

## الگوریتم جدید وفقی خرده‌باند NSAF – VSS

معصومه رحمانی - محمد حسین کهای

دانشجوی کارشناسی ارشد - استادیار دانشکده برق

دانشگاه علم و صنعت ایران

kahaei@iust.ac.ir masoomrah61@yahoo.com

چکیده - الگوریتم فیلترهای وفقی خرده باند نرمالیزه شده (NSAF) با استفاده از معیار بهینه سازی قید- ضریب و براساس اصل حداقل سازی آشفتگی، همگرایی نسبتاً سریعی را تحت تحریک رنگی از خود نشان می‌دهد. در این مقاله، یک معیار طراحی جدید برای فیلترهای وفقی خرده باند نرمالیزه شده پیشنهاد شده است. در این معیار با کاهش مجموع مربع خطای خرده باند تخمینی در هر لحظه، اندازه گام الگوریتم NSAF به روز شده است. الگوریتم پیشنهادی نسبت به NSAF در خطای حالت دائمی یکسان دارای سرعت همگرایی سریعتر و در سرعت همگرایی یکسان دارای خطای حالت دائمی کمتر می‌باشد. تاثیر ملاک و الگوریتم پیشنهادی با آنالیز ریاضی و شبیه سازی امتحان شده و مورد تایید قرار گرفته است.

کلید واژه- فیلترهای وفقی خرده باند (subband adaptive filter- SAF)، اندازه گام متغیر، فیلترهای وفقی خرده باند نرمال شده (normalized SAF)، عدم هم ترازی نرمال شده (normalized misalignment)

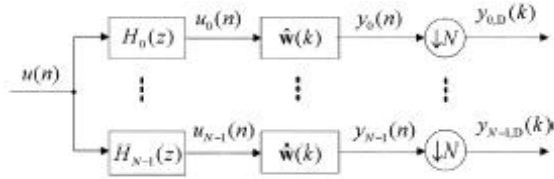
### 1- مقدمه

پیشنهاد شده است. ایده حداقل سازی آشفتگی [6] این موضوع را بیان می‌کند که از یک مرحله به مرحله بعدی ضرایب فیلتر وفقی باید در یک رفتار مینیمم تغییر داده شوند. به این موضوع، قیدهای ناشی از خروجی فیلتر به هنگام شده نیز تحمیل می‌شود. این سبب می‌شود سیگنالهای خرده باند تقریباً به طور مستقل همگرا شوند. ویژگی منحصر بفرد الگوریتم NSAF این است که برای تخمین سیگنالهای خطای خرده باند در آن هر خرده باند، حلقه وفقی و فیلتر خودش را دارد، برخلاف SAF که از ضرایب باند کامل فیلتر وفقی برای تطبیق استفاده شده است.

الگوریتم NSAF که از مقدار اندازه گام ثابت،  $\mu$ ، استفاده می‌کند با وجود اینکه نسبت به الگوریتم NLMS، بسیار سریعتر همگرا می‌شود اما همچنان از مصالحه بین سرعت همگرایی و عدم تنظیم (misadjustment) رنج می‌برد. در این مقاله برای رفع این مشکل از اندازه گام متغیر استفاده شده است و برای به روز کردن اندازه گام از ویژگی منحصر بفرد NSAF و پیشنهاد

الگوریتم LMS (Least Mean Square)، به خاطر سادگی و پایداری یکی از پر کاربردترین الگوریتمهای وفقی می‌باشد. بهر حال الگوریتم LMS زمانی که سیگنال ورودی، همبستگی بالایی دارد بسیار کند همگرا می‌شود. فیلترهای وفقی خرده باند برای بهبود رفتار همگرایی الگوریتم LMS، [1] - [6] پیشنهاد شده‌اند. در فیلترهای وفقی خرده باند، سیگنال ورودی و سیگنال مطلوب به کمک فیلترهای خرده باند به سیگنالهایی که باند فرکانسی جدا از هم دارند تقسیم می‌شوند. این امر باعث می‌شود که سیگنالهای ایجاد شده در حوزه زمان نسبت به یکدیگر ناهمبسته شده و رفتار همگرایی کل بهبود یابد.

یکی از انواع SAF، الگوریتم NSAF می‌باشد که با طراحی معیار جدید بهینه سازی قید- ضریب براساس اصل حداقل سازی آشفتگی در سال 2004 توسط Lee و Gan



شکل 2: سیگنال ورودی قبل از رفتن به فیلتر  $\mathbf{w}(k)$  و کاهش نمونه به سیگنالهای خرده باند تبدیل می شود.

می کنیم. شکل 2 یک ساختار معادل برای قسمت انتخاب شده در شکل 1 را نشان می دهد با این فرض که فیلتر  $\mathbf{w}(k)$  ایستاد باشد (بعبارت دیگر ضرایب فیلتر بعد از وفق یافتن ثابت باقی بماند) ما می توانیم آنرا با پیروی فیلتر بانک آنالیز به صورتی که در شکل 2 نشان داده شد پس و پیش کنیم از اینرو خروجی فیلتر کاسته شده در هر subband می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$y_{i,D}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{w}_m(k) u_i(kN-m) = \mathbf{f}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k) \quad (1)$$

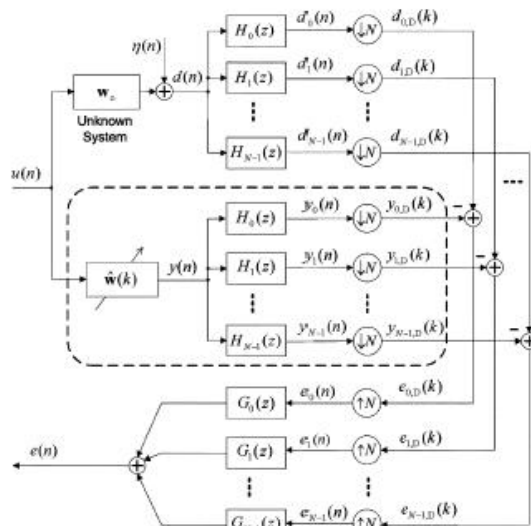
جائیکه

$$\mathbf{u}_i(k) = [u_i(kN), u_i(kN-1), \dots, u_i(kN-N+1), u_i(kN-N), \dots, u_i(kN-M+1)]^T \quad (2)$$

بردار داده ورودی برای خرده باند  $\mathbf{u}_i(k)$  می باشد و  $\mathbf{w}(k) = [\hat{w}_0(k), \hat{w}_1(k), \dots, \hat{w}_{M-1}(k)]^T$  بردار وزن وفقی باند کامل و رونویس  $\mathbf{T}$ ، ترانزاده ماتریس می باشد. سیگنال خطای خرده باند کاهش نمونه داده شده به صورت  $e_{i,D}(k) = d_{i,D}(k) - \mathbf{f}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k)$  به صورتی که در شکل 1 نشان داده شده است می باشد. معادلات (1) و (2) نشان می دهد که در هر لحظه زمانی  $k$ ، هر بردار داده  $\mathbf{u}_i(k)$  از  $N$  نمونه جدید و  $M-N$  نمونه قبلی برای ایجاد یک نمونه حقیقی  $y_{i,D}(k)$  استفاده می کند. همه سیگنالها و ضرایب، حقیقی هستند.

3- الگوریتم فیلتر وفقی خرده باند نرمال شده (NSAF) [7]  
در این الگوریتم براساس اصل حداقل سازی آشفتگی [6]، یک معیار  $N$  قیدی به صورت یک مساله بهینه سازی قید-ضریب به صورت زیر فرموله شده است:  
با گرفتن مربع اندازه فاصله اقلیدسی تغییرات در بردار وزن

$$f[\mathbf{w}(k+1)] = \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|^2 \quad (3)$$



شکل 1: ساختار خرده باند که پاسخ مطلوب و خروجی فیلتر و سیگنال خطا را نشان می دهد.

معیار جدید کاهش مجموع مربع خطای خرده باند که ناشی از ناهمبستگی سیگنال و نویز ورودی و در نتیجه ناهمبستگی سیگنال و نویز ورودی خرده باند می باشد استفاده شده است سپس رفتار همگرایی الگوریتم پیشنهادی با آنالیز ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است. در [9] برای بهینه سازی سرعت همگرایی NSAF، الگوریتم جدیدی با اندازه گام متغیر پیشنهاد شده است که با حداقل سازی متوسط مربع انحراف ضرایب فیلتر از مقدار بهینه خود به نتایج تجربی خوبی رسیده است اما این الگوریتم دارای دو عیب عمده است، قابل بحث نبودن رفتار همگرایی با آنالیز ریاضی و همچنین افزایش حجم محاسبات نسبت به الگوریتم NSAF دو مشکل برطرف ناشدنی این الگوریتم می باشند. توجه کنید که در این مقاله، بهبود رفتار همگرایی و کاهش خطای حالت دائم بدون اینکه پیچیدگی محاسباتی افزایش یابد حاصل می شود.

## 2- فیلتر وفقی خرده باند

شکل 1 یک ساختار خرده باند را نشان می دهد جائیکه  $d(n)$  پاسخ مطلوب و  $y(n)$  خروجی فیلتر به  $N$  خرده باند توسط فیلترهای آنالیز  $H_0(z)$  و  $\dots$  و  $H_{N-1}(z)$  تقسیم شده اند. این سیگنالهای خرده باند،  $d_i(n)$  و  $y_i(n)$  برای  $i = 0, \dots, N-1$  برای یک نرخ پایین تر متناسب با پهنای باندشان به طور بحرانی نمونه برداری شده اند.

توجه کنید که ما از متغیر  $n$  برای شاخص دنباله اصلی و  $k$  برای شاخص دنباله کاهش نمونه برداری شده استفاده

توجه به این نکته و با توجه به مرجع [8]، به هنگام سازی مقدار اندازه گام متغیر را به صورت زیر پیشنهاد می کنیم.

$$m(k) = m(k-1) - \frac{r}{2} \frac{\partial \sum_{i=1}^N e_{i,D}^2(k)}{\partial m(k-1)} \quad (7)$$

با مشتق گیری سیگنال  $e_i(k)$  نسبت به  $m(k-1)$ ، الگوریتم NSAF پیشنهادی با اندازه گام متغیر به صورت زیر در می آید.

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + m(k) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} e_{i,D}(k) \quad (8)$$

که در آن

$$m(k) = m(k-1) + r \sum_{i=1}^N e_{i,D}(k) \frac{\mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k-1)}{\|\mathbf{u}_i(k-1)\|^2} \quad (9)$$

می باشد.

الف- اثبات همگرایی

در این بخش رفتار همگرایی الگوریتم پیشنهادی براساس انحراف متوسط مربع بررسی می شود.

$$c(k) = E[\|\mathbf{e}(k)\|^2] = E[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}(k)\|^2] \quad (10)$$

که  $\mathbf{w}_0(k) = [w_{o,0}(k), w_{o,1}(k), \dots, w_{o,M-1}(k)]^T$  بردار وزن بهینه می باشد. برای محاسبه، معادله (9) را از  $\mathbf{w}_0$  کم می کنیم و اندازه فاصله اقلیدسی مربع شده هر دو طرف را می گیریم. با مرتب سازی عبارت ها و گرفتن امید، معادله زیر به دست می آید.

$$c(k+1) - c(k) = E(m^2(k) \sum_{i=1}^N \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2}) + \\ - 2E(m(k) \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{u}_i^T(k) e_{i,D}(k) \mathbf{e}(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2}) \quad (11)$$

برای پایداری الگوریتم باید انحراف مربع متوسط در هر مرحله کاهش یابد به عبارت دیگر  $c(k+1) - c(k) < 0$ .

در (11)،  $\mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{e}(k) = \mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{w}_0 - \mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{w}(k)$ ، سیگنال خطا در غیاب آشفستگی برای خرده باند  $i$  ام می باشد. اگر فرض کنیم که آشفستگی (ترم  $h(n)$  در شکل 1) ناچیز باشد سیگنال خطا در غیاب آشفستگی برابر با سیگنال خطای خرده باند کاهش نمونه برداری شده  $e_{i,D}(k)$  می باشد. از طرف دیگر بعد

و قرار دادن معیار  $N$  قیدی روی خروجی کاهش نمونه برداری شده فیلتر

$$d_{i,D}(k) = \mathbf{w}^T(k+1) \mathbf{u}_i(k) \quad i=0, \dots, N-1 \quad (4)$$

و ترکیب (3) و (4) برای تشکیل تابع لاگرانژ به صورت زیر

$$J(k) = f[\mathbf{w}(k+1)] + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i [d_{i,D}(k) - \mathbf{w}^T(k+1) \mathbf{u}_i(k)] \quad (5)$$

و گرفتن مشتق از (5) نسبت به  $\hat{\mathbf{w}}(k+1)$  و گذاشتن مشتق برابر صفر به منظور حداقل سازی و با گذاشتن شرط ناچیز بودن همبوشانی پاسخ فرکانسی فیلترهای آنالیز، رابطه بازگشتی برای بهنگام سازی بردار وزن به دست می آید.

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + m \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} e_{i,D}(k) \quad (6)$$

واضح است که این معادله وقتی در یک قالب ساده قابل مقایسه با الگوریتم NLMS است. توجه کنید که تابع لاگرانژ تعریف شده در بالا شامل  $N$  قید می باشد، بنابراین تعداد خرده باندها  $N$  (تعداد شرط ها) باید کوچکتر از طول بردار ضرایب  $M$  باشد. این امر حد بالایی تعداد مجاز خرده باندها را در الگوریتم NSAF مشخص می کند.

4- الگوریتم پیشنهادی فیلتر وقتی خرده باند نرمال شده با اندازه گام متغیر (VSS\_NSAF)

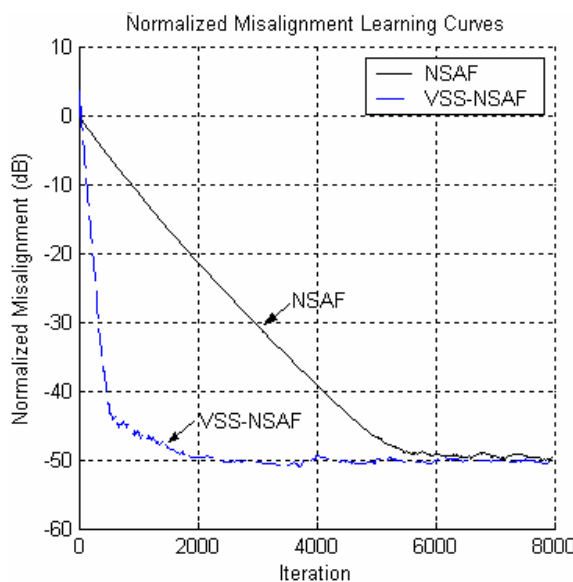
همانطور که در معادله (6) دیده می شود الگوریتم NSAF از اندازه گام ثابت،  $m$ ، برای به هنگام رسانی ضرایب استفاده می کند. برای بهبود رفتار همگرایی الگوریتم NSAF، الگوریتم جدیدی براساس اندازه گام متغیر پیشنهاد می شود. تطبیق اندازه گام در حین تطبیق ضرایب سرعت همگرایی سریع و خطای حالت دائمی کم را باعث می شود.

برای تخمین سیگنال خطای خرده باند کاهش نمونه برداری شده در الگوریتم وقتی خرده باند نرمال شده از ضرایب باند کامل فیلتر وقتی برای تطبیق استفاده شده است. به دلیل اینکه سیگنال ورودی با نویز ورودی و در نتیجه سیگنال ورودی خرده باند با نویز ورودی خرده باند نامبسته می باشد پس هر یک از خرده باندها با حداقل سازی سیگنال خطای خرده باند سعی در تخمین قسمتی از باند فرکانسی فیلتر مدلینگ دارند. اگر تطبیق اندازه گام در جهت کاهش مجموع مربع خطاهای خرده باند اجرا شود می توان انتظار داشت که به تخمین بهینه باند کامل فیلتر مدلینگ نزدیک شده ایم پس مقدار خطای باند کامل نیز کاهش می یابد. با

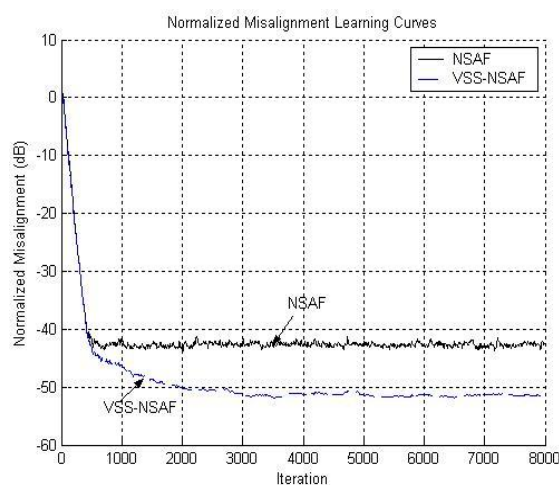
پیشنهادی به تعداد  $MN+M$  بافر اضافی نسبت به الگوریتم NSAF نیاز شده است که  $MN$  تای آن برای نگهداشتن عبارت داخل مجموع اول در خرده باندهای متفاوت و  $M$  تای آن برای نگهداشتن مجموع دوم در معادله (9) می باشد که این نیاز به بافر نیز با توجه به قیمت پایین بافر، مشکلی محسوب نمی شود.

#### 5- شبیه سازی

برای شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی VSS-NSAF از سیستم مدلینگ وقتی با تحریک ورودی  $AR(1)$  با ضرایب  $(1, -0.9)$  استفاده شده است. درجه فیلتر وقتی مدلینگ 16 می باشد. برای ساختار خرده باند از فیلتر بانک های مدوله شده کسینوسی با درجه 64 استفاده شده است که این فیلترها دارای تضعیف حداقل 60 dB در باند توقف بوده و حداقل تداخل را با یکدیگر داشته باشند. شکل 3 منحنی عدم هم تراز



شکل 3: منحنی عدم هم تراز نرمال شده برای الگوریتم NSAF و الگوریتم پیشنهادی VSS-NSAF با خطای حالت دائمی یکسان



شکل 4: منحنی عدم هم تراز نرمال شده برای الگوریتم NSAF و الگوریتم پیشنهادی VSS-NSAF با سرعت همگرایی یکسان

از رسیدن سیستم به حالت پایدار،  $m(k)$  مستقل از  $e_{i,D}(k)$  و  $\hat{u}_i(k)$  می شود بنابراین معادله (11) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$c(k+1) - c(k) = E(m^2(k) - 2m(k))E\left(\sum_{i=1}^N \frac{e_{i,D}^2}{\|\hat{u}_i(k)\|^2}\right) \quad (12)$$

واضح است که شرط لازم و کافی برای پایداری، منفی بودن امید اول در معادله بالا می باشد. با انتخاب

$$0 < m(k) < 2 \quad (13)$$

امید اول در معادله (12) منفی می شود بنابراین (13) را می توان شرط کافی برای همگرایی در متوسط مربع در نظر گرفت.

#### ب- پیچیدگی محاسباتی

الگوریتم VSS-NSAF پیشنهادی در جدول 1 خلاصه شده است. توجه کنید که یک ثابت مثبت کوچک  $d$  در معادله وقتی ضرایب فیلتر برای جلوگیری از مشکلات عددی زمانی که سیگنال ورودی بسیار کوچک است معرفی شده است. تعداد ضربها در مقایسه با الگوریتم NSAF تغییری نکرده است که این امر به مزایای این الگوریتم می افزاید. توجه شود که در این الگوریتم

جدول 1: خلاصه الگوریتم VSS-NSAF پیشنهادی

Computation	multiplications/ $T_s$
For $n=0,1,2,\dots$ at $1/T_s$ processing rate	
Band-partitioning:	
$u_i(n) = \hat{h}_i^T \hat{u}(n) \quad i=0,\dots,N-1$	NL
$d_i(n) = \hat{h}_i^T \hat{d}(n) \quad i=0,\dots,N-1$	NL
Synthesizing:	
$e(n) = \sum_{i=1}^N \hat{g}_i^T \hat{e}_i(n)$	NL

For  $k=0,1,2,\dots$  at  $1/NT_s$  processing rate

Error estimation:

$$e_{i,D}(k) = d_{i,D}(k) - \hat{w}(k) \hat{u}_i(k) \quad i=0,\dots,N-1 \quad \frac{MN}{N} = M$$

Tap-weight and step-size parameter adaptation:

$$\hat{w}(k+1) = \hat{w}(k) + m(k) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\hat{u}_i(k)}{d + \|\hat{u}_i(k)\|^2} e_{i,D}(k) \approx \frac{2MN}{N} = 2M$$

$$m(k) = m(k-1) + r \sum_{i=1}^N e_{i,D}(k) \hat{u}_i^T(k) \sum_{i=1}^N \frac{\hat{u}_i(k-1) e_{i,D}(k-1)}{\|\hat{u}_i(k-1)\|^2}$$

Parameters:

$M$ = filter length ;  $N$ = number of subbands;  $L$ = length of the analysis filters  $\hat{h}_i$  and synthesis filters  $\hat{g}_i$  ;  $d, r$  = small positive value.

A. N. Akansu and M. J. T. Smith, Eds. Boston, MA: Kluwer, 1996.

[6] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002.

[7] Kong A. Lee and Woon S. Gan, "Improving Convergence of the NLMS Algorithm Using Constrained Subband Updates", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, No. 9, Sept 2004.

[8] Y. K. Shin and J. G. Lee, "A study on the fast convergence algorithm for the LMS adaptive filter design", *Proc. IEEE*, 19(5), pp.12-19, 1985.

[9] م. مشرقی، م.ج. کهای، ب. ابوالحسنی "الگوریتم جدید خرده باند  
و فقی VS-NSAF" کنفرانس برق ایران، 2006

نرمال شده که به صورت اندازه بردار خطای ضرایب

فیلتر  $\|\mathbf{r} - \mathbf{w}(k)\|$  تقسیم بر اندازه بردار ضرایب بهینه

سیستم  $\|\mathbf{w}_o\|$  تعریف می شود، برای الگوریتم VSS-NSAF

NSAF به ازاء پارامترهای  $N=5$ ،  $m_{\max} = 0.9$  و

$r = 0.001$  را نشان می دهد. در الگوریتم NSAF، خطای

حالت دائمی 50- دسی بل، به ازاء پارامتر  $m = 0.05$  حاصل

شده است. همانطور که مشاهده می شود الگوریتم VSS-NSAF

برای خطای حالت دائمی پایین یکسان در مقایسه با NSAF سرعت همگرایی بسیار بالاتری را از خود نشان می دهد.

شکل 4 منحنی عدم هم ترازی نرمال شده برای الگوریتم NSAF

و VSS-NSAF به ازاء پارامترهای  $N=5$ ،  $m_{\max} = 0.9$  و

$r = 0.001$  را نشان می دهد. در الگوریتم NSAF،

پارامتر  $m = 1$  می باشد. همانطور که ملاحظه می شود الگوریتم

VSS-NSAF برای سرعت همگرایی یکسان با NSAF، خطای

حالت دائمی بسیار کمتری را از خود نشان می دهد.

#### 6- نتیجه گیری

در این مقاله برای بهبود رفتار همگرایی NSAF، الگوریتم

جدیدی بر مبنای اندازه گام متغیر پیشنهاد شد که برای تطبیق

اندازه گام از معیار کاهش مجموع مربع خطای خرده باند استفاده

شده است. رفتار همگرایی این الگوریتم نیز با آنالیز ریاضی اثبات

شده است. این روش جدید با توجه به نتایج شبیه سازی برای یک

خطای حالت دائمی ثابت پایین، سرعت همگرایی را افزایش و

برای یک سرعت همگرایی ثابت، خطای حالت دائمی را کاهش می

دهد. همچنین این الگوریتم دارای تعداد برابر ضرب در هر دوره

نمونه برداری نسبت به الگوریتم NSAF می باشد.

#### مراجع

[1] M. De Courville and P. Duhamel, "Adaptive filtering in subbands using a weighted criterion", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 2359-2371, Sept. 1998.

[2] S. S. Pardhan and V. E. Reddy, "A new approach to subband adaptive filtering", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 655-664, Mar. 1999.

[3] J. J. Shynk, "Frequency domain and multirate adaptive filtering", *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 9, pp. 1862-1875, Aug. 1992.

[4] A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands with critical sampling: Analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 1862-1875, Aug. 1992.

[5] P. L. De Leon and D. M. Etter, "Acoustic echo cancellation using subband adaptive filtering", in *Subband and Wavelet Transforms*,