

تفکیک پذیری بالا در تصویربرداری موج میلیمتری پسیو

سید طه سید صدر

دانشپذیر کارشناسی ارشد مخابرات

دانشکده برق، دانشگاه علم و صنعت

E-mail: STS.Sadr@Gmail.com

چکیده - با توجه به کاربردهای ویژه ی دوربینهای موج میلیمتری پسیو، امروزه نمی توان نقش آنها را در تصویربرداریهای نظامی و غیر نظامی نادیده گرفت. اشکالی که در تصویربرداری موج میلیمتری پسیو تجلی می کند این است که اطلاعات مکانی دریافت شده به شدت محدود باند هستند، به این علت استراتژیهای مختلفی برای بدست آوردن یک تفکیک پذیری بالا بکار گرفته می شود، یکی از این استراتژیها استفاده از اطلاعات اولیه ی تصویربرداری برای بهبود بخشیدن به آن است، در این مقاله ضمن نقد این روش و برشمردن مزایا و معایب آن سعی میکنیم به چالشها و راهکارهای پیش رو بپردازیم، شناخت روزه دوربین، تصویر حاصل شده و تفکیک پذیری بالا از دیگر مواردی است که به آن اشاره خواهیم نمود و در انتها بررسی روشهای معکوس و کاهش پیرامون تفکیک پذیری بالا، ارائه ی روشها و راهکارهای جدید پیرامون این موضوع از جمله مواردی است که در این مقاله به آن پرداخته شده است.

کلید واژه- تفکیک پذیری بالا ، تصویربرداری موج میلیمتری پسیو ، ناحیه ی پشتیبانی ، مقید کردن هموار ، روش کاهش

۱- مقدمه

طریق دوربین دارای تفکیک پذیری پایینی می باشد، علاوه براین استفاده از روزه ی دید خیلی بزرگ یک گزینه ی مناسب نمی تواند باشد و این مورد به علت محدودیتهای سیستم امکانپذیر نیست، در صورت امکان نیز سبب گران شدن، حجیم و سنگین شدن سیستم میگردد. در واقع تاثیر لنز یا آنتن بر روی روزه ی دید دوربین همچون عملکرد یک فیلتر پایین گذر است که به خاطر اندازه ی آنها نسبت به اندازه ی طول موج برخوردی اتفاق می افتد. قسمتهایی از صحنه که به وسیله ی سیستم تصویربرداری از بین می رود، اجزای طیفی فرکانس بالا می باشند که دقیقاً شی را در صحنه توصیف می کنند. در بخشهای بعدی به مشکلات و راهکارهای تفکیک پذیری بالا^۱، مبانی محدوده ها برای تفکیک پذیری بالا و همچنین بررسی راهکارهای جدید در این حیطه خواهیم پرداخت.

۲- معادله ی تصویر

برای سادگی ابتدا معادلات تصویربرداری را در یک بعد مورد

تصاویر بدست آمده در تصویربرداری موج میلیمتری پسیو^۱ به صورت عملی برای هوانوردی، راهنمایی و نظارت به دلیل نفوذ در مه و باران و انتشار در شب مفید و کارآمد هستند علاوه براین امواج میلیمتری با نفوذ در میان دود و بقایای آوار و همچنین با توجه به ماهیت پسیو آن، امکان عملکرد مخفی را جهت فعالیتهای تجسس و شناسایی فراهم می سازد. همچنین تصویربرداری موج میلیمتری پسیو دارای کاربردهای غیرنظامی متعدد نیز می باشد که می توان به کنترل ترافیک بزرگراهها، ناوبری زمینی با دید کم، تشخیص نشتی و لکه ی نفتی در آب دریا و ... اشاره نمود، ولی یک نقطه ضعف بزرگ برای تصویربرداری موج میلیمتری پسیو تفکیک پذیری^۲ پایین تصویر، تحت زاویه ی دید است. تفکیک پذیری به طور مستقیم با اندازه روزه ی دوربین و به طور معکوس با طول موج متناسب است. چون تشعشع موج میلیمتری پسیو دارای طول موج نسبتاً بلندی است بنابراین در مقایسه با تشعشع قابل رویت از

۱)Passive Millimeter Wave

۲)Resolution

۳)Super resolution

$$\int_w h^*(w) r^*(p-w, t) \exp\left(-j \frac{\gamma \pi}{\lambda} ct\right) dw$$

$$= \int_u \int_w h(u) h^*(w) r(p-u, t) r^*(p-w, t) du \cdot dw$$

با فرض ارگودیسیته^۳ می توان مقدار مورد انتظار از $|y(p, t)|^2$ را با انتگرال گرفتن از $I(p, t)$ در بازه ی زمانی مناسب بدست آورد [2].

$$I(p) = \langle I(p, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T I(p, t) \cdot dt$$

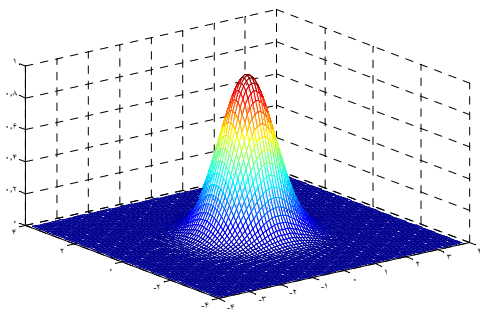
$$= E[I(p, t)]$$

$$= \int_u \int_w h(u) \cdot h^*(w) I(p-u) \delta(w-u) du \cdot dw \quad (4)$$

$$= \int_u |h(u)|^2 I(p-u) \cdot du$$

$$= |h(p)|^2 * I(p)$$

نتیجه، کانولوشن توزیع شدت جریان با مربع پاسخ ضربه سیستم است. پاسخ فرکانس مکانی روزنه ی تصویربرداری حلقوی شکل سیستم (با فرض توزیع جریان یکنواخت)، به شدت یکپارچه و همانند شکل (۱) خواهد بود.



شکل (۱) پاسخ فرکانسی یک سیستم تصویربرداری برای روزنه ی مدور با حساسیت یکنواخت

به خاطر اینکه روزنه ی دوربین دقیقاً محدود مکانی است همچنین پاسخ فرکانسی مکانی کاملاً محدود باند^۴ است، یعنی تبدیل فوریه ی آن بسیار کوچک و خارج از محدوده مکانی از بین می رود. محدوده ی فرکانسی روزنه به یک فیلتر پایین گذر مکانی از اطلاعات تصویر معادل است که تفکیک پذیری تصویر را محدود می کند. شکل پاسخ ضربه ی مکانی روزنه یا فیلتر می تواند با $G(x)$ کنترل شود.

ملاحظه قرار می دهیم. فرض کنیم که صحنه به اندازه ی کافی از روزنه دور است بنابراین جبهه ی موج^۱ از هر ساطع کننده می تواند به عنوان موج تخت الگو بگیرد، (موج تخت موجی است که سطوح هم فاز آن دسته صفحه ی موازی تشکیل می دهند). علاوه براین فرض می کنیم که تابش تک رنگ و با طول موج λ می باشد، بنابراین موج مسطح در زمان t از زاویه ی θ روزنه ی مسطح برابر با $r(p, t) \exp\left[j \frac{\gamma \pi}{\lambda} (ct + px)\right]$ می باشد که $p = \cos \theta$ ، فاصله ی موازی با روزنه ی مسطح و $r(p, t)$ دامنه ی تابع مختلط با یک زاویه ی ورود می باشد. ما فرض می کنیم که:

$$E[r(p_1, t) \cdot r^*(p_2, t)] = I(p_1) \delta(p_1 - p_2) \quad (1)$$

یک روزنه در مرکز صحنه $x=0$ در نظر بگیرید، اگر فرض کنیم که المانهای روزنه در مسیر مستقیم هستند یا برای یک زاویه ی کوچک از راستای عمود به روزنه که در صحنه وجود دارد، تاثیر جبهه ی موج بر روی المانهای روزنه در یک جابجایی x در نظر گرفته شود، جایگاه ویژه ی جبهه ی موج از روی همه ی زوایا به وسیله ی رابطه ی زیر بیان می گردد:

$$F(x, t) = G(x) \int_p r(p, t) \exp\left[j \frac{\gamma \pi}{\lambda} (ct + px)\right] dp \quad (2)$$

تابع $G(x)$ تابعی است که بهره ی المان در نقطه ی x را ارائه می دهد.

باید توجه داشته باشیم که متوسط شدت جریان $I(p)$ بیشتر از مقدار مختلط $r(p, t)$ بهره ی اطلاعات در تصویربرداری پسو را شامل می شود زیرا $r(p, t)$ به لحاظ آماری یک کمیت تصادفی مربوط به تشعشع یا دمای یک شیء است. اگر پاسخ ضربه ی مکانی (PSF)^۲ را در سیستم تصویربرداری $h(f)$ تعریف کنیم می توانیم شدت جریان لحظه ای تصویر را در سطح کانونی سیستم تصویربرداری با عبارت زیر تعریف کنیم:

$$I(p, t) = |y(p, t)|^2 \quad (3)$$

$$= \int_u h(u) r(p-u, t) \exp\left(j \frac{\gamma \pi}{\lambda} ct\right) du \cdot$$

۱) Wave front

۲) Point spread function

۳) ergodicity

۴) Band limited

۳- راهکارهای تفکیک پذیری بالا

بهبود تفکیک پذیری پیرامون پهنای باند فرکانسی مورد نظر مطلوب به شمار می رود ولی در صورت عدم شناخت اولیه از صحنه ی یک تصویر تفکیک پذیری و پردازش تصویر تقریباً غیر ممکن به نظر می رسد. فرض می کنیم که فرکانسهای بالاتر از فرکانس نایکویست صفر هستند، اگر اطلاعات اولیه درباره سیگنالها در دسترس باشد ممکن است قادر به پیش بینی فرکانسهای مکانی بالاتر از روی الگوهای مطمئنی که توسط فرکانسهای پایین بدست آمده است، باشیم. اگر این فرکانسهای بالاتر را بتوانیم منحصراً تعیین کنیم یک مجموعه ی متراکم و انبوه از نمونه های حوزه ی فرکانسی مکانی که پهنای باند بزرگتر را مشخص می کنند، ارائه می دهند. ملاحظه می شود که پیش بینی این فرکانسهای مکانی بالاتر از حیطه ی اطلاعات اولیه است. دو نوع از مرسومترین نحوه ی استحصال اطلاعات: ناحیه ی پشتیبانی^۱ و مقید کردن هموار^۲، میباشند که در ادامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۳-۱- ناحیه ی پشتیبانی

در برخی از کاربردهای معین ممکن است یک دانش ابتدایی نسبت به ناحیه ی مورد نظر داشته باشیم این تصور میتواند از روی چشم اندازه های مختلف تحقق پیدا کرده باشد، برای مثال ناحیه ی پشتیبانی اطلاعات که در تصویربرداری برای اخترشناسی مورد استفاده قرار می گیرد بسیار مفید است زیرا یک بخش بزرگ از صحنه را می توان معادل صفر در نظر گرفت. اکنون یک سوال مهم وجود دارد، برای چه گستره ای اجازه ی نتیجه گیری فرکانسهای اندازه گیری نشده، وجود دارد؟ چندین نتیجه ی مهم در رابطه با تفکیک پذیری بالا با پشتیبانی محدود وجود دارد: ابتدا افزایش تفکیک پذیری از طریق پشتیبانی محدود فقط بستگی به ناحیه ی مکانی پشتیبانی دارد و به مقدار اندازه گیری شده باند فرکانس مکانی کاری ندارد. ضمناً افزایش در تفکیک پذیری مستقل از نسبت سیگنال به نویز (SNR) است یعنی افزایش تفکیک پذیری مستقل از دامنه ی سیگنال مطلوب در هر نقطه به دامنه ی سیگنال نویز در همان نقطه می باشد. در یک چشم انداز کلی فرض می کنیم که شیء

دارای M نمونه می باشد و در بالاترین فرکانس امکان پذیر نمونه برداری دو برابر انجام می گیرد، در این حال پهنای باند با فاکتور $\frac{1}{M}$ افزایش خواهد یافت. بنابراین میتوان نتیجه گرفت که بهبود تفکیک پذیری نزدیک ناحیه ی مرز پشتیبانی بهتر از بهبود تفکیک پذیری در مرکز این ناحیه است. در برخی از تنظیمات این روش شاید خیلی سودمند جلوه کند ولی بطور کل یک راه حل عمومی برای مشکل تفکیک پذیری ارائه نمی دهد.

۳-۲- مقید کردن هموار

نوع دیگری از اطلاعات اولیه "مقید کردن هموار" می باشد یک مجموعه ی گسترده از استراتژیهای پردازش تصویر تحت این مقوله قرار می گیرد. ایده ی اولیه ی این روش جهت سوق دادن محلهای هموار و ناهموار در نواحی لبه مانند، می باشد. لبه های تصویر به طور گسترده به عنوان مبانی یک تصویر (بلوکهای ساختمانی) شناخته می شوند، شدت لبه ها در تصویر عموماً به مرزهای شیء در صحنه بستگی دارد و این موضوع به دید انسان و کامپیوتر کمک می کند. اخیراً برخی از فعالیتها نشان داده است که کلاسهای قطعی از تصاویر می تواند به طور کامل از روی علم به موقعیت لبه ها و بلندیاها بازسازی شوند. تسلط کافی به دانش لبه ها در تصاویر زنده می تواند به عنوان اطلاعات اولیه در شکل گیری تصویر با تفکیک پذیری بالا مورد استفاده قرار گیرد. روشهای زیادی برای درونیایی^۳ تصاویر بوسیله ی بهره برداری از ساختار لبه ها، بوجود آمده است، هر یک از این روشها تلاش می کند تا از شدت گسستگی ساختارهای سازگار شده حفاظت کند (لبه ها). این روشها به طور چشمگیری کیفیت تصاویر درونیایی شده را بهبود می بخشد، مانند اسپیلاینها^۴ و تابع سینک^۵ که درونیایی می شوند. تاری و تیرگی در لبه های تصویر کمتر است و درونیایی در طول لبه ها بیشتر از عرض آنها انجام می شود. این روش ها گرچه تاری و تیرگی را در لبه های تصویر کاهش می دهند و حتی در برخی از موارد حذف می کنند، اما نمی توانند سطح مناسبی از تفکیک پذیری بالا در لبه ها را از روی یک تفکیک پذیری پایین، بوسیله ی بازنمایی لبه

۱) Region of support

۲) Smoothness constraints

۳) Interpolation

۴) Splines

۵) Sinc-function

تعیین نمایند، بنابراین لبه های تصویر ممکن است خیلی آرام یا خیلی تیز در تصویر درونیایی شده تجلی پیدا کنند، همچنین این روشها نمی توانند لبه هایی را که به طور جداگانه کمتر از یک پیکسل را در صحنه ی تصویر اشغال کرده اند، تشخیص دهند بنابراین هیچ جزئیات جدیدی در فرآیند درونیایی مشخص نخواهد شد.

برخی از روشها در تشخیص و تشکیل لبه ی ساختارها در تصاویر مرمت شده، پویا تر عمل می کنند. این روشها با در نظر گرفتن اطلاعات غیرخطی و با دقت بیشتری عمل می کنند، جهت آشنایی بیشتر با این روشها معیار Smoothness متعامد را در نظر می گیریم که به یک راه حل خطی منتهی می شود. رابطه ی (۵) معادله ی تصویربرداری می باشد.

$$g = Hf + u \quad (5)$$

در حالیکه g تصویر اکتسابی، عملگر H نشان دهنده ی فیلترینگ است و تاثیر محدودیت باند بعلت محدودیت روزنه را نشان می دهد، f تصویر با تفکیک پذیری فوق العاده بالا و u نویز می باشد. با یک حداقل کننده بصورت زیر ترمیم سازی می تواند مشخص گردد [5]:

$$\Phi(f) = (g - Hf)^T (g - Hf) + \alpha f^T L^T S L f \quad (6)$$

L یک فیلتر بالاگذر همانند لاپلاسین گسسته و S یک ماتریس قطری است، ورودیهای ماتریس S تغییرات درجه ی مکانی می باشند بنابراین هر تغییری توسط ماتریس S کنترل میشود.

اکنون از عبارت $\Phi(f)$ بر حسب f مشتق گرفته و نتیجه را برابر صفر قرار می دهیم:

$$(H^T H + \alpha L^T S L) f = H^T g \quad (7)$$

اگر فرض کنیم که F عملگر تبدیل فوریه است می توانیم ماتریس L و H را به شکل حاصلضرب ماتریس قطری نمایش دهیم، بنابراین $L = F^H \tilde{L} F$ و $H = F^H \tilde{H} F$ که \tilde{L} و \tilde{H} قطری می باشند، برای سادگی از تبدیل فوریه ی یک استفاده می کنیم ($F^H F = I$):

$$(F^H \tilde{H}^H F F^H \tilde{H} F + \alpha F^H \tilde{L}^H \cdot F S F^H \tilde{L} F) f = F^H \tilde{H}^H F g \quad (8)$$

و نهایتا ساده سازی:

$$(\tilde{H}^H \tilde{H} + \alpha \tilde{L}^H \tilde{S} \tilde{L}) \tilde{f} = \tilde{H}^H \tilde{g} \quad (9)$$

بطوریکه $\tilde{S} = F S F^H$ و $\tilde{f} = F f$ و $\tilde{g} = F g$ ، \tilde{S} ماتریس بازه ی فرکانسی مورد نظر را ارائه می دهد. اگر قطر اصلی ماتریس S ثابت باشد \tilde{S} نیز مانند آن خواهد بود در این صورت ماتریس $\tilde{H}^H \tilde{H} + \alpha \tilde{L}^H \tilde{S} \tilde{L}$ نیز یک ماتریس قطری خواهد بود و هر جزء فرکانسی آن می تواند به شکل مستقل مرمت شود. اگر S ثابت نباشد، \tilde{S} قطری نخواهد بود و یک همبستگی^۱ با دقت بیشتر در اجزای فرکانسی و تصویر اصلی القا خواهد شد. می توان در نظر گرفت که تبدیل فوریه از قطر اصلی S بعنوان یک PSF، درجه ی همبستگی را در میان اجزای فرکانسی مجاور تشریح می کند، در این حالت تفکیک پذیری بالا امکانپذیر است چون اجزای فرکانسی اندازه گیری شده شامل اطلاعات اندازه گیری شده از روی اجزای خارج از پهنای باند که در پهنای باند اندازه گیری شده اند و از طریق مدل Smoothness تیره شده اند را شامل خواهد شد.

برای تصاویر معمولی نواحی بزرگ با سطح تقریبا یکسان از نواحی تیز به واسطه ی لبه ها تفکیک شده اند، این خصوصیت به یک فرکانس PSF با یک پالس بزرگ پیرامون مرکز که بوسیله ی مقادیر بسیار کوچک احاطه شده است منتهی می شود. فرکانسهای پایین در تصویر، متغیر مکانی متقابل دارند که به سرعت از روی مرکز کم رنگ و ناپدید می شوند، فرکانسهای بالا نیز در تصویر، متغیر مکانی متقابل دارند. اگر تغییرات مکانی تصویر را بوسیله ی یک اپراتور لاپلاس گسسته^۲ فیلتر کنیم سپس می توانیم توسط یک متوسط گیر هسته ی مرکزی تصویر را بدست آوریم، همانطور که ملاحظه می شود تصویر تغییرات مکانی در (ب-۲) نشان داده شده است. PSF بدست آمده نیز در تصویر (ج-۲) نشان داده می شود. باید توجه داشت که PSF به سرعت از مرکز جدا و ناپدید می گردد.

درجه ی تفکیک پذیری بالا بطور مستقیم به گستره ی فرکانسی PSF مربوط می شود، همانطور که PSF از مبدا دور و ناپدید می شود، مقدار متوسط نویز اندازه گیری شده در

۱) Correlation

۲) Discrete

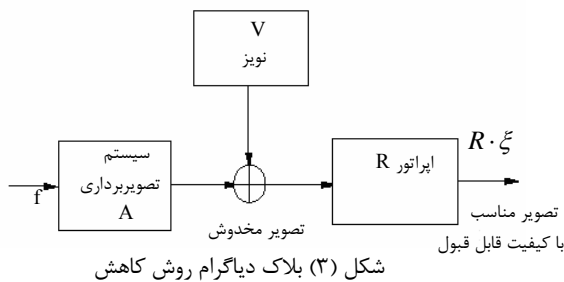
۳-۳- استفاده از روشهای معکوس^۲

روشهای معمول در مورد تصویربرداری موج میلیمتری به علت گسستگی تشعشع گرمایی دریافت شده بوسیله ی رادیومترهای مورد استفاده قرار گرفته نمی تواند به کار گرفته شود، بنابراین در این موارد می توان از روشهای معکوس در اندازه گیریهای دامنه بوسیله ی پردازش استفاده نمود.

$$\xi = A \cdot f \quad (10)$$

اگر f تصویر صحیح باشد، A یک اپراتور است که مدل سیستم اندازه گیری را تعریف می کند و ξ اندازه گیریهای رادیومتر دوربین موج میلیمتری پسیو می باشد. هدف پیدا کردن اپراتور معکوس R است برای اینکه، $R \cdot \xi$ تصویر صحیح f را با بهترین اندازه تولید کند، باید:

$$f = R \cdot \xi \quad (11)$$



همانطور که ملاحظه می گردد اطلاعات صحیح صحنه بوسیله ی بردار f ارائه می گردد، اطلاعات اندازه گیری شده صحنه بوسیله ی بردار ξ ارائه می شود، V نویز، سیستم تصویربرداری بوسیله ی اپراتور A و مدل سیستم مفروض توسط بردار R ارائه می گردد. اطلاعات اندازه گیری شده از صحنه (ξ) با توجه به شکل (۳)، بوسیله ی رابطه ی (۱۲) بیان می گردد.

$$\xi = A \cdot f + V \quad (12)$$

خروجی سیستم مفروض R برابر است با:

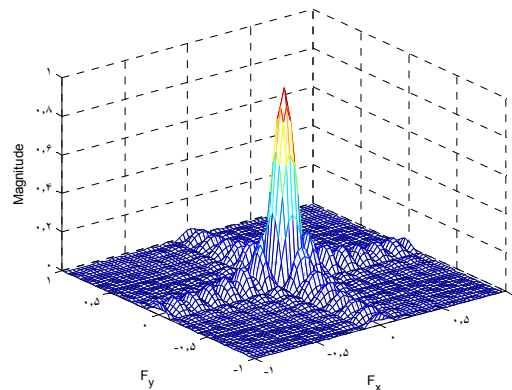
$$R \cdot \xi = R \cdot A \cdot f + R \cdot V \quad (13)$$

هدف اصلی از استفاده ی این روش (روش کاهش)^۳ پیدا کردن یک اپراتور همانند R است به شکلی که بتواند عبارتهای زیر را تحقق دهد[4].



(الف)

(ب)



(ج)

شکل (۲) الف- تصویر اصلی، ب- تصویر متغیر مکانی، ج- PSF شکل داده شده بوسیله ی \tilde{S}

یک فرکانس به سرعت اطلاعات فرکانسی را در نواحی اندازه گیری شده تحت نفوذ خود قرار خواهد داد، علاوه بر این فرکانسهای اندازه گیری شده نزدیک به ناحیه ی مرزی پهنای باند، بطور قابل ملاحظه ای تضعیف شده هستند و ترمیم اجزای اندازه گیری شده را مشکل تر می سازند.

برای فایق آمدن بر محدودیتهای ناحیه ی پشتیبانی، ظرفیتهای تفکیک پذیری بالا از پهنای باند اندازه گیری شده مستقل است و فرض می شود که به شکل قابل قبولی باند پهن^۱ است، یعنی قابلیت گسترده ای برای ارسال و دریافت فرکانسها دارد. از آنجایی که PSF به سرعت تضعیف می شود فقط یک درجه ی کوچک از تفکیک پذیری بالا با استفاده از این شیوه قابل استحصال است. بیشتر روشهای پویا ممکن است بهبود حاشیه ای فراهم کنند ولی بطور کلی ظرفیت برای تفکیک پذیری تصاویری که از این کلاس استفاده می کنند، محدود است.

۱) Wide Band

۲) Inversion Method

۳) Reduction Method

استراتژیهای پردازش تصویر می تواند باشد، همچنین در مواردی که داشتن اطلاعات اولیه از صحنه مقدور نیست استفاده از روشهای معکوس پیشنهاد می شود بهبود تفکیک پذیری تصویر توسط روشهای ریاضیاتی، که به آنها نیز اشاره نمودیم.

سپاسگزاری

بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ اساتید بزرگوار و گرامی دانشکده ی برق دانشگاه علم و صنعت سپاسگزاری و قدردانی و نمایم.

مراجع

[۱] سید طه سیدصدر، "بررسی و تحلیل چگونگی استفاده از امواج میلیمتری در سیستمهای تصویربرداری پیشرفته ی نظامی و انتظامی"، پایان نامه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری، شهریور ۱۳۸۴

[۲] سام شانموگان، آرتور بریپول، دکتر محمد رضا عارف، "سیگنالهای تصادفی" مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۷۷

[۳] سید طه سیدصدر، مرتضی کازرونی، "طراحی یک دوربین موج میلیمتری پسیو در باند فرکانسی W"، هشتمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق، دانشگاه شهید باهنر کرمان، شهریور ۱۳۸۴

[4] Y.A.Pirogor & M.F.Attia & V.V.Gladun, "Super Resolution in Millimeter-wave Imaging Technology" SPIE Vol.3064

[5] S.J.Reeres, "An Analysis of the Difficulties and Possibilities for Superresolution", SPIE Vol.3064

[6] I.M.Blankson, "Passive Millimeter wave Imaging with Super Resolution", University of Mnnnesota, May 2001

$$\|RV\|^2 \leq \varepsilon \quad (14)$$

$$\min_R \left\{ \frac{\|R \cdot A - E\|^2}{\|R \cdot V\|^2} \leq \varepsilon \right\} \leq \delta \quad (15)$$

ε حداکثر مقدار نویز، δ حداکثر خطای مجاز بین E و RA می باشد و E ماتریس یکه می باشد.

اپراتور R باید به گونه ای انتخاب شود که عناصر تبدیل شده به بردارهای "e" را به صورت مستقل پردازش نموده و ارزش معادل آنها را متقابلاً بدست آورد.

$$A \cdot f = g + e \quad (16)$$

$$RAf = Rg + Re \quad (17)$$

برای به حداقل رساندن عبارت $(f^T \cdot H \cdot f)$ ، در رابطه ی (۱۷) باید:

$$|Re|^2 = \varepsilon^2 = \text{constant} \quad (18)$$

اپراتور R باید دارای یک ویژگی مهم دیگر نیز باشد، نسبت سیگنال به نویز (SNR) بیشتر از ۳ به ۱ و ترجیحاً بهتر است ۵ به ۱ باشد [6,4].

$$f = (A^T A + \gamma H)^{-1} A^T g \quad (19)$$

$$H \rightarrow I \quad (20)$$

$$f = (A^T A + \gamma I)^{-1} A^T g \quad (21)$$

$$f = (A^T R^{-1} R^{-1} A + \gamma I)^{-1} A^T R^{-1} R^{-1} g \quad (22)$$

۴- خلاصه و نتیجه گیری

محدودیتهای ذاتی تفکیک پذیری بالا را مورد بررسی قرار داده و دیدیم استفاده از اطلاعات اولیه در تصویربرداری به تفکیک پذیری بالا در تصویر کمک می کند ولی این قابلیت به طور کلی محدود است، از طرف دیگر اطلاعات اولیه میتواند در گسترش پهنای موثر در ناحیه ی فرکانس مکانی اندازه گیری شده، بسیار مفید باشد. همچنین بهینه سازی تابع حساسیت روزنه را برای افزایش نسبت سیگنال به نویز بالاتر پیشنهاد نمودیم و دیدیم که بهترین راه و روش برای تفکیک پذیری بالا ترکیبی ابتکاری از اطلاعات اولیه و