مشخص $x = [x_d\ \dot{x}_d\ ....x_d^{(n-1)}]^T$ را با وجود خطا در f(x) و b(x) تعقیب کند.

خطای ردیابی در متغیر x به صورت $x=x-x_d$ تعریف کرده،و فرض کنید

$$\widetilde{X} = x - x_d = \left[\widetilde{x}, \dot{\widetilde{x}}, ..., \widetilde{x}^{(n-1)}\right]^T = \left[x - x_d, \dot{x} - \dot{x}_d, ..., x^{(n-1)} - x_d^{(n-1)}\right]^T \qquad (۹)$$

بردار خطای ردیابی است. به علاوه، اجازه دهید یک سطح متغیر با زمان S(t) در فضای حالت $R^{(n)}$ با معادله اسکالر s(x,t)=0 تعریف کنیم که،

$$s(x;t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \widetilde{x} \qquad (۱۰)$$

و λ یک ثابت اکیداً مثبت است. فرض کنید که داشته باشیم: $\dot{x} = f(x) + bu$

و دینامیکهای f(احتمالاً غیر خطی یا متغیر با زمان) دقیقاً معلوم نیست، ولی مانند $\hat{f}$ تخمین زده شده است.

فرض می شود خطای تخمین بر روی f یک تابع معلوم($F=F(X,\dot{X}$ محدود شده:

$$\left|\hat{f}-f\right| \le F$$

طوری که بهره کنترل b (احتمالاً متغیر با زمان یا وابسته به حالت) نامعلوم ولی با حدود معین است (که خود احتمالاً متغیر با زمان یا وابسته به حالت است)

$$0 \le b_{\min} \le b \le b_{\max}$$

چونکه ورودی کنترل در دینامیکها به صورت ضرب ظاهر می شود، طبیعی است که تخمین $\hat{b}$ بهره b را به صورت میانگین هندسی حدود فوق انتخاب کنیم.

$$\hat{b} = \left(b_{\min} b_{\max}\right)^{1/2} \tag{۱۱}$$

آنگاه حدود را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\beta^{-1} = \sqrt{\frac{b_{\min}}{b_{\max}}} \le b^{-1}\hat{b} = \frac{\sqrt{b_{\min} b_{\max}}}{b} \le \sqrt{\frac{b_{\max}}{b_{\min}}} = \beta$$

از آنجا که قانون کنترل چنان طراحی می شود که نسبت به عدم قطعیت ضرب شده مقاوم باشد، β را حاشیه بهره طراحی می نامیم، همانند نماد مورد استفاده در کنترل خطی . به راحتی می توانیم که قانون کنترل

$$u = \hat{b}^{-1}\left[u_{eq} - k\,\mathrm{sgn}(s)\right] \tag{۱۲}$$

شرط لغزشی را برقرار می کند. در حقیقت، با استفاده از (۱۲) در عبارت $\dot{s}$ داریم

$$\begin{aligned}\dot{s} &= f + bu - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} \\ &= f - b\hat{b}^{-1}\hat{f} + b\hat{b}^{-1}\ddot{x}_d - \ddot{x}_d - b\hat{b}^{-1}\lambda(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) - b\hat{b}^{-1}k\,\mathrm{sgn}(s)\end{aligned}$$

طوری که k بایستی در شرط زیر صدق کند

$$\begin{aligned}k &\ge (b\hat{b}^{-1})^{-1}\left[\left|f - b\hat{b}^{-1}\hat{f} + b\hat{b}^{-1}\ddot{x}_d - \ddot{x}_d - b\hat{b}^{-1}\lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)\right| + \eta\right] \\ &= \left|b^{-1}\hat{b}f - \hat{f} + (1 - b^{-1}\hat{b})\ddot{x}_d - (1 - b^{-1}\hat{b})\lambda(\dot{x} - \dot{x}a)\right| + \eta\ b^{-1}\hat{b} \\ &= \left|b^{-1}\hat{b}(\hat{f} + f - \hat{f}) - \hat{f} + (1 - b^{-1}\hat{b})\ddot{x}_d - (1 - b^{-1}\hat{b})\lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)\right| + \eta\ b^{-1}\hat{b} \\ &= \left|b^{-1}\hat{b}(f - \hat{f}) + (1 - b^{-1}\hat{b})\left[-\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)\right]\right| + \eta\ b^{-1}\hat{b}\end{aligned}$$

و بنابراین توجه کنید که ناپیوستگی کنترل برای به حساب آوردن عدم قطعیت در بهره کنترل b افزایش داده شده است.

در ضمن برای انتخاب سیگنال کنترل شبیه مدل (۱۲) باید داشته باشیم[۲و۴و۵].

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = \dot{s}s \le -\eta|s|$$

۲- سیستم مورد مطالعه

معادله پاندول زیر را در نظر بگیرید

$$\ddot{\theta} = -a\sin\theta - b\dot{\theta} + c\upsilon$$

که $x_1 = \theta - \delta_1$ ، $x_2 = \dot{\theta}$ و u نیز ورودی گشتاور است.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin(x_1 + \delta_1) - bx_2 + c\upsilon$$

هدف، پایداری سازی پاندول در زاویه $\theta = \delta_1$ می باشد. به تعبیر دیگر می خواهیم کنترل پسخور حالت را چنان طرح کنیم که موجب شود x=0 نقطه تعادل پایدار مجانبی سیستم حلقه – بسته باشد. فرض کنید پارامترهای b,a و c توام با عدم قطعیت $\hat{b},\hat{a}$ و $\hat{c}$ بترتیب مقادیر نامی شان باشند. این سیستم را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\hat{a}\sin(x_1 + \delta_1) - \hat{b}x_2 + \hat{c}\left\{\upsilon + \frac{1}{\hat{c}}\left[-(a-\hat{a})\sin(x_1+\delta_1) - (b-\hat{b})x_2 + (c-\hat{c})\upsilon\right]\right\}$$

بحث را با سیستم ذیل آغاز می کنیم .

$$\dot{x}_1 = x_2$$

که x_2 به عنوان ورودی کنترل در نظر گرفته میشود $x_2 = \phi(x_1)$ را چنان طراحی می نماییم که مبدا $x_1=0$ را پایدار سازد. کنترل پسخور خطی ساده $x_2 = -\mu x_1$ ، با شرط $\mu > 0$، این مهم را برآورده می نماید. بنابراین خمینه لغزشی عبارت است از $z = x_2 + \mu x_1$.

خواهیم داشت:

$$\dot{z} = \dot{x}_2 + \mu\dot{x}_1$$
$$= -\hat{a}\sin(x_1 + \delta_1) - \hat{b}x_2 + \hat{c}\left\{\upsilon + \frac{1}{\hat{c}}\left[-(a-\hat{a})\sin(x_1+\delta_1) - (b-\hat{b})x_2 + (c-\hat{c})\upsilon\right]\right\} + \mu x_2$$

بدین منظور برای خنثی کردن ترمهای قطعی به یک معادله سیگنال کنترل احتیاج داریم:

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{c}}\left[\hat{a}\sin(x_1+\delta_1) + \hat{b}x_2 - \mu x_2\right]$$
$$u = u_{eq} + \frac{1}{\hat{c}}\upsilon$$

بنابراین داریم:

$$\dot{z} = \upsilon - (a-\hat{a})\sin(x_1+\delta_1) - (b-\hat{b})x_2 + (c-\hat{c})\upsilon$$
$$= \upsilon - (a-\hat{a})\sin(x_1+\delta_1) - (b-\hat{b})x_2 + (c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\left[\hat{a}\sin(x_1+\delta_1) + \hat{b}x_2 - \mu x_2\right] + (c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\upsilon$$

تعریف می کنیم:

$$\Delta = -(a-\hat{a})\sin(x_1+\delta_1)-(b-\hat{b})x_2+(c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\left[\hat{a}\sin(x_1+\delta_1)+\hat{b}x_2-\mu x_2\right]+(c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\upsilon$$
$$=\frac{-a\hat{c}+\hat{a}\hat{c}+c\hat{a}-\hat{a}\hat{c}}{\hat{c}}\sin(x_1+\delta_1)+(\frac{-b\hat{c}+\hat{b}\hat{c}+c\hat{b}}{\hat{c}}-\mu)x_2+(c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\upsilon$$
$$=\frac{-a\hat{c}+c\hat{a}}{\hat{c}}\sin(x_1+\delta_1)+(\frac{-b\hat{c}+c\hat{b}}{\hat{c}}-\mu)x_2+(c-\hat{c})\frac{1}{\hat{c}}\upsilon$$

بسادگی می توان تحقیق کرد Δ به طور جامع در نامساوی ذیل صدق می کند.

$$\left|\Delta\right| \le k_1+k_2\left|x_2\right|+k\left|\upsilon\right|$$

که k_2, k_1 وk از معادله بالا تخمین زده می شوند.

$$\upsilon = -\frac{\beta(x)}{1-k}\operatorname{sgn}(z)$$

با انتخاب :

$$\beta(x) \ge k_1+k_2\left|x_2\right|+b_0$$
$$\beta(x) = k_1+k_2\left|x_2\right|+b_0 = 2+2\left|x_2\right|$$

و با بکار بردن تابع اشباع برای تقریب تابع علامت داریم:

$$\upsilon = -\frac{\beta(x)}{1-k}\operatorname{sgn}(z) \approx -\frac{\beta(x)}{1-k}sat(\frac{z}{\varepsilon})\varepsilon>0$$

بنابراین قانون کنترل ما به صورت زیر در می آید.

$$u = u_{eq}+\frac{1}{\hat{c}}\overline{\nu} = \frac{1}{\hat{c}}\left[\hat{a}\sin(x_1+\delta_1)+\hat{b}x_2-\mu x_2\right]-\frac{1}{\hat{c}}\frac{\beta(x)}{1-k}sat(\frac{z}{\varepsilon})$$

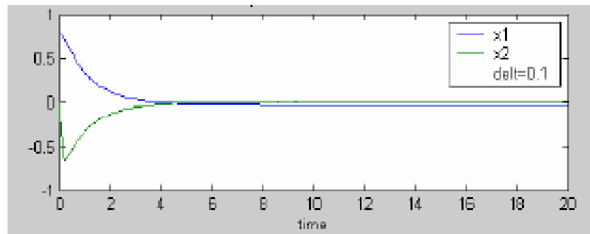
در این شبیه سازی که انجام شده پارامترهای موجود به قرار زیر هستند.

$\varepsilon=0.1$ و $b_0=0.5$ و $delta=0.1$ و $\hat{c}=\hat{b},\hat{a}=a=1.5, b=c=0.75$

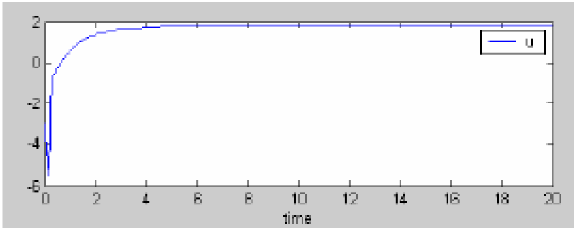
بنابراین قانون کنترل در این شبیه سازی به صورت زیر می باشد.

$$u = \frac{1}{\hat{c}}\left[\hat{a}\sin(x_1+\delta_1)+\hat{b}x_2-\mu x_2\right]-\frac{1}{\hat{c}}\frac{\beta(x)}{1-k}sat(\frac{z}{\varepsilon})$$
$$=\sin(x_1+\frac{\pi}{4})-4(1+\left|x_2\right|sat(\frac{x_2+x_1}{0.1})$$

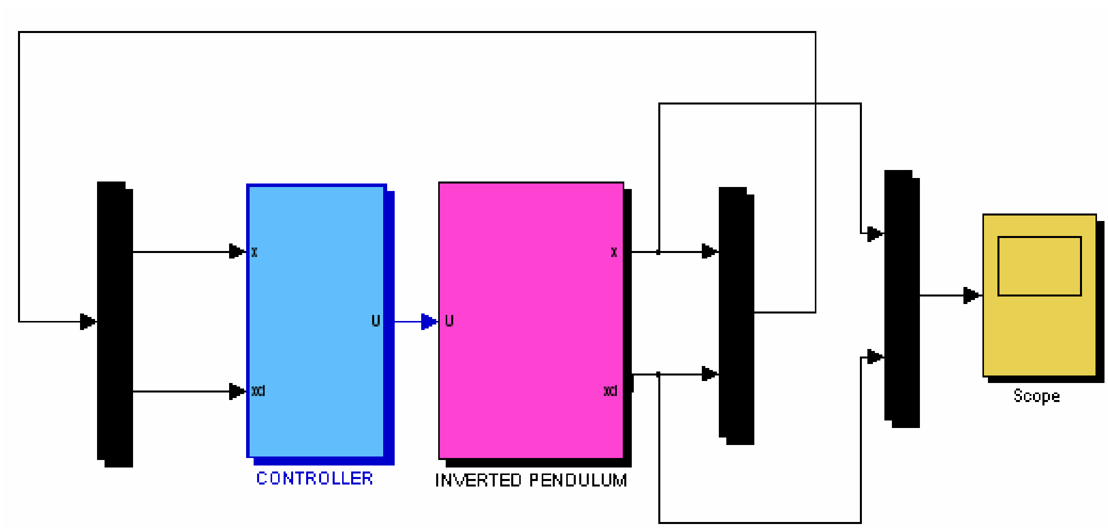
نتایج شبیه سازی شده ، در شکلهای ۱و۲ به همراه قانون کنترل مشاهده می شود . در شکل ۳ بلوک دیاگرام شبیه سازی مشاهده می شود از قابلیتهای این شبیه سازی تغیر پارامترها می باشد[۶و۷].



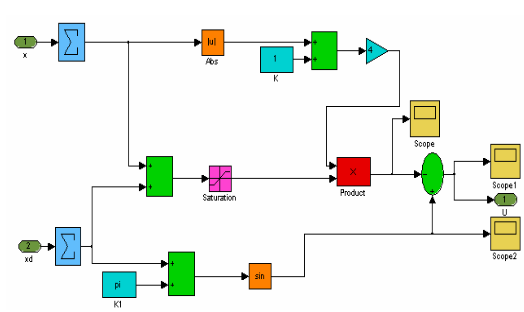
شکل- ۱



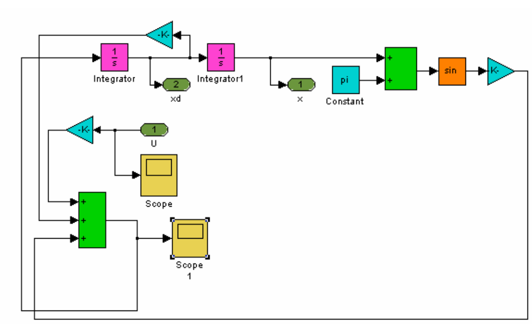
شکل-۲ قانون کنترل



شکل ۳- سیستم شبیه سازی شده



شکل ۴- شبیه سازی شده کنترل کننده



شکل ۵- شبیه سازی شده پاندول معکوس

۳- مراجع:

[1]Alberto Isidori,Nonlinear Control Systems,Springer-Verlag,Second edition 1980.

[2]J.J.Slotine and W.Li.Applied Nonlinear Control. Prentice Hall.1996.

[3]H.K.Khalil.Nonlinear System,2nd Edition.Prentice Hall.1996.

[4]P.Kokotovic,J.Hauser,S.Sastry.Nonlinear Control via approximate input-output linearization:The ball and beam example.IEEE Trans.Auto.Control,37(3): 392-398,March 1992.

[5]Perry Y.Li,Feedback Linearization and Robust Sliding Mode Control,Department of Mechanical Engineering University of Minnesota.

[6]Cesar Aguilar,Approximate Feedback Linearization and Sliding Mode Control for the Single Inverted Pendulum,Queen's University Mathematics and Engineering, August 2002.

[7]Jiandong Wang ,Sliding Mode Control,April 26,2002.