

مقاوم‌سازی بهره موثر مدل پیش‌بین در کنترل‌کننده GPC برای فرآیندهای خطی ناپایدار

مهدی یعقوبی و محمد حائری

واحد مشهد دانشکده برق

دانشگاه آزاد اسلامی دانشگاه صنعتی شریف

E-mail: haeri@sina.sharif.edu yaghobi@mshdiau.ac.ir

چکیده - کنترل برخی از فرآیندهای ناپایدار با روش‌های موجود از خانواده کنترل‌کننده‌های پیش‌بین امکان‌پذیر نیست. نشان می‌دهیم که یکی از علل آن، وابسته بودن بهره موثر مدل پیش‌بین به جهت اعمال ورودی‌ها علاوه بر تغییرات ورودی‌ها است. تغییرات گسترده بهره موثر مدل پیش‌بین در فرآیندهای حلقه باز ناپایدار، حساسیت مدل به تغییرات ورودی‌ها و چگونگی تاثیر آنها بر خروجی را افزایش می‌دهد و سبب می‌شود که مساله بهینه‌سازی در تعیین ورودی‌های کنترل‌کننده عملی نباشد و علیرغم وجود حلقه بسته‌ای از فرآیند و کنترل‌کننده، سیستم بصورت حلقه‌باز عمل کند. معیاری برای مقاوم‌سازی مدل پیش‌بین با پارامترهای کنترل‌کننده پیشنهاد می‌شود و سپس چگونگی مقاوم‌سازی محاسبات مدل پیش‌بین با این پارامترها را ارائه می‌دهیم.

کلید واژه- پایداری، عملی بودن، کنترل‌کننده GPC

۱- مقدمه

گرفته است. در این مقاله معیاری برای تشخیص این موضوع بر حسب پارامترهای کنترل‌کننده ارائه و سپس چگونگی اصلاح مدل پیش‌بین برای کنترل این نوع از فرآیندها ارائه می‌گردد.

۲- معرفی مساله

رفتار یک فرآیند خطی معین را با مدل ARIMAX و مطابق رابطه (۱) در نظر می‌گیریم.

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \Delta u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} e(t) \quad (1)$$

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

برای تعیین رابطه خروجی‌های آینده بر حسب ورودی‌های آینده و گذشته از معادله دیوفانتن به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

بایه الگوریتم کنترل پیش‌بین برای کنترل فرآیندهای ناپایدار، حل مساله کنترل بهینه همراه با محدودیت حالت انتهایی می‌باشد. بر این اساس با اضافه شدن محدودیتی بدین‌صورت که "خروجی مدل در انتهای افق خروجی برابر ورودی مرجع باشد" به مساله بهینه‌سازی، این موضوع محقق می‌شود [۱ و ۲]. پیچیده شدن بهینه‌سازی در حالت وجود محدودیت‌های تساوی، منجر به رویکرد دیگری شد که در آن محدودیت‌های تساوی با اضافه نمودن عبارت جریمه برای حالت انتهایی در تابع هزینه جایگزین شود [۳-۷]. Mayne روش دیگری برای حذف شرط نهایی از مساله بهینه‌سازی ارائه کرد تا حل روی خط مساله امکان‌پذیر شود [۸]. در [۹] با مثال‌های مختلف نشان داده شده است که با استفاده از روش‌های فوق نمی‌توان بعضی از فرآیندهای ناپایدار با ریشه‌های تکراری سمت راست را کنترل کرد. در [۱۰] و [۱۱] چگونگی عدم تحقق آن مورد بررسی قرار

مقدار $u(t)$ بدست می‌آید و به فرآیند اعمال می‌شود.

۳- بهره موثر مدل پیش‌بین

در کنترل‌کننده پیش‌بین ورودی‌های آینده بر اساس مدل پیش‌بین رابطه (۴) تعیین می‌شود. برای کنترل یک فرآیند SISO، مدل پیش‌بین در واقع یک مدل MIMO می‌باشد که در آن تعداد ورودی‌ها برابر افق کنترل (M) و تعداد خروجی‌ها برابر افق پیش‌بینی (P) می‌باشد و مطابق رابطه (۴) خروجی‌های آینده به ماتریس بهره G و ورودی‌های آینده وابسته است. برای تعیین چگونگی تاثیر ماتریس بهره G لازم است بهره موثر (Effective Gain) را برای مدل پیش‌بین بدست آوریم. برای مدل MIMO بهره موثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$k = \frac{\|\Delta y\|_2}{\|\Delta u\|_2} \quad (8)$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_j |f_j|^2}, \quad f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

برای مشخص نمودن اهمیت موضوع دو مثال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: اگر مدل پیش‌بین یک کنترل‌کننده به صورت رابطه (۹) باشد که در آن افق کنترل و افق پیش‌بینی $M = P = 3$ است آنگاه طبق رابطه (۸) بهره موثر (Effective Gain) این مدل برای چند حالت از ورودی-خروجی‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.1 & 0.0 \\ 2.5 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

داریم:

$$\Delta u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta y = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.0 \\ 2.5 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa = 2.6944$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} -0.9399 \\ -0.3399 \\ -0.0328 \end{bmatrix}, \Delta y = \begin{bmatrix} -0.0940 \\ -0.9739 \\ -2.6929 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa = 2.8651$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta y = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa = 0.1000$$

$$C = (A\Delta)E_j + q^{-j}.F_j, \quad BE_j = CG_j + q^{-j}H_j \quad (2)$$

خروجی‌های آینده از رابطه زیر بدست می‌آید (برای سادگی کار $C(q^{-1})=1$ انتخاب شده است).

$$y(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + f(t+j), \quad j=1, 2, \dots, P \quad (3)$$

$$f(t+j) = H_j \Delta u(t-1) + F_j y(t)$$

اگر خروجی‌ها و ورودی‌های آینده و همچنین گذشته سیستم را بصورت بردار در نظر بگیریم، رابطه (۴) حاصل می‌شود که در آن بردار y خروجی‌های آینده، بردار f شامل مقادیر گذشته، بردار u مربوط به ورودی‌های آینده و G ماتریسی است که سطرهاي آن G_j می‌باشد.

$$y = G\Delta u + f \quad (4)$$

$$\Delta u = [\Delta u(t) \quad \Delta u(t+1) \quad \dots \quad \Delta u(t+P-1)]$$

$$y = [y(t+1) \quad y(t+2) \quad \dots \quad y(t+P)]$$

$$f = [f(t+1) \quad f(t+2) \quad \dots \quad f(t+P)]$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{P-1} & \dots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

اگر مسیر مرجع دارای تغییرات و پرش‌های ناگهانی باشد مستقیماً در محاسبات دخالت داده نمی‌شود و از مسیر هموارشده مرجع استفاده می‌شود. حال اگر $r(t)$ سیگنال مرجع و γ ثابت زمانی فیلتر ورودی باشد (که مقدار آن میزان هموارشدگی مسیر مطلوب نسبت به مسیر مرجع را مطابق رابطه (۵) تعیین می‌کند)، آنگاه تابع هزینه کنترل‌کننده GPC بصورت رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$y_d(t) = \frac{1-\gamma}{1-\gamma q^{-1}} r(t), \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (5)$$

$$J = \sum_{j=1}^P (q_j (y_d(t+j) - y(t+j))^2 + r_j \Delta u(t+j-1)^2) \quad (6)$$

بردار ورودی‌های آینده (u) با حداقل کردن تابع هزینه (۶) مبتنی بر دو هدف شامل حداقل نمودن اختلاف بین خروجی فرآیند و مسیر مطلوب و همچنین حداقل نمودن تغییرات خروجی کنترل از رابطه (۷) بدست می‌آید.

$$\Delta u = (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q (y_d - f) \quad (7)$$

$$R = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_M), \quad Q = \text{Diag}(q_1, q_2, \dots, q_P)$$

با استفاده از اولین مولفه از سیگنال کنترلی محاسبه شده،

در اینجا $cond = 2.1873 \times 10^3$ است و مدل پیش‌بین در شرایط ill-condition قرار گرفته است.

مثال ۲: اگر مدل پیش‌بین یک کنترل‌کننده به صورت رابطه زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ y(t+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.00 & 0.00 \\ 0.70 & 0.65 & 0.00 \\ 0.80 & 0.70 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ u(t+2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

در اینجا نیز افق کنترل و افق پیش‌بینی $M = P = 3$ است. از روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$G = \begin{bmatrix} -0.3117 & +0.7486 & +0.5852 \\ -0.5682 & +0.3468 & -0.7463 \\ -0.7616 & -0.5651 & +0.3173 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1.5883 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.4907 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3524 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -0.7616 & +0.5651 & +0.3173 \\ -0.5682 & -0.3468 & -0.7463 \\ -0.3117 & -0.7486 & +0.5852 \end{bmatrix}$$

$$cond = 4.3058$$

در اینجا ترکیب‌های مختلف از ورودی‌ها تأثیر تقریباً یکسانی بر هر یک از خروجی‌ها دارد زیرا مقدار $cond$ مناسب است. با توجه به نتایج مثال‌های بالا می‌توان از $cond(G^T G)$ مطابق رابطه (۱۱) به عنوان یک مقیاس نسبی برای تعیین میزان تغییرات بهره موثر مدل پیش‌بین استفاده نمود.

۴- مقاوم‌سازی بهره موثر مدل پیش‌بین برای

فرایندهای ناپایدار

در اینجا می‌خواهیم قابلیت اعتماد محاسبات عددی در تعیین کنترل‌کننده پیش‌بین را برای فرایندهای ناپایدار مورد بررسی قرار دهیم. مطابق رابطه (۷) برای محاسبه ورودی‌های آینده، معکوس ماتریس $G^T Q G + R$ مورد نیاز است. اگر $Q = I$ و $R = 0$ باشد برای ورودی‌های آینده معکوس $G^T G$ لازم است. برای تعدادی از فرایندهای ناپایدار که در جدول (۱) آمده است مقدار $\log(cond(G^T G))$ برحسب افق پیش‌بین (P) در شکل (۱) رسم شده است. ملاحظه می‌شود که برای فرایندهای ناپایدار با قطب‌های غیرتکراری افزایش افق پیش‌بینی سبب کاهش حداقل دقت لازم در تعیین معکوس

$$\Delta u = \begin{bmatrix} -0.0130 \\ +0.1316 \\ -0.9912 \end{bmatrix}, \Delta y = \begin{bmatrix} -0.0013 \\ +0.0002 \\ -0.0000 \end{bmatrix} \rightarrow \kappa = 0.0013$$

ملاحظه می‌شود که بهره موثر علاوه بر تغییرات ورودی‌ها به جهت اعمال ورودی‌ها نیز وابسته است. با توجه به اینکه تغییرات بهره موثر معرف میزان حساسیت مدل به تغییرات ورودی‌ها و چگونگی تأثیر آنها بر خروجی می‌باشد، بنابراین لازم است محدوده تغییرات بهره موثر مدل پیش‌بین تعیین شود. برای تعیین محدوده تغییرات بهره موثر ماتریس بهره G را با استفاده از SVD تجزیه می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$G^T G = U \Sigma^2 V^T \quad (10)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

با توجه به خواص SVD [12] کمترین بهره موثر برابر با $\min(\sigma_i)$ و بیشترین آن برابر با $\max(\sigma_i)$ می‌باشد. در نتیجه محدوده تغییرات بهره موثر برابر با نسبت این دو مقدار است و آنرا با $cond(G^T G)$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$cond(G^T G) = \max(\sigma_i) / \min(\sigma_i) \quad (11)$$

بهترین مقدار برای $cond$ یک می‌باشد. اگر در تعیین جواب معادله (۷)، $cond(G^T G) > 1/\sqrt{eps}$ (در استاندارد IEEE مقدار eps برابر $eps = 2.2 \times 10^{-16}$ است) باشد، آنگاه لازم است مساله به صورت مناسبی نرمالایز شود تا Condition Number بهبود پیدا کند.

برای مثال ۱ داریم:

$$G = \begin{bmatrix} -0.0328 & -0.1281 & -0.9912 \\ -0.3399 & -0.9312 & +0.1316 \\ -0.9399 & +0.3412 & -0.0130 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2.8651 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2664 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -0.9399 & -0.3412 & -0.0130 \\ -0.3399 & +0.9312 & +0.1316 \\ -0.0328 & +0.1281 & -0.9912 \end{bmatrix}$$

$$cond = 2.1873 \times 10^3$$

$$G^T QG + \lambda I = U \Sigma^* V^T \quad (14)$$

$$S^* = \begin{bmatrix} \lambda + \sigma_0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda + \sigma_1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots \lambda + \sigma_{r-1} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

حال اگر بخواهیم Condition Number ماتریس $G^T QG + \lambda I$ برابر مقدار معین k باشد، با توجه به روابط زیر:

$$\max(\sigma_i) = \sigma_0$$

$$\min(\sigma_i) = \sigma_{r-1}$$

$$\text{cond}(G^T QG + \lambda I) = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda)$$

داریم:

$$k = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda) \quad (15)$$

و در نتیجه مقدار λ برابر است با:

$$\lambda = (\sigma_0 - k\sigma_{r-1}) / (k - 1) \quad (16)$$

با انتخاب مقدار λ از رابطه (۱۶) و محاسبه ورودی‌های آینده توسط رابطه (۷) این اطمینان وجود دارد که Condition Number مربوط به محاسبه معکوس ماتریس برابر مقدار تعیین شده k خواهد بود.

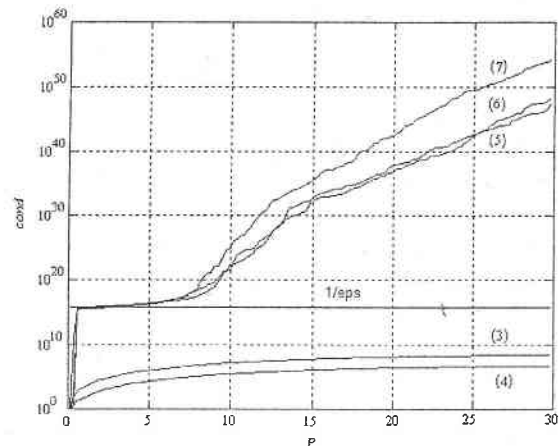
جدول ۱- مشخصات فرایندهای ناپایدار

مثال	صفه‌های فرآیند	قطبهای فرآیند
۳	-0.1	-0.5, 0.05
۴	0.1	-0.5, 0.05
۵	-10	$2, 2.5 \pm i$
۶	1	$2, 2.5 \pm i$
۷ سیستم Stewart Platform خطی شده در یکی از نقاط کاری آن	$[-3.7890, -1.4576, 1.4576, 3.3798, -3.4161, -3.4161, -1.8201, -1.8201, 3.4161, 3.4161, 1.8201, 1.8201]$	$[-438964893332.364, 3.416, 3.394, 2.430, 1.820, 1.810, -3.416, -3.394, -2.430, -1.820, -1.581]$

با تامین دقت لازم در تعیین ورودی‌های آینده، می‌توان افق پیش‌بینی را به مقدار مورد نیاز افزایش داد. علاوه بر این می‌توان در هر حالت حد بالای افزایش افق پیش‌بینی را مشخص نمود.

برای کنترل فرایندهای جدول (۱)، مطابق روش پیشنهادی

ماتریس $G^T G$ نخواهد شد و دقت لازم برای تعیین معکوس $G^T G$ برای هر مقدار از افق پیش‌بینی فراهم می‌باشد. در حالی که برای فرایندهای ناپایدار با قطبهای تکراری، اگر افق پیش‌بینی از حد معینی بیشتر باشد آنگاه حداقل دقت لازم در محاسبه معکوس ماتریس $G^T G$ تامین نمی‌شود. این موضوع سبب می‌شود که که علیرغم حضور کنترل‌کننده، فرآیند بصورت حلقه‌باز عمل کند و کنترل‌کننده نقشی در کنترل فرآیند نداشته باشد و در نتیجه کنترل این نوع از فرایندها غیر ممکن باشد.



شکل ۱: مقدار $\log(\text{cond}(G^T G))$ بر حسب افق پیش‌بینی (P) برای مثالهای ۳ تا ۷.

علت پیدایش این حالت برای فرایندهای ناپایدار آن است که برای فرایندهای حلقه‌باز ناپایدار چون ضرایب پاسخ پله همانند فرایندهای حلقه‌باز پایدار محدود نیستند ماتریس G که از ضرایب پاسخ پله تشکیل شده است دارای مقادیری با دامنه وسیع خواهد بود که این موضوع سبب افزایش اختلاف بزرگترین و کوچکترین Singular Value ماتریس $G^T G$ و در نتیجه افزایش Condition Number می‌شود. برای حل این مشکل ماتریس R را به صورت $R = \lambda I$ در نظر می‌گیریم و پارامتر λ را چنان تعیین کنیم که $\text{cond}(G^T QG + \lambda I)$ کاهش یابد.

اگر:

$$G^T QG = U \Sigma V^T \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots \sigma_{r-1} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

آنگاه داریم:

[۹] یعقوبی مهدی، حائری محمد، "بررسی کنترل کننده های پیش بین GPC از نظر پایداری برای فرآیندهای خطی ناپایدار غیر حداقل فاز"، چهاردهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، دانشگاه امیرکبیر، تهران، اردیبهشت ۱۳۸۵.

[10] M. Yaghobi and M. Haeri, "Design of a stable GPC for non-minimum phase LTI systems", Proceeding of the Fourth World Enformatika Conference, Istanbul, Turkey, Vol. 6, pp. 88-91, June 2005.

[11] M. Yaghobi and M. Haeri, "A New Stabilizing GPC for non-minimum phase LTI systems using Time Varying Weighting", Proceeding of the Fourth World Enformatika Conference, Istanbul, Turkey, Vol. 6, pp. 156-158, June 2005.

[12] O.J. Rojas, G.C. Goodwin, M.M. Seron and A. Feuer, "An SVD based strategy for receding horizon control of input constrained linear systems", Proceeding of the American Control Conference, Denver, Colorado, 2003.

پارامترهای کنترل کننده تنظیم می شود که علاوه بر مقاوم سازی محاسبات مربوط به کنترل کننده، امکان کنترل فرآیندها فراهم می شود که نتایج آن در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲- نتایج حاصل از مقاوم سازی بهره مدل پیش بین

Example	$P = M$	λ	Condition number
۵	10	2.1282	100000
۶	20	1.782e-4	100
۷	20	1.3624e-4	5e+06

۵- جمع بندی

در اینجا مقاوم سازی محاسبات عددی برای کنترل فرآیندهای ناپایدار فراهم شد که برای انجام آن از ضرایب وزنی تابع هزینه استفاده شد. در بررسی فرآیندهای مختلف ملاحظه شد که با انتخاب بهینه پارامترهای فوق الذکر می توان سیستم را با افق کنترل و افق پیش بینی کمتر کنترل نمود که این موضوع سبب کاهش محاسبات و در نتیجه افزایش سرعت می شود. در توسعه این روش می توان در تابع هزینه علاوه بر خطا، تغییرات خطا را نیز در نظر گرفت.

مراجع

- [1] J.A. Rossiter, J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, "Constrained cautious stable predictive control", IEE Proceedings-D, Vol. 144, No. 4, July 1997.
- [2] J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, "Constrained Multivariable cautious Stable Predictive Control", IEE Proceedings-D, Vol. 145, No. 5, September 1998.
- [3] Y.I. Lee, W.H. Kwon, Y.H. Kim, "Weighted Receding Horizon Predictive Control and its Related GPC with Guaranteed Stability", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, Texas, December, 1993.
- [4] H.W. Gomma, D.H. Owens, "Time Varying Weighting Generalized Predictive Control (TGPC) with prediction to performance, stability and robustness", Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA, December 1999.
- [5] S. Weiland, A.A. Stoorvogel, A.A. Tiagounov, "End-Point Parameterization and Guaranteed Stability for a Model Predictive Control Scheme", Proceedings of the 40th IEEE Conference Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [6] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, J.R. Gossner, "Improved algorithm for multivariable stable generalized predictive control", IEE Proceedings-D, Vol. 144, No 4, July 1997.
- [7] Li-F. Zhou, "The Mixed-Weights Least -Square Stable Predictive Control for Constrained Multi-Object Multivariable System", Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetic, Xian, November 2003.
- [8] D.Q. Mayne, "Improved stabilizing condition for model predictive control", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000.