

# کنترل غیر خطی با استفاده از روش خطی سازی ورودی خروجی تقریبی برای سیستم گوی وميله

محمد رضا جاهد مطلق<sup>۲</sup>  
Jahed@sun.iust.ac.ir

حميد ايران منش<sup>۱</sup>  
HIranmanesh@graduate.uk.ac.ir

سعید قربانی<sup>۱</sup>  
Saeed\_Ghorbani@graduate.uk.ac.ir

۱- گروه مهندسی برق ، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه شهید باهنر کرمان  
۲- دانشکده کامپیوتر دانشگاه علم و صنعت ایران

## چکیده

در این مقاله مسئله کنترل تنظیمی<sup>۱</sup>، برای سیستم گوی وميله مورد مطالعه قرار گرفته است. از آن جا که این سیستم دارای درجه نسبی<sup>۲</sup> خوش تعریف نمی باشد، لذا امکان استفاده از روشهای خطی سازی فیدبک دقیق فراهم نمی باشد، با وجود این، روش خطی سازی تقریبی را می توان در یک ناحیه محدود از دامنه کار سیستم مورد استفاده قرار داد.

کلمات کلیدی: کنترل تنظیمی، خطی سازی ورودی - خروجی دقیق، خطی سازی تقریبی

## ۱- مقدمه

استفاده از روشهای هندسه دیفرانسیل<sup>۳</sup>، در تجزیه و تحلیل مسائل مربوط به روشهای طراحی خطی سازی فیدبک حالت و خطی ساز فیدبک ورودی- خروجی ومفاهیمی نظیر فرم نرمال و دینامیک صفر، در سالهای گذشته به اندازه کافی رشد پیدا کرده است. شرایط لازم و کافی برای این که یک سیستم خطی پذیر حالت کامل یا خطی پذیر ورودی- خروجی باشد، همواره مشخص ومعین است. بدست آوردن شرایطی که با وجود عدم برقراری شرایط لازم برای استفاده از این روشها، بتوان آنها را با یک سری اصلاحات مورد استفاده قرار داد، امروزه به عنوان یک موضوع تحقیقاتی مطرح است. این مقاله روشهای خطی سازی تقریبی، سیستم های تک ورودی تک خروجی که دارای تاریخچه طولانی است، را مورد بررسی قرار داده است. این روش در ابتدا با خطی سازی ژاکوبین آغاز شده وبا خطی سازی توسعه یافته [۷] و خطی سازی مجازی [۸] ادامه یافته است. روش ارائه در این مقاله به طور مشخص در مورد مسائل کنترلی که هدف دنبال کردن<sup>۴</sup> سیگنال فرمان ورودی می باشد عملکرد بهتری نسبت به سایر روشهای خطی سازی از خود نشان می دهد، مهمترین ویژگی این روش این است که سیستم نه به یک سیستم خطی، و نه یک خانواده از سیستم های خطی، بلکه به یک سیستم غیر خطی که خطی ساز ورودی- خروجی است تقریب زده می شود.

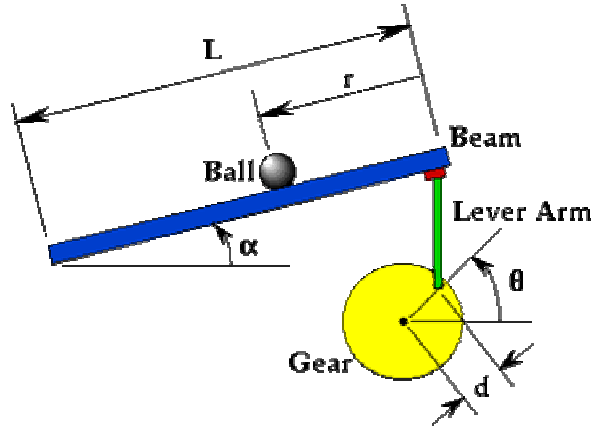
<sup>۱</sup> Regulation Control

<sup>۲</sup> Relative Degree

<sup>۳</sup> Differential Geometric Techniques

<sup>۴</sup> Tracking

## ۲- سیستم گوی و میله:



شکل (۱)

در این قسمت، هدف بررسی رفتار سیستم گوی و میله می باشد. این سیستم به عنوان یک مدل پر استفاده در آزمایشگاههای کنترل جهت تست کنترل کننده ها مورد استفاده قرار می گیرد. این سیستم از یک میله که به طور متقارن حول تکیه گاه خود توسط یک گشتاور اعمالی امکان دوران دارد، به همراه یک گوی که بر روی میله می لغزد تشکیل شده است. با فرض این که سطح لغزش گوی بر روی میله بدون اصطکاک است، میله می تواند به طور کامل در صفحه قائم بدون اینکه گوی تماس خود را با میله از دست بدهد دوران کند.

هدف اصلی، کنترل موقعیت گوی بر میله می باشد. ولی علاوه بر کنترل گوی در یک نقطه مشخص ما علاقمندیم که گوی توانایی دنبال کردن یک مسیر مشخص را نیز داشته باشد.

در این قسمت ابتدا معادلات حرکت برای سیستم گوی و میله بدست آورده می شود. سپس روش های خطی سازی ورودی - خروجی و خطی سازی حالت کامل بیان می شود و همچنین امکان استفاده از این روشها برای سیستم گوی و میله مورد بررسی قرار می گیرد.

### ۲-۱- دینامیک ها

سیستم گوی و میله (ball and beam) در شکل (۱) نشان داده شده است. ممان اینرسی میله برابر  $J$ ، جرم گوی برابر  $M$  و شتاب جاذبه زمین برابر  $G$  می باشد. با انتخاب متغیرهای  $\theta$  (زاویه میله) و  $r$  (موقعیت گوی) به عنوان دینامیکهای سیستم معادلات لاگرانژ حرکت به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta = \ddot{r} + G \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$\tau = (Mr^2 + J)\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + MGr \cos \theta$$

که  $\tau$  گشتاور اعمال شده به میله می باشد و نیرویی وارده به گوی صفر می باشد. با استفاده از یک تبدیل معکوس پذیر عبارت زیر بدست می آید.

$$\tau = 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + MGr \cos \theta + (Mr^2 + J)u \quad (2)$$

فرم فضای حالتی معادلات فوق به صورت زیر می باشد.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - G \sin x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

$$\underbrace{y = x_1}_{h(x)} \quad (3)$$

که  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$  نشان دهنده متغیرهای حالت و  $y = b(x)$  خروجی سیستم را نشان می دهد. همچنین معادله (۲) یک تبدیل ورودی غیر خطی می باشد.

## ۲-۲- خطی سازی ورودی - خروجی دقیق<sup>۱</sup>

همواره مطلوب این است که خروجی سیستم  $y(t)$  یک مسیر مشخصی نظیر  $y_d(t)$  را دنبال کند، به عبارت دیگر  $t \rightarrow \infty$  هرگاه  $y(t) \rightarrow y_d(t)$ .

برای این منظور باید پاسخ سیستم خطی ورودی - خروجی دقیق بدست آورده شود. روش کار به این صورت می باشد که از معادله خروجی، حداکثر تا مرتبه سیستم مشتق گرفته، تا ورودی در معادلات ظاهر شود.

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ \dot{y} &= x_2, \\ \ddot{y} &= x_1 x_4^2 - G \sin x_3, \\ y^{(3)} &= \underbrace{x_2 x_4^2 - G x_4 \cos x_3}_{b(x)} + \underbrace{2x_2 x_4}_{a(x)} u \end{aligned} \quad (4)$$

حال اگر چنانچه ضریب  $u$  یعنی  $a(x)$ ، در ناحیه مورد نظر ما مخالف صفر باشد، می توان با استفاده از یک قانون کنترل به فرم زیر

$$u = \frac{1}{a(x)} [-b(x) + v] \quad (5)$$

به یک سیستم ورودی - خروجی خطی شده به شکل زیر برسیم.

$$y^{(3)} = v \quad (6)$$

ولی برای سیستم گوی و میله ضریب ورودی کنترل یعنی  $a(x)$  هرگاه سرعت زاویه ای یعنی  $x_4 = \dot{\theta}$  و یا موقعیت گوی یعنی  $x_1 = r$  صفر شوند، برابر صفر خواهد شد. بنابراین درجه نسبی سیستم گوی و میله خوش تعریف نمی باشد. و این امر ناشی از این حقیقت است که رابطه زیر

$$L_g L_f^2 h(x) = 2x_1 x_4 \quad (7)$$

برای  $x = 0$  (نقطه تعادل سیستم بدون ورودی) در رابطه برابر صفر می شود در حالی که در همسایگی آن مخالف صفر می باشد. بنابراین روش خطی سازی ورودی - خروجی دقیق نمی تواند به عنوان یک روش طراحی کنترلر، دنبال کننده مسیر، مورد استفاده قرار بگیرد.

## ۳-۲- خطی سازی کامل حالت<sup>۱</sup>

در این قسمت خطی سازی کامل حالات سیستم گوی و میله، یعنی پیدا کردن یک مجموعه تبدیل معکوس پذیر و ورودی جدید، به طوری که رفتار ورودی - حالت سیستم تبدیل شده، خطی باشد بررسی می شود . شرایط لازم و کافی برای رسیدن به این منظور توسط  $\text{Meyer}$  و  $\text{Hunt.Su}$  ،  $\text{Responddek}$  ،  $\text{Jakubczykzyk}$  [۴] بیان شده است. در ابتدا بعد مجموعه میدان های برداری<sup>۲</sup> زیرجهت کنترل پذیری تست می شود.

$$\text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\} \quad (۸)$$

که  $ad_i^f g$  عبارت از لایبرکت<sup>۳</sup> مجموعه زیر می باشد.

$$[f, [f, \dots, [f, g]]] \quad (۹)$$

از آن جا که ماتریس

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_1 x_4 & 4x_2 x_4 + G \cos x_3 \\ 0 & -2x_1 x_4 & -2x_1 x_4 - G \cos x_3 & -4x_1 x_4^3 + 3Gx_4 \cos x_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

در  $x=0$  دارای بعد کامل می باشد، لذا می توان نتیجه گرفت که سیستم گوی و میله به طور محلی کنترل پذیر است. شرط دومی که می بایست تست شود، اینولوتیو بودن<sup>۴</sup> مجموعه زیر می باشد.

$$\text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\} \quad (۱۱)$$

از آن جا که شرط اینولوتیو بودن برای مجموعه فوق برقرار نمی باشد، روش خطی سازی کامل حالت را نمی توان برای سیستم گوی و میله مورد استفاده قرار داد.

## ۴-۲- خطی سازی ورودی - خروجی تقریبی<sup>۵</sup>

در این قسمت نشان داده می شود که با انتخاب مناسب میدان های برداری نزدیک به میدان های برداری سیستم گوی و میله می توان یک قانون کنترل برای رسیدن به یک خطای دنبال کردن خروجی مرزی طراحی کرد قانون کنترل در حقیقت یک قانون کنترل دنبال کردن خروجی به شکل دقیق برای سیستم تقریبی تعریف شده توسط میدان های برداری می باشد.

در حالت ایده آل مطلوبست که یک قانون کنترل فیدبک حالت به شکل  $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$ ، سیستم گوی و میله را به یک سیستم خطی به شکل  $y^4 = v$  تبدیل کند، به طوری که سیستم تبدیل شده یک مسیر مشخص نظیر  $y_d(t)$  را به طور مجانبی با یک قانون کنترل به فرم زیر دنبال کند.

$$v = y_d^{(4)}(t) + a_3(y_d^{(3)}(t) - y^{(3)}(t)) + a_2(\ddot{y}_d(t) - \ddot{y}(t)) + a_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + a_0(y_d(t) - y(t)) \quad (۱۲)$$

همچنان که معادلات بالا نشان می دهد پاسخ ورودی - خروجی سیستم گوی و میله نمی تواند به طور دقیق به علت وجود ترم غیر خطی  $r(\theta)^2 = x_1 x_4^2$ ، خطی شود. در اینجا سعی می شود یک سیستم خطی پذیر ورودی - خروجی نزدیک به

<sup>۱</sup> Full State Linearization

<sup>۲</sup> Vector Field

<sup>۳</sup> Lie Bracket

<sup>۴</sup> Involutive

<sup>۵</sup> Approximate Input-Output Linearization

سیستم اصلی بدست آید. با استفاده از دو روش مختلف، دو سیستم تقریبی برای سیستم گوی و میله بدست می آید. در هر دو روش توسط یک تبدیل غیر خطی از حالات و یک قانون فیدبک حالت به شکل  $u(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v$ ، سیستم به یک سیستم مرکب از زنجیره ای از انتگرالگیرها که توسط یک ترم مرتبه بالا یعنی  $\psi(x, v)$  منحرف شده، تبدیل می شود (فرم کانونیکال برونفسکی).

دنبال کننده تقریبی برای هر دو روش با انتخاب  $v$  به فرم زیر قابل دستیابی است.

$$v = y_d^{(4)}(t) + a_3(y_d^{(3)}(t) - \phi_4(t)) + a_2(\ddot{y}_d(t) - \phi_3(t)) + a_1(\dot{y}_d(t) - \phi_2(t)) + a_0(y_d(t) - \phi_1(t)) \quad (13)$$

که یک سیستم خطی پایدار مجانبی، منحرف شده توسط یک ترم غیر خطی را نتیجه می دهد. برای هر دو روش تقریب سیستم در محیط MATLAB شبیه سازی شده و نتایج حاصل از آن ارائه گردیده است.

## ۲-۴-۱- تقریب ۱ (تغییر میدان برداری $f^1$ ):

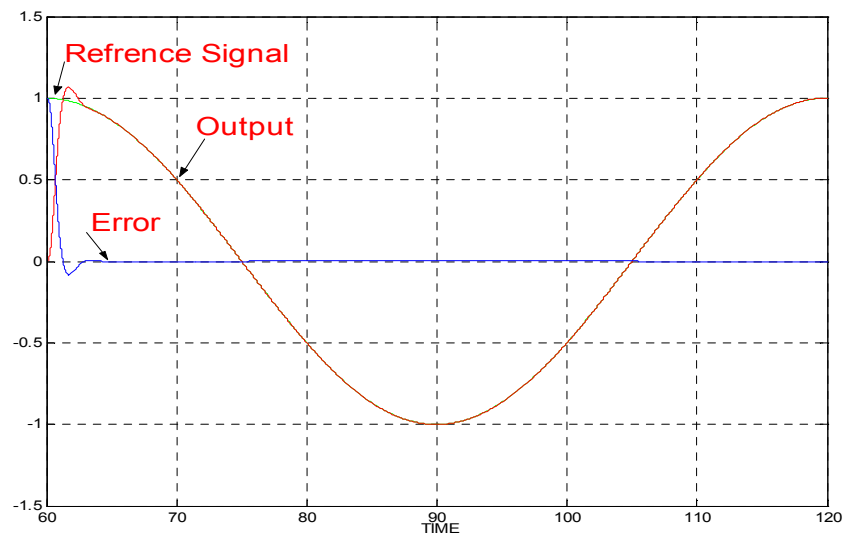
از آن جا که ترم شتاب گریز از مرکز  $x_1 x_4^2 = r(\theta)^2$  باعث می شود، که سیستم دارای درجه نسبی خوش تعریف نباشد. اولین روش طراحی تقریبی بر مبنای حذف شتاب گریز از مرکز می باشد. فرض کنید که  $\xi_1 = \phi_1(x) = h(x)$  در این صورت معادلات بر مبنای متغییر جدید به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \underbrace{x_2}_{\xi_2 = \phi_2(x)} & \xi_1 &= \xi_2 \\ \xi_2 &= \underbrace{-G \sin x_3}_{\xi_3 = \phi_3(x)} + \underbrace{x_1 x_4^2}_{\psi_2(x)} & \text{or} & \quad \xi_2 = \xi_3 + \psi_2(x) \\ \xi_3 &= \underbrace{-G x_4 \cos x_3}_{\xi_4 = \phi_4(x)} & \xi_3 &= \xi_4 \\ \xi_4 &= \underbrace{-G x_4^2 \sin x_3}_{b(x)} \underbrace{(-G \cos x_3) u}_{a(x)} & \xi_4 &= b(x) + a(x)u =: v(x, u). \end{aligned} \quad (14)$$

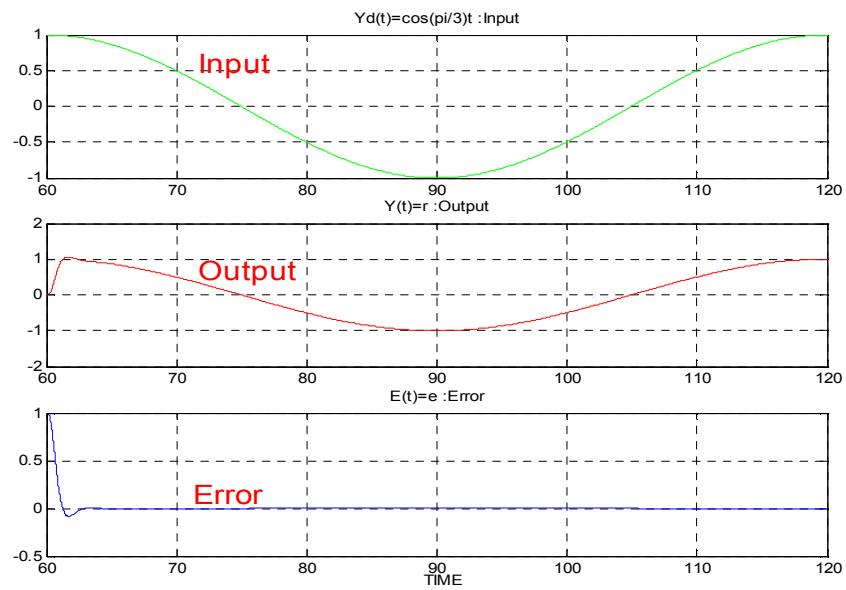
اکنون با صرف نظر از ترم شتاب گریز از مرکز (که دارای مرتبه بالا می باشد)، یک سیستم تقریبی با درجه نسبی خوش تعریف بدست می آید. البته انتخاب ترم حذف شونده، وابسته به مشخص کردن تبدیل معکوس پذیر  $\phi(x)$  می باشد.

## ۲-۴-۲- شبیه سازی تقریب نوع ۱

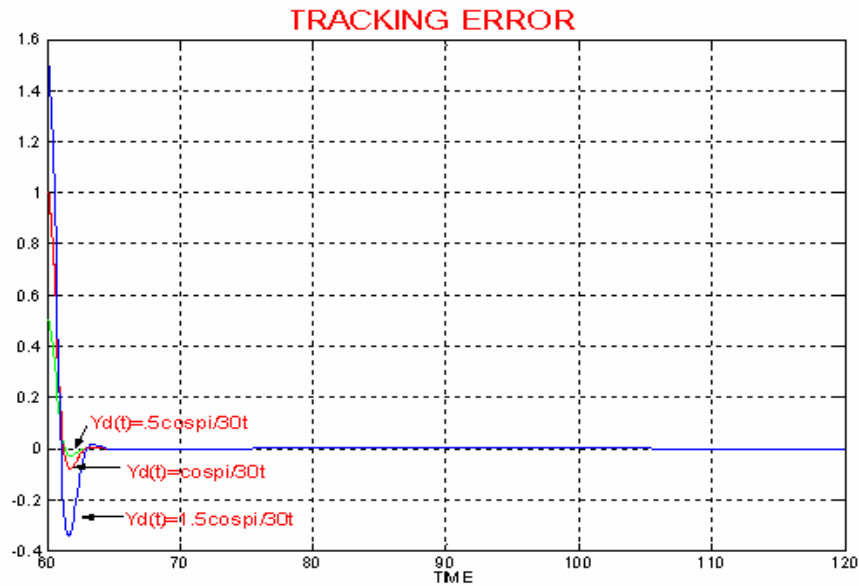
نتایج شبیه سازی نشان می دهد که سیستم حلقه بسته رفتار مطلوبی در دنبال کردن مسیر از خود نشان می دهد. با افزایش دامنه مسیر مطلوب؛ خطای دنبال کردن نیز افزایش می یابد و این حالت نیز به دلیل این که ترم غیر خطی حذف شده یک تابع غیر خطی از حالات می باشد قابل پیش بینی می باشد. شکل (۳) اثر افزایش دامنه سیگنال مرجع را بر روی خطای دنبال کردن نشان می دهد همچنان که مشاهده می شود افزایش دامنه سیگنال مرجع منجر به افزایش خطای دنبال کردن می شود.



شکل (۱) سیگنالهای ورودی ، خروجی ، خطا با استفاده از روش تقریب نوع ۱



شکل (۲) سیگنالهای ورودی ، خروجی ، خطا به ترتیب با استفاده از روش تقریب نوع ۱



شکل (۳) مقایسه سیگنالهای خطای دنبال کردن با استفاده از تقریب نوع ۱ و دامنه های ورودی متفاوت

#### ۲-۴-۳- تقریب ۲ (تغییر میدان برداری $g$ )

برای این تقریب شتاب گریز از مرکز حفظ شده و از ترم هایی که باعث می شوند یک سیستم با درجه نسبی خوش تعریف بدست آید، صرف نظر می شود. به عبارت دیگر میدان برداری  $g$  تغییر داده می شود. با فرض این که  $\xi_1 = \phi_1(x) = h(x)$  باشد معادلات سیستم تبدیل شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \underbrace{x_2}_{\xi_2 = \phi_2(x)} & \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= \underbrace{-G \sin x_3}_{\xi_3 = \phi_3(x)} + \underbrace{x_1 x_4^2}_{\psi_2(x)} & \text{or} & \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \psi_2(x) \\
 \dot{\xi}_3 &= \underbrace{-G x_4 \cos x_3 + x_2 x_4^2}_{\xi_4 = \phi_4(x)} + \underbrace{2x_2 x_4 u}_{\psi_3(x,u)} & \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\
 \dot{\xi}_4 &= \underbrace{x_1 x_4^4}_{b(x)} + \underbrace{(-G \cos x_3 + 2x_2 x_4)u}_{a(x)} & \dot{\xi}_4 &= b(x) + a(x)u =: v(x, u).
 \end{aligned} \tag{15}$$

در این حالت هیچ انتخابی برای حذف کردن نداریم، زیرا  $\psi_3(x, u) = 2x_2 x_4 u$  در  $x = 0$  برابر صفر است، ولی در همسایگی  $x = 0$  مخالف صفر است. در این حالت  $\psi_2$  و  $\phi_1$  نمی توانند به طور منحصر به فرد تعیین شوند. زیرا عبارت  $x_2 x_4^2$  می تواند در  $\psi_3$  نسبت به  $\phi_4$  بهتر مورد استفاده قرار می گیرد.

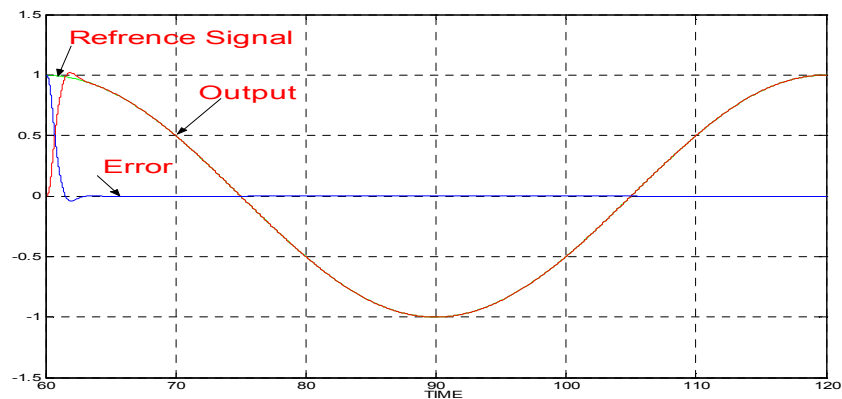
در این روش سیستم تقریب زده شده با تغییر میدان برداری  $g$  بدست می آید. با تغییر میدان برداری  $g$  (با صرف نظر از  $\psi_3(x, u)$ ) و با استفاده از ورودی  $u$ ، رابطه زیر بدست می آید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{g(x)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2Gx_1x_4 \cos x_3 - 4x_1x_2x_4^2}{G(G \cos^2 x_3 - 2x_2x_4 \cos x_3 - x_1x_4^2 \sin x_3)} \\ \frac{2x_1x_4^2 \sin x_3}{G(G \cos^2 x_3 - 2x_2x_4 \cos x_3 - x_1x_4^2 \sin x_3)} \end{bmatrix}_{\Delta g(x)} \quad (16)$$

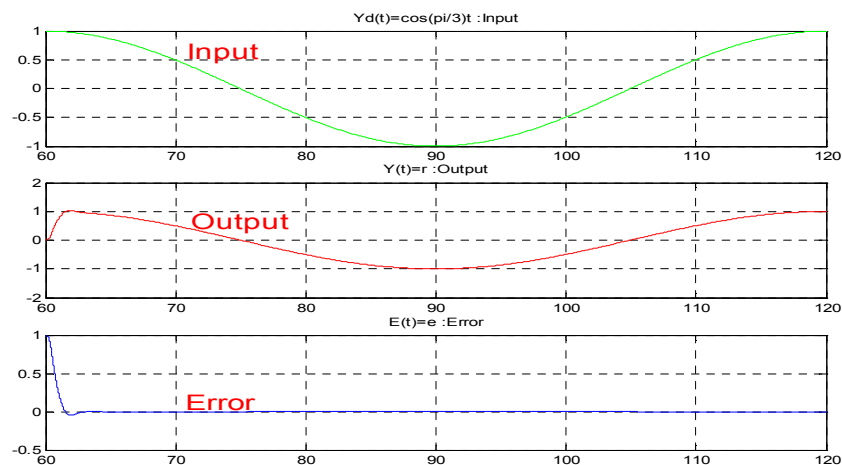
سیستم بدست آمده یک تقریب مناسب برای سیستم اصلی می باشد. زیرا  $\Delta g$  برای مقادیر کوچک سرعت زاویه ای  $\theta = x_4$ ، به اندازه کافی کوچک می باشد.

#### ۲-۴-۴-۲- شبیه سازی تقریب ۲:

نتایج شبیه سازی نشان می دهد که خطای دنبال کردن این روش به مراتب کمتر از روش ابتدایی می باشد بنابراین در برخی از موارد تقریب دوم نسبت به تقریب اول نزدیکتر به سیستم اصلی است.



شکل (۴) سگنالهای ورودی، خروجی، خطا با استفاده از روش تقریب ۲

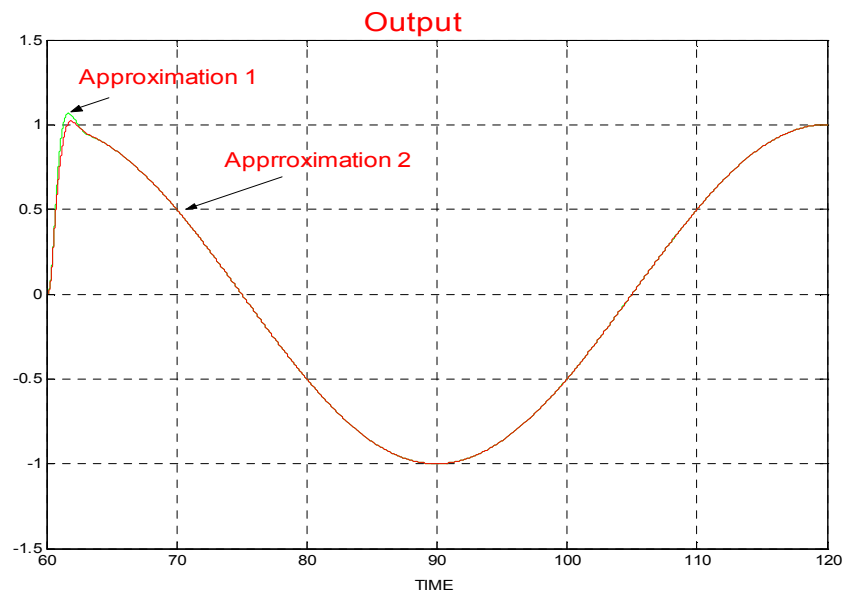


شکل (۵) سیگنالهای ورودی، خروجی، خطا به ترتیب با استفاده از تقریب ۲

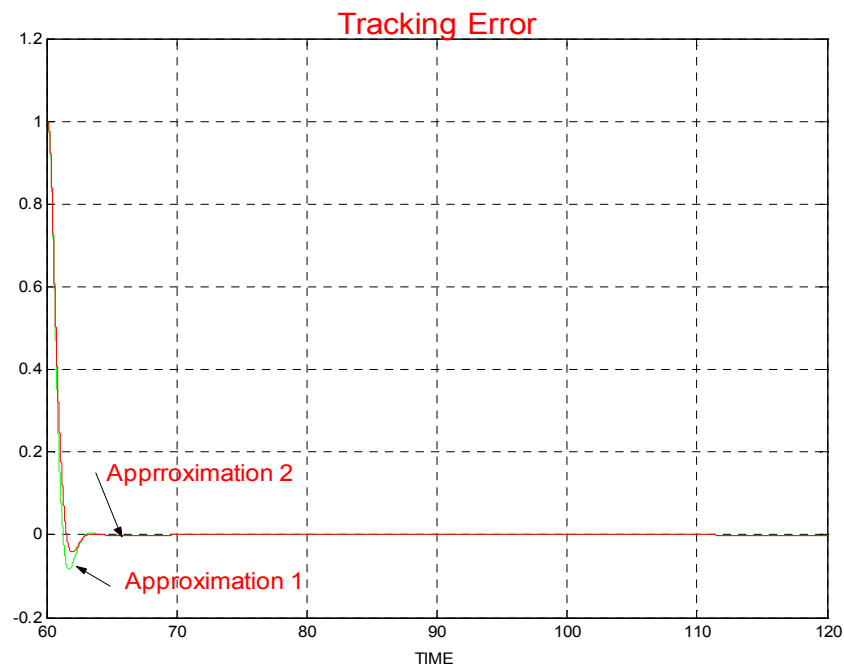


## ۲-۴-۵- مقایسه تقریب نوع ۱ و ۲

با رسم شکل موج های خروجی و نیز خطای دنبال کردن در شکل های (۵) و (۶) مشاهده می گردد، که تقریب نوع ۲، خطای دنبال کردن کمتری نسبت به تقریب نوع ۱ از خود نشان می دهد.



شکل (۶) مقایسه سیگنالهای خروجی با استفاده از تقریب نوع ۱ و نوع ۲



شکل (۷) مقایسه سیگنالهای خطای دنبال کردن با استفاده از تقریب نوع ۱ و نوع ۲

### ۳- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش خطی سازی ورودی - خروجی تقریبی ، برای سیستم های غیر خطی به ویژه آن دسته از سیستم های غیر خطی که دارای درجه نسبی خوش تعریف نمی باشند، معرفی شد. نتایج شبیه سازی نشان داد که در انتخاب نوع تقریب به اندازه کافی آزادی انتخاب داریم. همچنین بر مبنای روش خطی سازی ورودی خروجی تقریبی ، یک دنبال کننده مسیر مطلوب با خطای دنبال کردن طراحی شد. سیستم تقریبی بدست آمده ، نیز یک سیستم غیر خطی می باشد، با این تفاوت که این سیستم غیرخطی ، خطی ساز ورودی خروجی به وسیله فیدبک حالت می باشد. همچنین برخی از خواص دقت این روش بر روی سیستم گوی وميله نیز نشان داده شد.

مراجع :

I

- [۱] Osvaldo J.Roias ,Graham C.Goodwin ,”Preliminary Analysis of a Nonlinear Control Scheme related to Feedback Linearization”.Proceeding of ۴۰<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control Orlando,Florida USA,December ۲۰۰۱.
- [۲] Sung Jun Joo and Jin H. Seo,” Design and Analysis of the Nonlinear Feedback Linearizing Control for an Electromagnetic Suspension System”, IEEE Transaction on Control Systems Technology,vol.۵ no.۱, January ۱۹۹۷
- [۳] J.Hauser, S.Sastry and P.Kokotovic,”Nonlinear Control via Approximate Input-Output Linearization:the Ball and Beam Example”,Proceeding of the ۲۸<sup>th</sup> Conference on Decision and Control Tampa,Florida, December ۱۹۸۹.
- [۴] Y.Guo , D.J.Hill and Z.P. Jiang,”Global Nonlinear Control of the Ball and Beam System”. Proceeding of the ۳۵<sup>th</sup> Conference on Decision and Control Tampa,Florida, December ۱۹۹۶.
- [۵] C.I. Byrnes and A.Isidori,”Local stabilization of minimum-phase nonlinear systems ” ,System and Control Letter ۱۱ (۱۹۸۹).
- [۶] J.J.E. Slotine,”Sliding controller design for non-linear system”.International Journal of Control, ۴۰, ۴۲۱- ۴۳۴.
- [۷] J. -J.E. Slotine and W.Li, “*Applied Nonlinear Control* “.Englewood Cliffs,NJ:Prentice- Hall.
- [۸] A.J. Kreuer, “Approximate Linearization by state feedback and coordinate change” Systems and Control Letters ۵ (۱۹۸۴) ۱۸۱-۱۸۵.
- [۹] C.Reboulet and C.Champetier, “A new method for linearizing non-linear systems: the pseudolinearization” International Journal of Control ۴۰ (۱۹۸۴) ۶۳۱-۶۳۹.