# تعیین مرتبه MA در مدل ARMA دوبعدی با استفاده از همبستگی نمونه ها

مهدیه سادات سعدآبادی، مسعود شفیعی و مهدی کراری

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی برق

m_sadabadi@aut.ac.ir mshafiee@aut.ac.ir karrari@aut.ac.ir

**چکیده – در این مقاله نشان داده می شود که اطلاعات مرتبه *MA* در مدل *ARMA* دو بعدی، به طور ضمنی در یک ماتریس همبستگی، مخفی است و الگوریتمی برای تعیین مرتبه *MA* در مدل *ARMA* دو بعدی مطرح شده است. در روش ارائه شده، فرض می شود که مدل دوبعدی، علّی، پایدار، خطی و غیر متغیر با شیفت است. شبیه سازیهای انجام شده، عملکرد مطلوب این الگوریتم را در تعیین مرتبه نشان می دهند.**

کلید واژه- تعیین مرتبه مدل دو بعدی، مدل AR دو بعدی، مدل ARMA دو بعدی، مدل MA دو بعدی.

## ۱- مقدمه

تخمین پارامترهای یک مدل دو بعدی همانند مدل AR و مدل ARMA دو بعدی، یک هدف اساسی در شناسایی و مدلسازی سیستم های دو بعدی می باشد. این مسئله به خاطر کاربردهای گسترده اش در زمینه های مختلف از قبیل شناسایی سیستم های دو بعدی [1]، تخمین طیفی دو بعدی [2-4]، مدلسازی تصویر [5] و ... بسیار مورد توجه است. تکنیکهای متعددی برای حل این مسئله، ارائه شده اند ولی در اکثر آنها فرض می شود که مرتبه مدل از قبل مشخص است. با این وجود، در کاربردهای عملی، مرتبه مدل نامعلوم است و بایستی تعیین گردد.

واضح است که انتخاب مرتبه مدل، اولین مرحله کلیدی به سمت مدلسازی و تخمین پارامترهای مدل می باشد. در حالت یک بعدی، تکنیکهای متعددی برای تعیین مرتبه مدل ارائه شده اند ولی با این وجود، در حالت دو بعدی، تحقیقات اندکی صورت گرفته که اکثر آنها به تعیین مرتبه مدل AR دو بعدی می پردازند. به طور کلی، این روشها را می توان به دو دسته کلی روشهای مبتنی بر شاخص اطلاعات و روشهای مبتنی بر جبر خطی تقسیم بندی نمود [6-8].

در زمینه روشهای مبتنی بر شاخص اطلاعات، معیار AIC و MDL را می توان نام برد. در این معیارها، هدف حداقل کردن عبارتی است که به واریانس خطا و تعداد پارامترهای آزاد مدل وابسته است و مرتبه ای که کمترین مقدار این عبارت را نتیجه دهد به عنوان بهترین تخمین از مرتبه مدل، در نظر گرفته می شود. یکی از معایب معیار AIC یا MDL آن است که در این معیارها بایستی پارامترهای متناظر با تمامی ساختارهای ممکنه برای مدل، تخمین زده شوند، از این رو، پیاده سازی این معیارها، زمان بر می باشد [6].

الگوریتم های مبتنی بر تعیین رتبه ماتریس های خاص، مثالی از روشهای مبتنی بر جبر خطی برای تعیین مرتبه مدل است [7-8].

در یک فرایند ARMA، تعیین مرتبه MA مشکل تر است [9]. در این مقاله، نشان داده شده است که پس از تعیین مرتبه AR مدل ARMA دو بعدی، مرتبه MA را می توان به کمک تجزیه مقادیر منفرد یک ماتریس همبستگی تعیین نمود. در روش جدید نیازی به تخمین

پارامترهای مدل نمی باشد. شبیه سازیهای انجام شده، عملکرد مطلوب این الگوریتم را در تعیین مرتبه MA نشان می دهند.

در این مقاله، فرمول بندی مسئله و الگوریتم اصلی به ترتیب در بخشهای ۲ و ۳، آورده شده اند. نتایج شبیه سازیهای انجام شده، در بخش ۴ ظاهر شده اند و نهایتاً، بخش ۵، بخش نتیجه گیری است.

## ۲- فرمول بندی مسئله

سیستم دو بعدی علّی، پایدار، خطی و غیر متغیر با شیفت که به صورت زیر توصیف می شود، در نظر بگیرید [6].

$$\sum_{i_1=0}^{p_1^*}\sum_{i_2=0}^{p_2^*} a_{i_1,i_2}\, y_{t_1-i_1,t_2-i_2} = \sum_{j_1=0}^{q_1^*}\sum_{j_2=0}^{q_2^*} b_{j_1,j_2}\, e_{t_1-j_1,t_2-j_2} \quad (۱)$$

که در آن، $(p_1^*, p_2^*)$ و $(q_1^*, q_2^*)$ به ترتیب مرتبه مدل AR و MA می باشند. فرض کنید که شرایط زیر برقرار است:

فرض ۱: $a_{0,0}=1$ و سیگنال ورودی $e_{t_1,t_2}$، یک ورودی سمج است (Persistent Exitation) به گونه ای که تمامی مدهای سیستم را تحریک کند.

فرض ۲: $a_{p_1^*,p_2^*} \neq 0$ ، $b_{q_1^*,q_2^*} \neq 0$ .

## ۳- روش مبتنی بر تست رتبه ماتریس کواریانس، جهت تعیین مرتبه MA در مدل ARMA دو بعدی

در ابتدا، قضیه اصلی جهت تعیین مرتبه MA مطرح می شود. فرض کنید که مرتبه AR $(p_1, p_2)$ در مدل ARMA دو بعدی، موجود است.

**قضیه:** فرض کنید که $p_1$ و $p_2$ موجود است و $q_{e_1} \geq q_1$ و $q_{e_2} \geq q_2$ می باشد. همچنین فرض کنید که $R_{1_e}$ یک ماتریس $[(p_1+1)(p_2+1)] \times [(p_1+1)(p_2+1)]$ است که به صورت رابطه (۲) تعریف می شود.

$$R_{1_e} = \begin{bmatrix} R_{q_{e_1}-p_1} & R_{q_{e_1}-p_1+1} & \cdots & R_{q_{e_1}} \\ R_{q_{e_1}-p_1+1} & R_{q_{e_1}-p_1+2} & \cdots & R_{q_{e_1}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{q_{e_1}} & R_{q_{e_1}+1} & \cdots & R_{q_{e_1}+p_1} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$R_{q_{e_1}-p_1+i} = \begin{bmatrix} r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}-p_2} & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}-p_2+1} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}} \\ r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}-p_2+1} & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}-p_2+2} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}} & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}+1} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,q_{e_2}+p_2} \end{bmatrix}$$

$$i = 0,1,\ldots,2p_1$$

که در آن، $r_{l_1,l_2} = E[y_{t_1,t_2}\; y_{t_1-l_1,t_2-l_2}]$ تابع خودهمبستگی داده های خروجی $\{y_{t_1,t_2}\}$ است. آن گاه

$$rank(R_{1_e}) = \begin{cases} (p_1+1)(p_2+1)-1 & when \quad q_{e_1} > q_1 \\ (p_1+1)(p_2+1) & when \quad q_{e_1} = q_1, q_{e_2} = q_2 \end{cases}$$

اثبات:

در ابتدا فرض کنید که $q_{e_1} > q_1$ است. در این حالت، بایستی ثابت کرد که $rank(R_{1_e}) = (p_1+1)(p_2+1)-1$. برای مدل ARMA دو بعدی (۱)، معادلات MYW در حالت دو بعدی، به صورت زیر بیان می شوند [4].

$$\sum_{i_1=0}^{p_1}\sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1,i_2}\, r_{l_1-i_1,l_2-i_2} = \begin{cases} 0 & for \quad (l_1 > q_1)\ or/and\ (l_2 > q_2) \\ \sigma_e^2 \sum_{j_1=0}^{q_1}\sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1,j_2}\, h_{j_1-l_1,j_2-l_2} & o.w. \end{cases} \quad (۵)$$

که در آن، $h_{j_1,j_2}$ پاسخ ضربه سیستم است. به دلیل علی بودن سیستم، برای $j_1 < 0$ و یا $j_2 < 0$، پاسخ ضربه سیستم برابر صفر است.

با در نظر گرفتن $l_1 = q_{e_1}, q_{e_1}+1, \ldots, q_{e_1}+p_1$ و $l_2 = q_{e_2}, q_{e_2}+1, \ldots, q_{e_2}+p_2$، معادلات MYW را می توان به فرم ماتریسی زیر بیان نمود.

$$R_{1_e}\, \underline{a} = \underline{0} \quad (۶)$$

که در آن، $\underline{a}$ بردار ضرایب AR است که به صورت رابطه (۷) تعریف می شود.

$$\underline{a} = [a_{p_1,p_2} \ldots a_{p_1,0}\, a_{p_1-1,p_2} \ldots a_{p_1-1,0} \ldots a_{0,1}\, 1]^T \qquad (۷)$$

و $\underline{0}$ بردار صفر با ابعاد $1\times(p_2+1)(p_1+1)$ می باشد. تحت فرضیات (۱) و (۲)، نمایش معادله MYW یکتا است [10]. این ایجاب می کند که فضای تهی ماتریس $R_{1_e}$ دارای بعد یک باشد. از طرف دیگر، با توجه به قضایای موجود در جبرخطی، اگر $A$ ماتریسی با ابعاد $m\times n$ باشد رتبه ماتریس $A$، برابر $r = n - \dim(\mathrm{N}(A))$ است که در آن، $\dim(\mathrm{N}(A))$ بعد فضای تهی ماتریس $R_{1_e}$ می باشد. از این رو، داریم:

$$rank(R_{1_e}) = (p_1+1)(p_2+1) - 1$$

اکنون، حالت دوم را در نظر بگیرید که $q_{e_1} = q_1$ و $q_{e_2} = q_2$ است. در این حالت باید ثابت نمود که $rank(R_{1_e}) = (p_1+1)(p_2+1)$.

در این حالت، $l_1 = q_{e_1}, q_{e_1}+1, \ldots, q_{e_1}+p_1$ و $l_2 = q_{e_2}, q_{e_2}+1, \ldots, q_{e_2}+p_2$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $q_{e_1} = q_1$ و $q_{e_2} = q_2$ است، معادلات MYM در رابطه (۵) به فرم ماتریسی زیر قابل بیان است.

$$R_{1_e}\, \underline{a} = \underline{v} \qquad (۸)$$

که در آن، $\underline{a}$ بردار ضرایب AR است که قبلاً تعریف شده است و بردار $\underline{v}$ به صورت زیر می باشد.

$$\underline{v} = [\sigma_w^2\, b_{0,0}\, b_{q_1,q_2}\; 0\; 0 \ldots\; 0]^T \qquad (۹)$$

با فرض $b_{0,0} \neq 0$، $\underline{v}$ بردار غیر صفر است. یکتا بودن بردار $\underline{a}$ ایجاب می کند که ماتریس $R_{1_e}$ رتبه کامل داشته باشد. از این رو، $rank(R_{1_e}) = (p_1+1)(p_2+1)$.

اطلاعات مرتبه MA در مدل ARMA دو بعدی، به طور ضمنی در یک ماتریس همبستگی، مخفی است. در تئوری، مرتبه $(q_1, q_2)$ ممکن است به صورت زیر تعیین شود: با $Q_1 = q_{e_1} > q_1$ و $Q_2 = q_{e_2} > q_2$ شروع کنید. به طور متوالی، یک واحد از $Q_1$ و $Q_2$ کم کنید و برای تعیین رتبه $R_{1_e}$ از تجزیه مقادیر منفرد (SVD) استفاده کنید. اولین تغییر رتبه ماتریس $R_{1_e}$ را از $(p_1+1)(p_2+1)-1$ به $(p_1+1)(p_2+1)$ به دست آورید. در این حالت، $Q_1 = q_1$ و $Q_2 = q_2$ خواهد بود. بدین ترتیب، مرتبه MA به دست خواهد آمد. شبیه سازیها، نشان می دهند که زمانی که خودهمبستگی های مدل دقیق مورد استفاده قرار می گیرند نتایج دقیق است و $(p_1+1)(p_2+1)$امین مقدار منفرد از صفر به یک مقدار غیر صفر (که معمولاً یک مقدار خیلی کوچک است) سوئیچ خواهد کرد. از این رو، زمانی که خودهمبستگی نمونه ها مورد استفاده قرار می گیرد تعیین تغییر از رتبه $(p_1+1)(p_2+1)$ به رتبه $(p_1+1)(p_2+1)-1$ در ماتریس $R_{1_e}$، مشکل است. جهت توسعه یک الگوریتم عملی برای تعیین مرتبه MA بر مبنای خودهمبستگی نمونه ها، از تغییر مقدار منفرد در ماتریس $R_{2_e}$ که به صورت زیر تعریف می شود، استفاده می شود.

$$R_{2_e} = \begin{bmatrix} R_{q_{e_1}-p_1} & R_{q_{e_1}-p_1+1} & \cdots & R_{q_{e_1}-p_1+p_{e_1}} \\ R_{q_{e_1}-p_1+1} & R_{q_{e_1}-p_1+2} & \cdots & R_{q_{e_1}-p_1+p_{e_1}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{q_{e_1}-p_1+t_1-1} & R_{q_{e_1}-p_1+t_1} & \cdots & R_{q_{e_1}-p_1+t_1+p_{e_1}-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$p_{e_1} \geq p_1\ ,\ p_{e_2} = p_2\ ,\ t_1 > p_{e_1}\ ,\ t_2 > p_{e_2}$$

$$R_{q_{e_1}-p_1+i} = \begin{bmatrix} r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2} & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+1} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+p_{e_2}} \\ r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+1} & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+2} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+p_{e_2}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+t_2-1} & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+t} & \cdots & r_{q_{e_1}-p_1+i,\,q_{e_2}-p_2+t_2+p_{e_2}-1} \end{bmatrix}$$

$$i = 0, 1, \ldots, t_1 + p_{e_1} - 1$$

با بکارگیری معادلات MYW، می توان نشان داد که

$$rank(R_{2_e}) = rank(R_{1_e}) + p_2(p_{e_1} - p_1) \qquad (۱۱)$$

بنابراین، الگوریتم تعیین مرتبه MA را می توان به صورت زیر خلاصه نمود.

مرحله ۱: $Q_1 = q_{e_1} > q_1$ و $Q_2 = q_{e_2} > q_2$ را انتخاب کنید.

مرحله ۲: به طور متوالی یک واحد از $Q_1$ و $Q_2$ کم کنید. ماتریس $R_{2_e}$ را تشکیل دهید و مقادیر منفرد آن را محاسبه نمایید.

مرحله ۳: اگر در ماتریس $R_{2_e}$، مقدار منفرد $(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)$ام یک تغییر واضح داشت آن گاه، $q_1 = Q_1$ و $q_2 = Q_2$ انتخاب می شود. در غیر این صورت، به مرحله دوم بر گردید و مراحل بالا را ادامه دهید تا $q_1, q_2$ انتخاب گردد.

چندین نکته در ارتباط با الگوریتم در زیر آورده شده است.

نکته ۱: در این الگوریتم، تعیین مرتبه MA، تنها به مرتبه AR بستگی دارد و نیازی به ضرایب AR نیست. به عبارت دیگر، مرتبه های AR و MA را می توان به طور مستقل و قبل از تخمین پارامترها تعیین نمود.

نکته ۲: از آنجا که $q_2, q_1$ مجهول می باشند تعیین $q_{e_1} \geq q_1$ و $q_{e_2} \geq q_2$ مشکل است. در عمل، برای مدلهای ARMA $(p_1, p_2, q_1, q_2)$ با $p_1, p_2 \geq q_1, q_2$، کافی است که $q_{e_1} > p_1$ و $q_{e_2} > p_2$ انتخاب شود و یا $Q_1 = q_{e_1} = p_1 + 1$ و $Q_2 = q_{e_2} = p_2 + 1$.

نکته ۳: اساس این الگوریتم، تعیین نقطه تغییر در مقدار منفرد $(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)$ام در مرحله ۳ است. بواسطه استفاده از خودهمبستگی نمونه ها، این مقدار منفرد در حالت $Q_1 = q_{e_1} > q_1$ و یا $Q_2 = q_{e_2} > q_2$، صفر نخواهد بود. به عنوان یک قانون برای تعیین تغییر، استفاده از معیارهای زیر پیشنهاد می شود.

$$\alpha_1 = \frac{\delta^{(Q_1,Q_2)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)} - \delta^{(Q_1+1,Q_2)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)}}{\delta^{(Q_1+1,Q_2)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)}} \quad (۱۲)$$

$$\alpha_2 = \frac{\delta^{(Q_1,Q_2)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)} - \delta^{(Q_1,Q_2+1)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)}}{\delta^{(Q_1,Q_2+1)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)}} \quad (۱۳)$$

که در آن، $\delta^{(Q_1,Q_2)}_{(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)}$ مقدار منفرد $(p_1+1)(p_2+1)+p_2(p_{e_1}-p_1)$ام متناظر با $Q_1, Q_2$ است. اگر $\alpha_1$ و $\alpha_2$ از حد تعیین شده ای $(\beta_1, \beta_2)$، بزرگتر باشد آن گاه، $Q_1, Q_2$ به عنوان نقطه تغییر در نظر گرفته می شوند.

## ۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش، از الگوریتم مطرح شده در بخش قبل، برای تعیین مرتبه MA مدل ARMA دو بعدی استفاده شده است. نتایج شبیه سازیهای انجام شده، عملکرد مطلوب این الگوریتم را در تعیین مرتبه نشان می دهند. در مدل مورد بررسی، ورودی $e_{t_1,t_2}$، نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است. و تابع خود همبستگی $\hat{r}_{l_1,l_2}$ به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\hat{r}_{l_1,l_2} = \frac{1}{N_1 N_2 - 1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} y_{n_1,n_2}\, y_{n_1+l_1,n_2+l_2}$$
$$l_1, l_2 = 0, 1, \ldots$$

که در آن، $N_1 N_2$ تعداد داده های نمونه برداری شده است به گونه ای که $t_1 = 0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1$ و $t_2 = 0, 1, 2, \ldots, N_2 - 1$).

سیستم مورد بررسی به صورت زیر، در نظر گرفته شده است.

$$y_{t_1,t_2} = 0.9 y_{t_1-1,t_2} + 0.9 y_{t_1,t_2-1} - 0.81 y_{t_1-1,t_2-1} + e_{t_1,t_2} - 0.8 e_{t_1-1,t_2}$$

مدل فوق، یک مدل دو بعدی پایدار با مرتبه AR (۱و۱) و مرتبه MA (. و۱) است $(p_1 = 1, p_2 = 1, q_1 = 1, q_2 = 0)$.

در این مثال، $p_{e_1} = 4$ , $p_{e_2} = 1$ , $t_1 = 6$ , $t_2 = 6$ , $Q_1 = p_1 + 1 = 2$ ، $Q_2 = p_2 + 1 = 2$ و $N_1, N_2 = 100$ در نظر گرفته شده اند. با توجه به مقادیر $p_{e_2}, p_{e_1}$، ماتریس $R_{2_e}$ دارای ۱۰ مقدار منفرد است. مقادیر $\alpha_1$، $\alpha_2$ و مقادیر منفرد ماتریس $R_{2_e}$ به ازای تمامی $Q_1, Q_2$، به ترتیب در جداول I، II و III آورده شده است.

در این مثال، $\beta_1 = 50\%, \beta_2 = 50\%$ انتخاب شده است. $Q_1, Q_2$ با توجه به مقادیر $\beta_1, \beta_2$ متناظر با $\alpha_1, \alpha_2$ تعیین می گردند. با توجه به جداول I و II و الگوریتم مطرح شده در بخش سوم، مرتبه MA در این مدل برابر (. و۱) است.

جدول I: مقادیر $\alpha_1$

| $\alpha_1$ | | $Q_1$: ۱ | $Q_1$: ۰ |
|---|---|---|---|
| $Q_2$ | ۱ | -۵/۶ | ۲۷/۵۴ |
| | ۰ | *۲۳۲/۴۵ | ۱۳۶/۷ |

جدول II: مقادیر $\alpha_2$

| $\alpha_2$ | | $Q_1$: ۱ | $Q_1$: ۰ |
|---|---|---|---|
| $Q_2$ | ۱ | ۱۳/۹ | ۱۹/۳۶ |
| | ۰ | *۲۸۶/۲۲ | ۶۱۶/۷۹ |

جدول III: مقادیر منفرد ماتریس $R_{2_e}$ به ازای مقادیر $Q_1, Q_2$

| $Q_1=2$ | | | $^*Q_1=1$ | | | $Q_1=0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_2=2$ | $Q_2=1$ | $Q_1=0$ | $Q_2=2$ | $^*Q_2=1$ | $^*Q_2=0$ | $Q_2=2$ | $Q_2=1$ | $Q_2=0$ |
| ۵/۷ | ۶/۲ | ۶/۶۱ | ۱۵/۴۵۸ | ۱۷/۳۹ | ۱۸/۹۸ | ۱۷/۲۳ | ۱۹/۴۸ | ۲۱/۳۲ |
| ۱/۶ | ۱/۷ | ۱/۷۶ | ۴/۲۸۶ | ۴/۶۲۲ | ۴/۸۷۶ | ۱۳/۲۵ | ۱۴/۷۸ | ۱۶/۰۶ |
| ۱/۱۸ | ۱/۱۸ | ۱/۱۷۸ | ۱/۳۶۵ | ۱/۳۸۲ | ۱/۳۸ | ۳/۳۸ | ۳/۶۳ | ۳/۸۱ |
| ۰/۹۳ | ۰/۸۷ | ۰/۸۰۸ | ۰/۹۲۷ | ۰/۸۵۳ | ۱/۰۳۳ | ۱/۲۳۶ | ۱/۲۳۶ | ۱/۲۲۸ |
| ۰/۶۱ | ۰/۵۸ | ۰/۵۵۶ | ۰/۸۶۶ | ۰/۸۱۱ | ۰/۷۵۲ | ۰/۸۲۲ | ۰/۷۴۵8 | ۱/۱۷۵ |
| ۰/۱۵ | ۰/۱۴۸ | ۰/۴۲ | ۰/۱۴۹ | ۰/۱۵ | ۰/۷۴۱ | ۰/۱۳۲ | ۰/۱۳۳ | ۰/۷۷ |
| ۰/۰۶۶ | ۰/۰۷۵ | ۰/۰۸۲ | ۰/۰۶۲ | ۰/۰۷ | ۰/۲۷۳ | ۰/۰۷۵ | ۰/۰۹ | ۰/۶۴ |
| ۰/۰۵۵۶ | ۰/۰۵۱ | ۰/۰۶۸۷ | ۰/۰۵۸ | ۰/۰۵۸ | ۰/۰۶ | ۰/۰۵۸ | ۰/۰۶۶ | ۰/۱۹۲ |
| ۰/۰۴۵ | ۰/۰۴۷ | ۰/۰۴۵ | ۰/۰۴۳ | ۰/۰۳۸ | ۰/۰۴۴ | ۰/۰۵۱ | ۰/۰۴۵ | ۰/۰۵۷ |
| ۰/۰۳۸ | ۰/۰۳۷ | ۰/۰۳۶۸ | ۰/۰۳۶ | ۰/۰۳۷ | ۰/۰۳۸ | ۰/۰۴ | ۰/۰۴۱ | ۰/۰۴۱ |

همانطور که در جدول III، مشاهده می کنید، تغییر واضح در مقدار منفرد هفتم ماتریس $R_{2_e}$ به ازای $Q_1=1$ و $Q_2=0$ رخ داده است. از این رو، مرتبه صحیح MA در مدل ARMA دو بعدی مورد بررسی، برابر $q_1=1, q_2=0$ می باشد.

سمبل * در جداول، نشان دهنده $Q_1, Q_2$ متناظر با مرتبه صحیح مدل MA است.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده شده است که اطلاعات مرتبه MA در مدل ARMA دو بعدی، به طور ضمنی در یک ماتریس همبستگی، مخفی است و الگوریتمی برای تعیین مرتبه MA مدل ARMA دو بعدی با استفاده از خود همبستگی نمونه ها و مرتبه AR و بدون نیاز به ضرایب AR ارائه شده است. در روش مطرح شده، فرض می شود که مدل دوبعدی، علّی، پایدار، خطی و غیرمتغیر با شیفت است. شبیه سازی کامپیوتری، ارزش واقعی روش مطرح شده را در تعیین مرتبه مدل MA نشان می دهند.

## مراجع

[1] H. Li, W. Sun, P. Stoica and J. Li , "Two- Dimensional System Identification using Amplitude Estimation", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 9, No. 2, pp. 61-63, February 2002.

[2] P. Kiernan, "Two-Dimensional AR Spectral Estimation using a Two Dimensional Minimum Free Energy Method", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, pp. 3075-3081, Dec. 1995.

[3] J. A. Cadzow and K. Ogino, "Two-Dimensional Spectral Estimation", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-29, pp. 396-401, June 1981.

[4] X.-D. Zhang and J. Cheng, "High Resolution Two-Dimensional ARMA Spectral Estimation", IEEE Trans. Signal Processing, avol. 39, pp. 765-770, March. 1991.

[5] A. Rosenfeld, Image Modeling. New York: Academic, 1981.

[6] B. Aksasse and L. Radouane, " Two- Dimensional Autoregressive (2-D AR) Model Order Estimation", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2072-2077, July 1999.

[7] B. Aksasse, L. Badidi, and L. Radouane, "A Rank Test Based Approach to Order Estimation- Part I: 2-D AR Models Application", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2069-2072, July 1999.

[8] S. Rital, A. Meziane, M. Rziza, and D. Aboutajdine, "Two-Dimensional Non-Gaussian Autoregressive Model Order Determination", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 9, no. 12, pp. 426-428, December 2002.

[9] X-D. Zhang and Y-S Zhang, "Determination of the MA Order of an ARMA Process Using Sample Correlations", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 6, pp. 2277-2280, June 1993.

[10] W. Gerscg, "Estimation of the Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving Average Time Series", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-15, pp. 583-585, October 1970.