www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day : ( )

سرفصل مطالب :

فازورها
عناصر تزویج و مدارهای تزویج شده
گراف شبکه و قضیه ی تلگان
تجزیه و تحلیل گره و مش
تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست
معادلات حالت
تبدیل لاپلاس
فرکانسهای طبیعی شبکه
توابع شبکه - قضایای شبکه
دو قطبی ها

نحوه ی ارزیابی :

تکالیف 2 نمره - ملاک حل درست نیست .
کوئیز 1 نمره
میان ترم 5 نمره
پایان ترم 12 نمره

مراجع :

۱) نظریه اساسی مدارها و شبکه ها - جلد اول و دوم - ارنست کوه

۲) تجزیه و تحلیل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها - جلد دوم - رضا کرمی

۳) رهیافت حل مسائل مدار ۲ - جلد اول و دوم - محمود دیانی

حل المسائل

وبلاگ : www.simulink.blogsky.com

email : ahmadrsh@yahoo.com

PAYCO

Re: Real Im: Imaginary

مروری بر اعداد مختلط :

اگر Z یک عدد مختلط باشد و X و Y به ترتیب جزء حقیقی و جزء موهومی آن باشند، برای Z دو نمایش وجود دارد: یکی نمایش مختصات دکارتی $Z = X + jY$ می باشد که در آن X جزء حقیقی و همان $Re(Z)$ می باشد و Y جزء موهومی و همان $Im(Z)$ می باشد.

و دیگری نمایش مختصات قطبی $Z = |Z| e^{j\theta}$ می باشد که در آن $|Z|$ دامنه و θ فاز می باشد. (نمایش قطبی به فرم $Z = r\angle\theta$ نیز نمایش داده می شود)

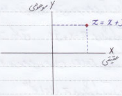
دامنه و فاز برحسب X و Y :

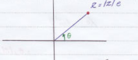
$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\angle\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

قسمت حقیقی و موهومی برحسب $|Z|$ و θ :

$Z = |Z| (\cos\theta + j\sin\theta) \Rightarrow X = |Z| \cos\theta \qquad Y = |Z| \sin\theta$

نمایش z برحسب مختصات دکارتی :

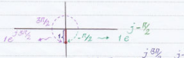




$\theta : [0, 2\pi)$

$\theta : [-\pi, \pi)$

مثال:



$1e^{j3\pi/2} = 1e^{j-\pi/2}$ تفاوتی ندارند.

عملیات با اعداد مختلط:

$Z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$ و $Z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$

$Z_1 + Z_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

* برای جمع دو عدد مختلط بهتر است از مختصات دکارتی استفاده شود.

$Z_1 \cdot Z_2 = \underbrace{|z_1| e^{j\theta_1} \cdot |z_2| e^{j\theta_2} = |z_1||z_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}}_{\text{قطبی}} = \underbrace{(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)}_{\text{دکارتی}}$

* برای ضرب دو عدد مختلط بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

نکته: $j \times j = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

مزدوج اعداد مختلط:

$Z = x + jy = |z| e^{j\theta} \Rightarrow \bar{Z} = x - jy = |z| e^{-j\theta}$

$Z \cdot \bar{Z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$

فازور یک عبارت سینوسی برحسب عدد مختلط:

عدد مختلط $Ae^{j\theta}$ کسینوسی $A\cos(\omega t + \theta)$ را نشان می‌دهد.

فازور فاش دهنده‌ی سینوسی خوانده می‌شود.

$A\cos(\omega t + \theta)$

$Ae^{j\theta}$ ← فرم فازوری

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

نکته: بنابراین داشتن نمایش فازوری یک سینوسی تنها مقادیر دامنه و فاز آن را مشخص می‌کند و اطلاعی از فرکانس بدست نمی‌دهد. (برای تبدیل فازوری به سینوسی حتماً فرکانس را می‌خواهیم.)

قضیه: مجموع جبری هر تعداد از سینوسی‌ها با فرکانس ω و هر تعداد از مشتق‌های آنها از هر مرتبه‌ای خود، یک سینوسی با همان فرکانس ω است.

* برای حل مسائل مدار به روش اعداد مختلط، بایستی مدار دارای فرکانس واحدی باشد. بنابراین برای حل مداری که دارای چند منبع با فرکانسهای مختلف می‌باشد، علاوه بر روش اعداد مختلط بایستی از روش جمع آثار نیز استفاده کرد.

حل معادلات دیفرانسیل:

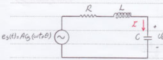
$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=A\cos(\omega t+\theta) \quad \text{طرف دوم}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\Rightarrow j\omega\\ x\Rightarrow X\end{cases}\Rightarrow a_0(j\omega)^n X+a_1(j\omega)^{n-1}X+\cdots+a_{n-1}(j\omega)X+a_n X=Ae^{j\theta}$$

فازور $A\cos(\omega t+\theta)$

$$X=\frac{Ae^{j\theta}}{a_0(j\omega)^n+\cdots+a_{n-1}(j\omega)+a_n}$$

مثال:



$$I = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$KVL: A\cos(\omega t+\theta) = R\left(C\frac{dv_C}{dt}\right) + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_C}{dt}\right) + v_C(t)$$

$$\Rightarrow A\cos(\omega t+\theta) = RC\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2}{dt^2}v_C + v_C(t)$$

اگر از عبارت فوق فازور بگیریم، خواهیم داشت:

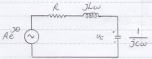
$$Ae^{j\theta} = RCj\omega v_C + LC(j\omega)^2 v_C + v_C$$

$$\Rightarrow v_C = \frac{Ae^{j\theta}}{RCj\omega + LC(j\omega)^2 + 1}$$

از رابطه‌ی فوق دامنه و فاز بدست خواهند آمد، درنتیجه:

$$v_C = \text{دامنه}\ \cos(\omega t + \text{فاز})$$

فرم فازوری مدار:



برای بدست آوردن u_C برحسب عدد مختلط از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$u_C = \frac{Ae^{j\theta} \cdot \frac{1}{jc\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jc\omega}}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:

Year : Month : Day : ( )

تکلیف :

$$\begin{cases} KCL1: -2 + \frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{2j}} = 0 \\ KCL2: \frac{V_2 - V_1}{\frac{1}{2j}} + \frac{V_2}{2} + \frac{V_2}{2j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+2j)V_1 - 2jV_2 = 2 \\ -2jV_1 + (2j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2j})V_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2j & 2 \\ -2j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+2j & -2j \\ -2j & 2j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2j} \end{vmatrix}} = 1.371 \angle 30.96$$

$$I_L = \frac{V_2}{2j} = \frac{1.371 \angle 30.96}{2j} = 0.68 \angle -59.04$$

$$i_L(t) = 0.68 \cos(2t - 59.04)$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year: 1389 Month: 7 Day: 5 ( )

فرم فازوری سلف و خازن :

$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$I_C = C(j\omega_0)V_C$

$\dfrac{V_C}{I_C} = \dfrac{1}{C(j\omega_0)}$ بصورت مقاومت

$v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

$V_L = L(j\omega_0)I_L$

$\dfrac{V_L}{I_L} = L(j\omega_0)$ بصورت مقاومت

مثال ؟ پاسخ مدار $4\cos 2t$

1F

2^H

$j4$

$\dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{1}{j\times 1\times 2} = \dfrac{1}{2j}$

$Lj\omega_0 = 2\times j\times 2 = j4$

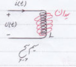
عناصر تزویج شده:

۱) سلف های تزویج شده

۲) ترانسفورماتور ایده آل

۳) منابع وابسته

۱) سلف های تزویج شده:



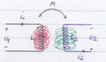
$$v(t) = L \frac{d}{dt} i$$

$V = I \cdot r$

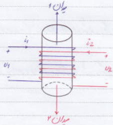
مقاومت داخلی سلف

- اگر i مقدار ثابتی باشد، ولتاژ تولید مقدار کمی خواهد بود.
- میدان در صورتی ایجاد می شود که جریان دائماً تغییر کند.

مدار فیزیکی سلف های تزویج شده :



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

* تعیین جهت میدان طبق قانون دست راست.

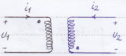
تعیین جهت میدان: ۱) جهت جریان ۲) جهت سیم پیچ

PAYCO

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

نماد الکتریکی سلف های تزویج شده :

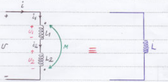


تعیین جهت میدان : ۱) وضعیت جهت جریان ۲) نسبت به سر نقطه دار

+M : اگر هر دو جریان به سر نقطه دار وارد شوند، یا اگر هر دو جریان از سر نقطه دار خارج شوند.

-M : اگر یکی از جریانها وارد سر نقطه دار شود و دیگری از سر نقطه دار خارج شود.

سری کردن دو سلف تزویج:



محاسبه L برحسب L_1, L_2, M :

$$v = v_1 + v_2 \Rightarrow v = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

$$i = i_1 = i_2 \Rightarrow v = L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt}$$

$$v = \underbrace{(L_1 - 2M + L_2)}_{L_{\text{کل}}}\frac{di}{dt}$$

حال اگر جهت پیچش دو سیم پیچ یکسان بود:

$$L_{\text{کل}} = L_1 + 2M + L_2$$

فرم ماتریسی دو سلف تزویج :

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

روابط شار برای سلف های تزویج :

$$\varphi = Li \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \varphi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

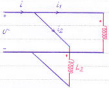
$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

* مقدار سلف با تغییر زمان تغییر نمی کند و ثابت می ماند.

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

حاصل موازی دو سلف تزویج:



برای بدست آوردن ضریب خودالقایی کل بایستی رابطه مربوط به جمع جریانها را در فرم بدست آید.

$i = i_1 + i_2 = \dots$

بمنظور بدست آوردن روابط جریانها از فرم ماتریسی مربوط به شار استفاده می کنیم:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}$$ ، که درآن $det = L_1L_2 - M^2$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{det} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{1}{det}(L_2\varphi_1 - M\varphi_2) \\ i_2 = \frac{1}{det}(-M\varphi_1 + L_2\varphi_2) \end{cases}$$

چون دو سلف موازی هستند، پس شار آنها برابر است:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \Rightarrow i = \frac{1}{det}(L_2\varphi - M\varphi - M\varphi + L_1\varphi)$$

طبق رابطهٔ $\varphi = Li$:

$$کل\ L = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - 2M + L_1}$$

سلف‌های تزویج با چند سیم پیچ:

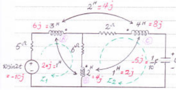
روابط آن مشابه دو سلف تزویج نوشته می‌شود، با این تفاوت که برای هر سلف بعد از نوشتن ولتاژ ناشی از جریان آن بایستی جریان ناشی از بقیه سلف‌هایی که با این سلف تزویج دارند را نیز در نظر بگیریم.

مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

حل: $V_o(t) = ?$



$$10\sin 2t = 10\cos(2t - 90^\circ) = 10\angle{-90} = 10e^{-j90} = (10(\cos 90 - j\sin 90)) = -10j$$

نکته: برای سلف های تزویج $jL\omega$ را برای مقدار سلف و $jM\omega$ را برای خودالقایی متقابل بین دو سلف در نظر میگیریم.

KVL 1: $-(-10j) + 5i_1 + 6j\,i_1 - \underbrace{2j(i_1 - i_2)}_{A,B} - \underbrace{4j}_{A,C}\,i_2 + 6(i_1 - i_2) + \underbrace{4j}_{B}(i_1 - i_2) - \underbrace{2j}_{A,B}\,i_1 + \underbrace{2j}_{B,C}\cdot i_2 = 0$

KVL 2: $4j(i_2 - i_1) + 2j\cdot i_1 - 2j\cdot i_2 + 6(i_2 - i_1) + 2i_2 + 8j\,i_2 - 4j\cdot i_1 - 2j(i_2 - i_1) = 0$

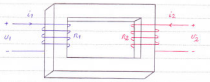
$$\begin{cases} (11 + 6j)\,i_1 - (6 + 4j)\,i_2 = -10j \\ -(6 + 4j)\,i_1 + (8 + 3j)\,i_2 = 0 \end{cases}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} (1+6j) & -10j \\ -(6+4j) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+6j) & -(6+4j) \\ -(6+4j) & (8+3j) \end{vmatrix}} = 1.6 \angle -89$$

$$v_o = -5j \times i_2 = 6.02 \angle -179$$

$$v_o(t) = 6.02 \cos(2t - 179^\circ)$$

۴) ترانسفورماتور ایده‌آل: ترانسفورماتور ایده‌آل شامل دو سیم پیچ می‌باشد که بر روی یک هسته با ضریب نفوذپذیری بی‌نهایت پیچیده شده است. در این هسته هیچگونه اتلاف انرژی و شار نشتی وجود ندارد، یعنی تمام میدان مغناطیسی درون هسته وجود دارد و محبوس است.



یکی از سیم پیچ‌ها با n_1 دور اولیه و سیم پیچ دیگر با n_2 دور ثانویه است.

هر خط القاء مغناطیسی که از یک حلقه‌ی سیم پیچ اولیه می‌گذرد، از یکایک حلقه‌های سیم پیچ دوم نیز خواهد گذشت.

فرض کنید φ شار گذرنده از یک حلقه باشد:

$$\begin{cases} \varphi_1 = n_1 \varphi \\ \varphi_2 = n_2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

و چون $v = \frac{d\varphi}{dt}$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

$j2 = 2j \quad , \quad \frac{1}{2j} = -\frac{1}{2}j$

(تکلیف

$$\begin{cases} KVL_1: -2 + 4jI_1 + 2jI_2 + \left(\frac{1}{j2} + 1\right)(I_1 - I_2) = 0 \\ KVL_2: \left(1 + \frac{1}{j2}\right)(I_2 - I_1) + j2I_2 + j2I_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(4j + \frac{1}{2j} + 1\right)I_1 + \left(2j - \frac{1}{2j} - 1\right)I_2 = 2 \\ \left(-1 - \frac{1}{2j} + 2j\right)I_1 + \left(1 + \frac{1}{j2} + 2j\right)I_2 = 0 \end{cases}$$

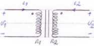
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \left(4j + \frac{1}{2j} + 1\right) & 2 \\ \left(-1 - \frac{1}{2j} + 2j\right) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(4j + \frac{1}{2j} + 1\right) & \left(2j - \frac{1}{2j} - 1\right) \\ \left(-1 - \frac{1}{2j} + 2j\right) & \left(1 + \frac{1}{2j} + 2j\right) \end{vmatrix}} = 0.42\angle -166.85$$

$i_L(t) = 0.42 \cos(2t - 166.85)$

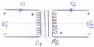
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : 1389 Month : 7 Day : 19 ( )

نماد شماتیک ترانسفورماتور:



جهت پیچ ها یکسان : $\frac{v_1}{v_2}=\frac{N_1}{N_2}$ ، $\frac{i_1}{i_2}=\frac{-N_2}{N_1}$



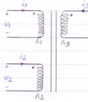
جهت پیچ ها متفاوت $\Rightarrow$ $\frac{v_1}{v_2}=-\frac{N_1}{N_2}$ ، $\frac{i_1}{i_2}=\frac{N_2}{N_1}$

برای هسته، تمام انرژی درون آن ذخیره می شود و هیچ انرژی مغناطیسی هدر نمی رود، یعنی ضریب نفوذپذیری هسته ی بی نهایت است ($\mu=\infty$) یعنی رلوکتانس هسته صفر می باشد ($R \propto \frac{1}{\mu}=0$) بنابراین نیروی محرکه مغناطیسی برابر صفر می باشد. ($mmf=R\phi=0$) از طرفی نیروی محرکه ی مغناطیسی برابر است با:

$mmf=N_1 i_1+N_2 i_2 \Rightarrow N_1 i_1+N_2 i_2=0 \Rightarrow \frac{i_1}{i_2}=-\frac{N_2}{N_1}$ ، $\frac{v_1}{v_2}=\frac{N_1}{N_2}$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

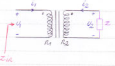
ترانسفورماتور ایده‌آل با چند سیم پیچ :



برای ترانسفورماتور ایده‌آل با چند سیم پیچ ، جهت جریان‌ها را به سمت سر نقطه‌دار تعیین کرده و روابط زیر را می‌نویسیم :

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{n_1} = \dfrac{v_2}{n_2} = \dfrac{v_3}{n_3} \\ n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0 \end{cases}$$

خواص تغییر دهندگی امپدانس : به کمک ترانسفورماتور ایده‌آل می‌توان مقدار یک امپدانس را تغییر داد، بدون اینکه تغییری در توان صورت گرفته باشد.



$$\begin{cases} Z_{in} = \dfrac{v_1}{i_1} = \dfrac{\frac{n_1}{n_2} \cdot v_2}{-\frac{n_2}{n_1} \cdot i_2} = \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-v_2}{i_1}\right) \Rightarrow Z_{in} = \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot Z \\ Z = -\dfrac{v_2}{i_2} \end{cases}$$

اگر Z صورت  در مدار قرار گرفته بود ، امپدانس Z برابر بود با : $Z = \dfrac{v_2}{i_2}$

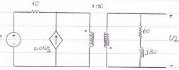
مثال) $Z = 10\Omega$ ، $Z_{in} = 100\Omega \Rightarrow \dfrac{n_1}{n_2} = ?$

$$Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot Z \Rightarrow 100 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \times 10 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{10}$$

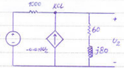
نکته) در برخی مدارها نیاز است که یک قسمت از مدار از اولیه به ثانویه ترانسفورماتور ایده‌آل انتقال یابد (یا برعکس)، برای اینکار درصورتیکه بخواهیم از اولیه به ثانویه انتقال دهیم، تمام منابع ولتاژ در $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ و تمام منابع جریان در $\frac{n_1}{n_2}$ و تمام امپدانس‌ها در $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$ ضرب می‌شوند.

نکته) درصورتیکه جهت دو سیم پیچ برعکس باشد، منابع ولتاژ و جریان در یک منفی نیز ضرب می‌شوند.

مثال) در مدار شکل زیر فازور ولتاژ U_2 را بیابید.



در این مدار برای انتقال از اولیه به ثانویه منبع ولتاژ را در -10، منبع جریان را در $-\frac{1}{10}$ و مقاومت 10Ω را در 100 ضرب می‌نماییم.

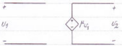


$$KCL: \frac{U_2-(-80)}{1000} + 0.001U_2 + \frac{U_2}{60+j80} = 0$$

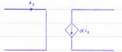
$$U_2 = 5\sqrt{2}\ \angle{-135}$$

منابع کنترل شده:

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ



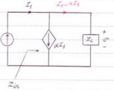
منبع جریان کنترل شده با جریان



منبع ولتاژ کنترل شده با جریان

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ

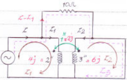
مثال) امپدانس Z_{in} را بیابید:



$$Z_{in}=\frac{v}{I_1}=\frac{Z_L(I_1-\alpha I_1)}{I_1}=Z_L(1-\alpha)$$

تکلیف) مطلوب است توان مختلط تحویلی منبع 15

$P_{\text{مختلط}}=\frac{1}{2}V\bar{I}$



$$KUL1:\ 1=4jI_1+2jI_2$$
$$KUL2:\ 0=6jI_2+2jI_1$$
$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2j\\ 0 & 6j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4j & 2j\\ 2j & 6j\end{vmatrix}}=-0.3j$$

$$KUL3:\ 1=10(I-I_1)$$

$$1=10(I-I_1)\Rightarrow I=0.31\angle{-71.56}$$

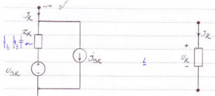
$$P=\frac{1}{2}V\bar{I}=\frac{1}{2}\times1\times0.31\angle{71.56}=0.155\angle{71.56}=0.05+0.14j$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day : ( )

گرافهای شبکه و قضیه تلگان :

تعریف شاخه) شاخه حداکثر شامل یک المان (مقاومت یا سلف یا خازن) به همراه منبع ولتاژ و منبع جریان است و بصورت زیر نمایش داده می شود :

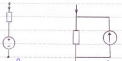


مدل یک شاخه

شاخه kام

* در شاخه بایستی پلاریته ولتاژ و جریان متناظر باشد.

نکته) یک شاخه می تواند حداقل شامل یک عنصر باشد، ولی یک منبع، شاخه نیست.



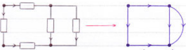
شاخه

شاخه

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

تعریف گراف : دسته‌ای از گره‌ها به همراه دسته‌ای از شاخه‌ها را گراف گویند.



« گراف g با $b=5$ شاخه و $n_t=4$ گره »

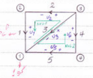
تعریف زیرگراف : g_1 را زیرگراف g گویند اگر هر شاخه از g_1 یک شاخه از g و هر گره از g_1 یک گره از g باشد . در زیر، زیرگراف‌های گراف g (مثال فوق) آورده شده است :

g_1 g_2 g_3 g_4

قضیه تلگان : اگر گراف g دارای b شاخه و n_t گره باشد و ولتاژها و جریان‌ها بطور دلخواه تعیین شوند، بطوریکه محدودیت‌هایی که بوسیله KCL و KVL اعمال می‌شوند را برآورده سازند، در اینصورت مطابق قضیه‌ی تلگان خواهیم داشت :

$$\sum_{k=1}^{b} u_k J_k = 0$$

مثال)



$v_1 = 2v \qquad J_1 = 1A$

$v_2 = -1v \qquad J_2 = 1A$

$v_3 = 1v \qquad J_3 = -3A$

$v_4 = 4v \qquad J_4 = 2A$

$v_5 = -3v \qquad J_5 = 2A$

* تعیین پلاریته ولتاژها طبق جهت جریان.

* جریان‌ها ورودی: + ، جریان‌های خروجی: -

$$\begin{cases} \text{KUL 1)}\ v_1 - v_3 + v_2 = 0 \Rightarrow 2 - 1 + (-1) = 0 \\ \text{KUL 2)}\ v_3 - v_5 - v_4 = 0 \Rightarrow 1 - (-3) - 4 = 0 \\ \text{گره 1:}\ j_1 + j_3 + j_5 = 0 \Rightarrow 1 + (-3) + 2 = 0 \\ \text{گره 4:}\ j_4 - j_5 = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

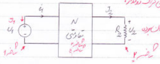
شرایط برقرار است (KUL و KCL = 0) در نتیجه می‌توان از تلگان استفاده کرد.

قضیه تلگان: $\sum_{k=1}^{5} v_k J_k = v_1 J_1 + v_2 J_2 + v_3 J_3 + v_4 J_4 + v_5 J_5 = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5} = (2\times1) + (-1\times1) + (1\times-3) + (4\times2) + (-3\times2) = 0$$

مثال) برای مدار زیر ۲ آزمایش صورت گرفته است. یک مرتبه با مقاومت 1Ω و یک مرتبه با مقاومت 2Ω

از آنجا که دو مدار با ساختار یکسان داریم، یعنی گراف دو مدار، جهات دو مدار و شماره گذاری شاخه‌های دو مدار یکسان بوده بنابراین می‌توان از قضیه تلگان استفاده نمود.



بار اول	بار دوم
$R_2 = 1\Omega$	$\hat R_2 = 2\Omega$
$v_1 = 4v$	$\hat v_1 = 6v$
$i_1 = 1A$	$\hat i_1 = 1.2A$
$v_2 = 1v$	$\hat v_2 = ?$

* جهت J_1 طبق قرارداد منبع تعیین شده است.

قضیه تلگان: $v_1\hat J_1 + v_2\hat J_2 + \underbrace{\cancel{v_3\hat J_3+\cdots}}_{N\ \text{شبکه}} = \hat v_1 J_1 + \hat v_2 J_2 + \underbrace{\cancel{\hat v_3 J_3+\cdots}}_{N\ \text{شبکه}}$

$$v_1\hat J_1 + v_2\hat J_2 = \hat v_1 J_1 + \hat v_2 J_2 \Rightarrow 4(-1.2) + 1\left(\frac{\hat v_2}{2}\right) = 6(-1) + \hat v_2\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \hat v_2 = 2.4v$$

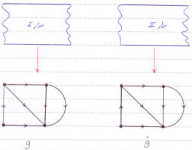
$$\hat J_1 = -\hat i_1 = -1.2A \quad , \quad \hat J_2 = \frac{\hat v_2}{\hat R_2} = \frac{\hat v_2}{2} \quad , \quad J_1 = -i_1 = -1A \quad , \quad J_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{1}{1} = 1$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:

Year : Month : Day : ( )

تعمیم قضیه تلگان: فرض کنید دو مدار متفاوت با گراف یکسان داشته باشیم، همچنین جهات قراردادی جریان ها نیز در دو مدار یکسان باشد، همچنین شماره گذاری شاخه ها نیز یکسان باشد:

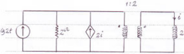


در این صورت می توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k$$

$$v_1\hat{j}_1 + v_2\hat{j}_2 + v_3\hat{j}_3 + v_4\hat{j}_4 + v_5\hat{j}_5 = \hat{v}_1 j_1 + \hat{v}_2 j_2 + \hat{v}_3 j_3 + \hat{v}_4 j_4 + \hat{v}_5 j_5$$

مثال) در مدار شکل زیر فیزور جریان i را بدست آورید.

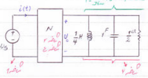


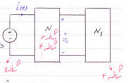
$KCL: 1 + i - \frac{v}{8} - i = 0 \Rightarrow v = 8v \Rightarrow i = \frac{8}{4j} = -2j$

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران
ahmadrsh@yahoo.com

مثال ۱۰) در شکل زیر N و N_1 از اجزای R-L-C تشکیل شده‌اند. مطلوب است تعیین شبکه N_1

$Y = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega + 2 = 2$





$U_s(t) = 2\cos 2t$ $\qquad$ $\hat{U}_s(t) = 2\cos 2t$

$i(t) = \frac{1}{2}\cos(2t - 60^\circ)$ $\qquad$ $\hat{i}(t) = \cos 2t$

$U_o(t) = \frac{1}{2}\cos(2t - 20^\circ)$ $\qquad$ $\hat{U}_o(t) = \cos(2t - 40^\circ)$

از آنجا که دو مدار دارای گراف یکسان، جهات یکسان و شماره‌گذاری یکسان می‌باشند، می‌توان از قضیه تلگان استفاده نمود.

قضیه تلگان: $\sum_{k=1}^{b} \hat{U}_k J_k = \sum_{k=1}^{b} U_k \hat{J}_k$

$U_1 = U_s = 2$ $\qquad$ $\hat{U}_1 = \hat{U}_s = 2$

$J_1 = -i_1 = -\frac{1}{2} e^{-60j}$ $\qquad$ $\hat{J}_1 = -\hat{i} = -1$

$U_2 = U_o = \frac{1}{2} e^{-20j}$ $\qquad$ $\hat{U}_2 = \hat{U}_o = e^{-40j}$

$J_2 = \frac{U_o}{Z} = U_o \cdot Y = \frac{1}{2} e^{-20j} \times 2 = e^{-20j}$ $\qquad$ $\hat{J}_2 = ?$

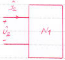
مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$$U_1 \hat{J}_1 + U_2 \hat{J}_2 = \hat{U}_1 J_1 + \hat{U}_2 J_2 \Rightarrow 2(-1) + \frac{1}{2} e^{-20j} \times \hat{J}_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2} e^{-60j}\right) + e^{-40j} \cdot e^{-20j}$$

$$\Rightarrow \hat{J}_2 = 4 e^{20j}$$



$$N_1 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{J}_2} = \frac{e^{-40j}}{4 e^{20j}} = \frac{1}{4} e^{-60j} = \frac{1}{4}(\cos 60 - j \sin 60)$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1 - j\sqrt{3}}{8} \Rightarrow N_1 = \frac{1}{8} - j\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{8}$

$$\frac{1}{jC\omega} = -j\frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow C = 2.3F$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

«فصل دهم»

«تجزیه و تحلیل گره و مش»

تجزیه و تحلیل گره:

- ماتریس تلاقی گره با شاخه

- KCL در تجزیه و تحلیل گره

- KVL در تجزیه و تحلیل گره

- روش منظم در تجزیه و تحلیل گره

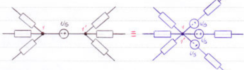
- روش نظری در تجزیه و تحلیل گره

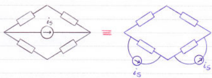
- معادلات دیفرانسیل در تجزیه و تحلیل گره

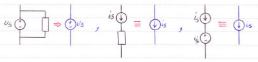
مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year :　　Month :　　Day :　　(　)

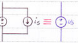
تجزیه و تحلیل گره: هدف بدست آوردن ولتاژها و جریان های شاخه های مدار می باشد که بفرم ماتریسی محاسبه می گردند. در ابتدا بایستی مدار را تا آنجا که ممکن است ساده کرد، یعنی هیچ شاخه ای شامل یک منبع تنها نباشد.



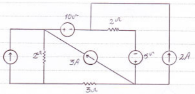


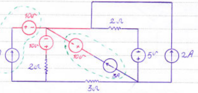


Subject:
Year: Month: Day: ( )

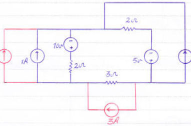


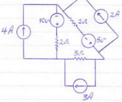
مثال) با استفاده از تبدیل منابع مدار زیر را ساده کنید.





www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com





پس از آن گراف را رسم کرده و ماتریس تلاقی گره با شاخه را می نویسیم.

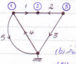
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

ماتریس تلاقی گره با شاخه: یک ماتریس A است که به ازای هر گراف می‌توان یک ماتریس تلاقی گره با شاخه اختصاص داد. سطرهای این ماتریس شماره‌های گره‌ها به جز گره مبنا و ستون‌های آن شاخه‌ها گراف می‌باشد.

آرایه‌های این ماتریس اعداد ۱ و ۱- و ۰ می‌باشد. هر شاخه از گره‌ای که خارج می‌شود ۱، به گره‌ای که وارد می‌شود ۱- و با گره‌ای که ارتباطی ندارد ۰.

مثال) شاخه‌ها:



۵ شاخه (b)
۴ گره (nt)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5} \\
\quad\ \ 4 & \ \ \cancel{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}}
\end{array}
$$

KCL در تجزیه و تحلیل گره: KCL در تجزیه و تحلیل گره به صورت $AJ=0$ است که در آن A ماتریس تلاقی گره با شاخه و J بردار جریان شاخه‌ها می‌باشد.

مثال: گراف فوق

گره ۱: $J_1 - J_4 + J_5 = 0$
گره ۲: $-J_1 - J_2 = 0$
گره ۳: $J_2 + J_3 = 0$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day :

با ضرب سطرها و ستون های ماتریس A در J بایستی به KCL ها نوشته شده برسیم.

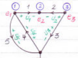
مثلاً سطر 1 : $j_1 + 0j_2 + 0j_3 - 1j_4 + j_5 \Rightarrow j_1 - j_4 + j_5 = 0 \rightarrow KCL\,!$

طبق KCL های نوشته شده در صفحه قبل می توان نوشت :

$$AJ = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \emptyset$$

KVL در تجزیه و تحلیل گره : ولتاژ گره ها را به جز گره مبنا e_1 و e_2 و e_3 می نامیم. (e_1 : ولتاژ گره 1 نسبت به زمین، ....) KVL در تجزیه و تحلیل گره بصورت $v = A^T e$ است که در آن A^T ترانهاده ماتریس A و e بردار ولتاژ گره ها می باشد. (ولتاژ انتها - ولتاژ ابتدا = v)

مثال)



A^T : جای سطرها و ستون های ماتریس A عوض شود.

$v_1 = e_1 - e_2$

$v_2 = e_3 - e_2$

$v_3 = e_3 - 0 = e_3$

$v_4 = 0 - e_1 = -e_1$

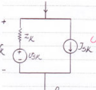
$v_5 = e_1 - 0 = e_1$

$$v = A^T e \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : 1389 Month : 8 Day : 3 ( )

روش منظم در تجزیه و تحلیل گره: هدف اینست که با محاسبات ماتریسی برروی یک مدار بتوان ولتاژ گره های مدار را بدست آورد. در این روش، این کار قدم به قدم انجام می شود. برای محاسبه روابط مورد نیاز از مدل شاخه استفاده می کنیم.



مدل شاخه K-ام

$$U_K = U_{SK} + Z_K(J_K - J_{SK}) \Rightarrow U_K = U_{SK} + Z_K J_K - Z_K J_{SK}$$

ضرب طرفین در ادمیتانس $\Rightarrow Y_K U_K = Y_K U_{SK} + J_K - J_{SK}$

$$\Rightarrow J_K = Y_K U_K + J_{SK} - Y_K U_{SK}$$

این رابطه مربوط به شاخه K-ام می باشد. با تعریف بردارها و ماتریس های زیر، رابطه را برای کل یک شبکه بدست می آوریم:

(بردار جریان شاخه ها) $J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ و (بردار ولتاژ شاخه ها) $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ و (بردار منابع جریان) $J_S = \begin{bmatrix} J_{S1} \\ J_{S2} \\ \vdots \end{bmatrix}$

(بردار منابع ولتاژ) $U_S = \begin{bmatrix} U_{S1} \\ U_{S2} \\ \vdots \end{bmatrix}$ و (ادمیتانس شاخه ها) $Y_b = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_5 \end{bmatrix}$ ادمیتانس شاخه سوم

$$j = Y_b v + J_s - Y_b v_s$$

طرفین این رابطه را در ماتریس تلاقی گره و شاخه ضرب می‌کنیم و روابط KVL و KCL را بکار می‌بریم.

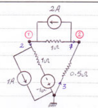
$$\underbrace{Aj}_{\text{KCL طبق } =0} = A Y_b \underbrace{v}_{\text{KVL طبق } = A^T e} + A J_s - A Y_b v_s \Rightarrow 0 = A Y_b A^T e + A J_s - A Y_b v_s$$

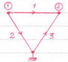
$$\underbrace{A Y_b A^T}_{Y_n} e = \underbrace{A Y_b v_s - A J_s}_{I_s} \Rightarrow Y_n \cdot e = I_s \Rightarrow e = Y_n^{-1} I_s$$

بنابراین برای هر مداری که بخواهیم تجزیه و تحلیل گره را به روش منظم انجام دهیم، پس از رسم گراف مراحل زیر را بکار می‌بریم:

رسم گراف $\rightarrow$ ماتریس A $\rightarrow Y_b \rightarrow Y_n \rightarrow v_s \rightarrow J_s \rightarrow I_s \rightarrow e$

مثال ۱





ادمیتانس شاخه ۱

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad Y_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

~~③ 0 -1 1~~

$$Y_n = A Y_b A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

برای یافتن بردار منابع مدار را با مدل شاخه (K-ام) مقایسه می‌کنیم.

منبع جریان شاخه ۱ منبع ولتاژ شاخه ۲ (منفی نداریم)

$$J_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شاخه ۳ منبع جریان ندارد

$$I_S = A Y_b V_S - A J_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow I_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Y_n e = I_S \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\triangle} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \triangle = 2(3) - (-1)(-1) = 5$$

det دترمینان

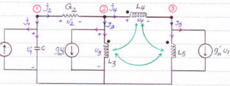
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} e_1 = 0.8 \\ e_2 = -0.4 \end{cases}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

برای مداری که در آن عناصر تزویج (سلف های تزویج ، ترانسفورماتور ایده آل و منابع وابسته) است ،
ماتریس Y_b را نمی توان از روی مدار نوشت . زیرا در این حالت ماتریس قطری نیست و بایستی
رابطه ی جریان شاخه ها را برحسب ولتاژ شاخه ها نوشته و با رابطه ی $j = Y_b V_b + \ldots$ مقایسه کنیم
تا Y_b تعیین گردد.

بعنوان مثال در مدار زیر هم سلف های تزویج و هم منبع وابسته وجود دارد:



$$L = \begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_3 & L_4 & L_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای این مدار بمنظور محاسبه ی Y_b روابط جریان شاخه ها را برحسب ولتاژ شاخه ها می نویسیم . از آنجا که
جریان سلف های تزویج شده را نمی توان مستقیماً برحسب ولتاژ سلف ها نوشت ، از پارامترهای Γ_{33} ، Γ_{44} و Γ_{45}

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

j_{L3} : جریان سلف L_3

استفاده می کنیم.

$$j_1 = -I + j c\omega \cdot v_1$$

$$j_2 = G_2 \cdot v_2$$

$$j_3 = g_m v_2 + j_{L3}$$

$$j_4 = j_{L4}$$

$$j_5 = g_m' v_1 + j_{L5}$$

اکنون بایستی جریانهای j_{L5} و j_{L4} و j_{L3} را برحسب ولتاژ شاخه ها کسب کرده و در این روابط قرار داده، تا Y_b را بتوانیم بدست آوریم.

$$\underset{\text{بردار}}{v} = \overbrace{j\omega \underset{\text{ماتریس}}{L}}^{x_L}\, \underset{\text{بردار}}{J}$$

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = j\omega L \begin{bmatrix} j_{L3} \\ j_{L4} \\ j_{L5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} j_{L3} \\ j_{L4} \\ j_{L5} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \underset{\text{ماتریس}}{L^{-1}} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+1} & \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2} & \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+3} \\ \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{2+1} & \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{2+2} & \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix} \times (-1)^{2+3} \\ \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+1} & \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+2} & \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+1} + 0.5 \times \begin{vmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2} + 0.5 \times \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_{L3} \\ j_{L4} \\ j_{L5} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$\begin{cases} j_{L3} = \dfrac{1.5}{j\omega} v_3 - \dfrac{0.5}{j\omega} v_4 - \dfrac{0.5}{j\omega} v_5 \\ j_{L4} = -\dfrac{0.5}{j\omega} v_3 + \dfrac{1.5}{j\omega} v_4 - \dfrac{0.5}{j\omega} v_5 \\ j_{L5} = -\dfrac{0.5}{j\omega} v_3 - \dfrac{0.5}{j\omega} v_4 + \dfrac{1.5}{j\omega} v_5 \end{cases}$$

واکنون روابط بدست آمده را درجریان سلف ها قرار می دهیم و نهایتا این دستگاه را با عبارت ماتریسی $J = Y_b v + \dots$ مقایسه کرده تا Y_b بدست آید.

$$\begin{cases} J_1 = -I + jC_1 \omega v_1 \\ J_2 = G_2 v_2 \\ J_3 = g_m v_2 + j_{L3} \\ J_4 = j_{L4} \\ J_5 = g_m' v_1 + j_{L5} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jC_1\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_m & \frac{1.5}{j\omega} & -\frac{0.5}{j\omega} & -\frac{0.5}{j\omega} \\ 0 & 0 & -\frac{0.5}{j\omega} & \frac{1.5}{j\omega} & -\frac{0.5}{j\omega} \\ g_m' & 0 & -\frac{0.5}{j\omega} & -\frac{0.5}{j\omega} & \frac{1.5}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

محاسبه‌ی وارون یک ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

دترمینان ماتریس A : (Δ)

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\times(-1)^{1+1} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}(-1)^{1+2} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\times(-1)^{1+3}$$

$$P = \begin{bmatrix}
\boxed{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}(-1)^{1+1}}_{\,a} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\times(-1)^{1+2}}_{\,b} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\times(-1)^{1+3}}_{\,c} \\
\boxed{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\times(-1)^{2+1}}_{\,d} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\times(-1)^{2+2}}_{\,e} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\times(-1)^{2+3}}_{\,f} \\
\boxed{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\times(-1)^{3+1}}_{\,g} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\times(-1)^{3+2}}_{\,h} & \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\times(-1)^{3+3}}_{\,i}
\end{bmatrix}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

P ترانهاده ماتریس : $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = P^T$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta} P^T$$

نکته) برای کاسبه بردار منابع ولتاژ و جریان تنها منابع ناسته (مستقل) در نظر گرفته می شوند.

برای مثال قبل داریم:

$$I_S = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad و \quad V_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روش نظری در تجزیه و تحلیل گره: در صورتیکه مدار شامل عناصر تزویج نباشد، می توان مستقیماً از رابطه $Y_n e = I_S$ استفاده کرد که در آن Y_n ماتریس ادمیتانس گره بصورت زیر تعریف می شود:

y_{ii}: مجموع ادمیتانس های متصل به گره i-ام

y_{ij}: منفی مجموع ادمیتانس های مشترک بین گره i-ام و j-ام

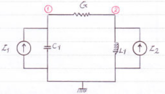
I_S: بردار منابع جریان گره ها می باشد و بردار بایستی فقط شامل منابع جریان باشد.

آرایه های این بردار بصورت زیر است:

جمع جبری منابع جریان وارد شده به گره K-ام $= i_{SK}$ (آرایه K-ام)

(وارد شده: + و خارج شده: -)

بردار e بردار ولتاژ گره‌ها می‌باشد. بعنوان مثال در مدار ساده شکل زیر از آنجا که عناصر تزویج وجود ندارد، می‌توان از روش نظری استفاده نمود.



$$Y_n e = I_s$$

$$\begin{bmatrix} JC\omega + G & -G \\ -G & G + \frac{1}{JL\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

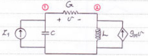
اگر e_1 را بخواهیم:

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & -G \\ I_2 & G + \frac{1}{JL\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} JC\omega + G & -G \\ -G & G + \frac{1}{JL\omega} \end{vmatrix}} = \frac{I_1 (G - \frac{J}{L\omega}) + G I_2}{(JC\omega + G)(G - \frac{J}{L\omega}) - G^2} = r e^{J\theta}$$

روش میانبر در تجزیه و تحلیل گره: درصورتیکه مدار فقط شامل منبع وابسته باشد و عنصر تزویج دیگری نباشد، می‌توان از روش نظری استفاده نمود. به این روش، روش میانبر گفته می‌شود.

منابع وابسته باید منابع جریان باشد و یا بتوان به منابع جریان تبدیل نمود.

بعنوان مثال در مدار زیر بدون توجه به اینکه منبع وابسته در مدار است به روش نظری معادلات را می‌نویسیم پس پارامتر v را برحسب ولتاژ گره‌ها نوشته و عبارت مربوط به منبع وابسته را به سمت چپ تساوی انتقال می‌دهیم.



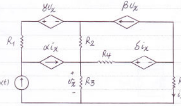
$$Y_n \cdot e = I_s \Rightarrow \begin{bmatrix} jC\omega + G & -G \\ -G & G + \frac{1}{jL\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ g_m v \end{bmatrix}$$

$$v = e_1 - e_2$$

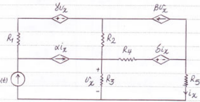
$$g_m v = g_m(e_1 - e_2) = +g_m e_1 - g_m e_2 \xrightarrow{\text{انتقال به چپ تساوی}} -g_m e_1 + g_m e_2$$

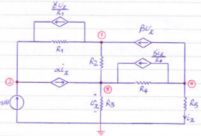
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} jc\omega + G & -G \\ -G - g_m & G + \frac{1}{jL\omega} + g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تکلیف) معادلات گره را به روش ماتریسی حل کنید.



تکلیف) معادلات گره را به روش ماتریسی حل کنید.





$v_x = e_3$

$i_x = \frac{-e_4}{R_5}$

$\frac{\gamma v_x}{R_1} = \frac{\gamma e_3}{R_1} \xrightarrow{\text{انتقال جهت تساوی}} -\frac{\gamma}{R_1} e_3$ ، $\frac{\delta i_x}{R_4} = \frac{-\frac{\delta e_4}{R_5}}{R_4} \rightarrow \frac{\delta}{R_4 . R_5} e_4$

$\beta v_x = \beta e_3 \rightarrow -\beta e_3$ ، $\alpha i_x = \frac{-\alpha e_4}{R_5} \rightarrow \frac{\alpha}{R_5} e_4$ ، $-\alpha i_x = \frac{\alpha e_4}{R_5} \rightarrow -\frac{\alpha}{R_5} e_4$

$Y_n \cdot e = I_s$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta v_x - \frac{\gamma v_x}{R_1} \\ i_s + \frac{\gamma v_x}{R_1} - \alpha i_x \\ \alpha i_x + \frac{\delta i_x}{R_4} \\ -\beta v_x - \frac{\delta i_x}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} - \beta + \frac{\gamma}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 - \frac{\gamma}{R_1} & 0 - \frac{\alpha}{R_5} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} + \frac{\alpha}{R_5} + \frac{\delta}{R_4 \cdot R_5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} + \beta & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} - \frac{\delta}{R_4 \cdot R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

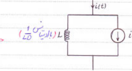
معادلات انتگرال-دیفرانسیل در تجزیه و تحلیل گره: اگر بخواهیم پاسخ کامل شبکه را با وجود شرایط اولیه محاسبه کنیم، نیاز به حل معادلات دیفرانسیل داریم. در معادلات دیفرانسیل هم مشتق وجود دارد و هم انتگرال. با در نظر گرفتن پارامتری بنام D می‌توان به روش تجزیه تحلیل گره به راحتی این معادلات را برای هر مداری نوشت. با این تعریف که:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow D \quad , \quad \int_0^t dt \longrightarrow D^{-1} \text{ یا } \frac{1}{D}$$

اکنون اگر برای سلف و خازن مدل های آنها را طبق تعریف زیر قرار دهیم داریم:

$$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v \xrightarrow{\text{انتگرال } \int_0^t dt \text{ از طرفین}} \int_0^t \frac{di}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt$$

$$\Rightarrow i(t) - i(0) = \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt + i(0) \Rightarrow i(t) = \frac{1}{LD}v + i(0)$$



« مدل سلف »

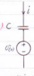
مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$$i = C\frac{dv_c}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}\, i \xrightarrow{\text{از طرفین } \int_0^t dt} \int_0^t \frac{dv}{dt}\,dt = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) - v(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \Rightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + v(0) \Rightarrow v(t) = \frac{1}{CD}\, i + v(0)$$

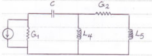
$\left(\frac{1}{CD}\right.$ با امپدانس $\left.\right)$ C



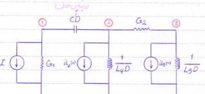
« مدل خازن »

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

به عنوان مثال در مدار زیر فرض کنید شرایط اولیه برای دو سلف $i_{L_4}(0)$ و $i_{L_5}(0)$ و ولتاژ اولیه ی خازن صفر باشد.



با قرار دادن مدل های بیان شده به جای سلف ها و خازن مدار زیر بدست می آید:



برای این مدار از آنجا که همه منابع، منابع جریان می باشد، به روش نظری معادلات گره را می نویسیم:

$$Y_n \cdot e = I_S$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + CD & -CD & 0 \\ -CD & CD + \frac{1}{DL_4} + G_2 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + \frac{1}{DL_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ -i_{L4(0)} \\ -i_{L5(0)} \end{bmatrix}$$

« معادلات انتگرال - دیفرانسیل به فرم ماتریسی »

$$\begin{cases} G_1 e_1 + C\dfrac{de_1}{dt} - C\dfrac{de_2}{dt} = -I \\ -C\dfrac{de_1}{dt} + C\dfrac{de_2}{dt} + \dfrac{1}{L_4}\displaystyle\int_0^t e_2\,dt + G_2 e_2 - G_2 e_3 = -i_{L4(0)} \\ -G_2 e_2 + G_2 e_3 + \dfrac{1}{L_5}\displaystyle\int_0^t e_3\,dt = -i_{L5(0)} \end{cases}$$

« معادلات انتگرال دیفرانسیل گره »

مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

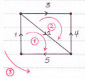
Subject:
Year : Month : Day : ( )

تجزیه و تحلیل مش :

ماتریس تلاقی شاخه با مش : مشابه تجزیه تحلیل گره، ماتریس تلاقی شاخه با مش بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف مش : حلقه‌ای که شاخه‌ای درآن نباشد را مش می‌گوئیم. جهت مش‌ها به سمت عقربه‌های ساعت و جهت یک مش بیرونی خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد.

بعنوان مثال درگراف زیر ۲ مش می‌توان تعریف کرد :



$$M = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

* مش بیرونی (مش ۳) شاخه‌های 5 و 4 و 3 و 1 را می‌پوشاند.

* شاخه‌های هم جهت با مش مربوطه را با 1 و شاخه‌هایی با جهت مخالف با مش مربوطه را با 1- نشان می‌دهیم. مثلاً شاخه ۵ با مش ۱ هم جهت می‌باشد (۱) و مخالف جهت مش ۳ می‌باشد (-1) و با مش ۲ ارتباطی ندارد. (۰)

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

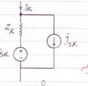
KCL در تجزیه و تحلیل مش: با در نظر گرفتن جریانهای i_1 و i_2 به عنوان جریان های مش، جریان شاخه ها را می نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} j_1 &= i_1 \\ j_2 &= i_1 - i_2 \\ j_3 &= i_2 \\ j_4 &= -i_2 \\ j_5 &= i_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M^T} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow j = M^T i$$

KVL در تجزیه و تحلیل مش:

$$\left.\begin{aligned} &\text{مش }1: v_1 + v_2 + v_5 = 0 \\ &\text{مش }2: v_3 - v_4 - v_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow Mv = 0$$

روش منظم در تجزیه و تحلیل مش: مشابه تجزیه و تحلیل گره با در نظر گرفتن مدل شاخه و تعریف ماتریسهای مربوطه داریم:



«مدل شاخه K-ام»

$$v_K = v_{SK} + Z_K(j_K - j_{SK})$$

$$v_K = Z_K j_K + v_{SK} - Z_K j_{SK}$$

برای کل شبکه: $v = Z_b j + v_S - Z_b j_S$

$$Z_b = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

«ماتریس قطری امپدانس شاخه‌ها»

با ضرب M در طرفین رابطه:

$$\underbrace{Mv}_{\text{طبق KVL}=0} = MZ_b \underbrace{j}_{\text{طبق KCL}: M^T i} + Mv_S - MZ_b J_S \Rightarrow 0 = MZ_b M^T i + Mv_S - MZ_b J_S$$

$$\Rightarrow \underbrace{MZ_b M^T}_{Z_m} i = \underbrace{MZ_b J_S - Mv_S}_{E_S} \Rightarrow Z_m . i = E_S$$

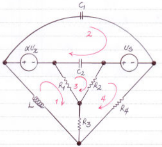
«معادله تجزیه و تحلیل مش»

روش منظم : گراف $\rightarrow M \rightarrow Z_b \rightarrow Z_m \rightarrow J_s \rightarrow V_s \rightarrow E_s \rightarrow Z_m . i = E_s$

نکته) درصورتیکه مدار شامل عناصر تزویج نباشد، می توان Z_b را از روی مدار نوشت. زیرا یک ماتریس قطری بوده که عناصر روی قطر آن امپدانس شاخه ها می گردد ولی اگر عناصر تزویج در مدار باشد، بایستی روابط ولتاژ شاخه ها را نوشته و با عبارت $V = Z_b J + \dots$ مقایسه کنیم تا Z_b بدست آید.

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران ahmadrsh@yahoo.com

مثال) در مدار زیر معادلات انتگرال دیفرانسیل را از روش نظری (مبانی) بدست آورید.



$Z_m \cdot i = E_S$

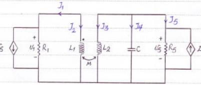
$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_3 & 0 & -R_1 & -R_3 \\ 0 & \frac{1}{C_2D}+\frac{1}{C_1D} & -\frac{1}{C_1D} & 0 \\ -R_1 & -\frac{1}{C_1D} & R_1+R_2+\frac{1}{C_1D} & -R_2 \\ -R_3 & 0 & -R_2 & R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha v_x \\ \alpha v_x + v_S \\ 0 \\ -v_S \end{bmatrix}$$

$v_x = \frac{1}{C_1D}(i_3-i_2)$ $\quad \alpha v_x = \frac{\alpha}{C_1D}(i_3-i_2)$ $\quad -\alpha v_x = \frac{-\alpha}{C_1D}(i_3-i_2)$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_3 & 0-\frac{\alpha}{C_1D} & -R_1+\frac{\alpha}{C_1D} & -R_3 \\ 0 & \frac{1}{C_2D}+\frac{1}{C_1D}+\frac{\alpha}{C_1D} & -\frac{1}{C_1D}-\frac{\alpha}{C_1D} & 0 \\ -R_1 & -\frac{1}{C_1D} & R_1+R_2+\frac{1}{C_1D} & -R_2 \\ -R_3 & 0 & -R_2 & R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_S+0 \\ 0 \\ -U_S \end{bmatrix}$$

مثال



در این مدار چون عناصر تزویج وجود دارد، ولتاژ شاخه ها را برحسب جریان شاخه ها می نویسیم:

$$v = Z_b J_b + \dots \begin{cases} v_1 = R_1(J_1 - g_m v_5) = R_1 J_1 - R_1 g_m v_5 \\ v_2 = L_1 j\omega J_2 + M j\omega J_3 \\ v_3 = M j\omega J_2 + L_2 j\omega J_3 \\ v_4 = \dfrac{1}{jC\omega} J_4 \\ v_5 = R_5(J_5 + I_5) = R_5 J_5 + R_5 I_5 \end{cases}$$

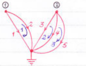
$$\Rightarrow v_1 = R_1 J_1 - R_1 g_m (R_5 J_5 + R_5 I_5)$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$$
Z_b = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_1 g_m R_5 \\
0 & L_1 j\omega & Mj\omega & 0 & 0 \\
0 & Mj\omega & L_2 j\omega & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{jc\omega} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R_5
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

رسم گراف :



$$
M = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$Z_M = M Z_b M^T, \ldots$

درادامه با رسم گراف و ماتریس M و ماتریس $Z_m = MZ_bM^T$ را می‌سازیم:

$$\dot{J}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای نوشتن بردارهای V_S و J_S فقط منابع ثابت را درنظر می‌گیریم.

درادامه بردار E_S را بدست می‌آوریم: $E_S = MZ_b\dot{J}_S - MV_S$

ونهایتاً معادلات مش را بصورت $Z_m \cdot i = E_S$ می‌نویسیم.

روش نظری در تجزیه و تحلیل مش: اگر مدار شامل عناصر تزویج نباشد، می‌توان مستقیماً رابطهٔ $Z_m \cdot i = E_s$ را نوشت، که در آن:

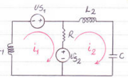
$$Z_m \begin{cases} Z_{ii}: & \text{مجموع امپدانسهای موجود در مش } i\text{-ام} \\ Z_{ij}: & \text{منفی مجموع امپدانسهای مشترک بین مش } i\text{-ام و مش } j\text{-ام} \end{cases}$$

و E_s بردار منابع:

$E_s = \begin{bmatrix} \leftarrow \\ \\ \end{bmatrix}$ منفی مجموع منابع مش اول

(علامت + برای منبعی که جهت آن منفی به مثبت باشد)

مثال) مطلوبست نوشتن معادلات مش بصورت ماتریسی.



$Z_m \cdot i = E_s$

$$\begin{bmatrix} jL_1\omega + R & -R \\ -R & R + jL_2\omega + \frac{1}{jC\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{S_1} - U_{S_2} \\ U_{S_2} \end{bmatrix} \rightarrow -(-U_{S_1} + U_{S_2})$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

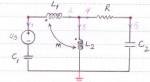
Subject:
Year : Month : Day : ( )

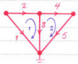
معادلات انتگرال دیفرانسیل در تجزیه و تحلیل مش:

مدار را از روش منظم یا نظری و یا میانبر حل کرده و معادلات مش را بصورت ماتریسی می‌نویسیم و دقت می‌کنیم که از پارامتر D استفاده نماییم.

$$\frac{d}{dt} \to J\omega \to D \quad \text{و} \quad \int_0^t dt \to \frac{1}{J\omega} \to \frac{1}{D} \quad \Rightarrow Z_m \cdot i = E_S$$

تکلیف: مطلوبست معادلات انتگرال دیفرانسیل بصورت ماتریسی برای مدار زیر.





$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ M = \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

$$U_1 = U_5 + \frac{1}{C_1 D} \dot{J}_1$$
$$U_2 = L_1 D \dot{J}_2 + MD \dot{J}_3$$
$$U_3 = DL_2 \dot{J}_3 + DM \dot{J}_2$$
$$U_4 = R \dot{J}_4$$
$$U_5 = \frac{1}{C_2 D} \dot{J}_5$$

$$\xrightarrow{V = Z_b \dot{J} \cdots} \quad Z_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 D & MD & 0 & 0 \\ 0 & MD & L_2 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 D} \end{bmatrix}$$

$$Z_m = M Z_b M^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 D & MD & 0 & 0 \\ 0 & MD & L_2 D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 D} & DL_1+MD & MD+\frac{DL}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -MD & -\frac{DL}{2} & R & \frac{1}{C_2 D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 D}+DL_1+MD+MD+L_2 D & -MD-L_2 D \\ -MD-DL_2 & L_2 D+R+\frac{1}{C_2 D} \end{bmatrix}$$

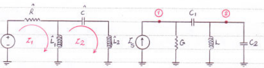
$$J_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U_S = \begin{bmatrix} U_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E_S = \underbrace{M Z_b \cancel{J_S}}_{0} - MU_S \Rightarrow E_S = \begin{bmatrix} U_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_m \cdot i = E_S \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 D}+DL_1+MD+MD+DL_2 & -MD-DL_2 \\ -MD-DL_2 & L_2 D+R+\frac{1}{C_2 D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

دوگانی: دو مدار زیر را در نظر گرفته، معادلات آنها را می‌نویسیم و شرط برابر بودن معادلات را می‌یابیم:

مدار II — مدار I



«شکل M» — «شکل N»

برای مدار اول معادلات گره و برای مدار دوم معادلات مش را می‌نویسیم:

$$\hat{Z}_m \cdot \hat{i} = \hat{E}_S \qquad\qquad Y_n \cdot e = I_S$$

$$\begin{bmatrix} \hat{R}+j\hat{L}_1\omega & -j\hat{L}_1\omega \\ -j\hat{L}_1\omega & j\hat{L}_1\omega+\frac{1}{j\hat{C}\omega}+j\hat{L}_2\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}_1\\ \hat{i}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{E}_S\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G+jC_1\omega & -jC_1\omega \\ -jC_1\omega & jC_1\omega+\frac{1}{jL\omega}+jC_2\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_S\\ 0\end{bmatrix}$$

شرط تشابه دو دسته معادله:

$\hat{E}_S = I_S$, $\hat{R} = G$, $\hat{L}_1 = C_1$, $\hat{C} = L$, $\hat{L}_2 = C_2$

با این شرط، این دو مدار دوگان همدیگر می‌باشند.

سری → موازی
موازی → سری
ولتاژ → جریان
جریان → ولتاژ

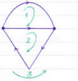
رسم دوگان یک مدار از طریق گراف :

قدم اول: برای هر یک از مش‌های G (گراف مدار) با حساب آوردن مش بیرونی یک گره از $\hat{G}$ (دوگان آن) متناظر می‌کنیم.

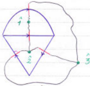
قدم دوم: برای هر شاخه مانند k از G که میان مش‌های i و j مشترک است یک شاخه $\hat{k}$ از $\hat{G}$ را که به گره‌های $\hat{i}$ و $\hat{j}$ متصل هستند، متناظر می‌کنیم.

مثال: فرض کنید مداری وجود دارد که بخواهیم دوگان آنرا رسم نماییم.

ابتدا گراف آنرا رسم کرده و دو قدم بیان شده را انجام می‌دهیم.



گراف G

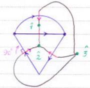


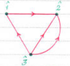
گراف $\hat{G}$

* خطوط بر شاخه‌ها عمود باشند.

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

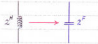
با چرخش هر شاخه از گراف G به اندازه‌ی 90° در جهت عقربه‌های ساعت، جهت شاخه متناظر از گراف $\hat{G}$ تعیین می‌شود.





دوگان

در پایان قطعات مدار مربوط به دوگان را مشخص می‌کنیم. یعنی اگر در مدار اول در شاخه‌ای خازن باشد به سلف، اگر سلف باشد، به خازن، اگر مقاومت باشد به رسانایی، اگر منبع جریان باشد به منبع ولتاژ و... تبدیل می‌شود.



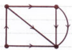
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

فصل یازدهم:

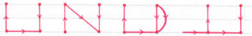
«تجزیه و تحلیل حلقه و کاتست»

درخت: گراف بهم پیوسته g را در نظر بگیرید، به تعدادی از شاخه‌های گراف درخت گویند. اگر:
۱) زیرگراف g باشد ۲) هیچ حلقه‌ای تشکیل نشود ۳) بین گره‌ها مسیرتیایی وجود داشته باشد.

مثال)



g



درخت — درخت — درخت نیست (تشکیل حلقه داده است) — درخت نیست (زیرگراف g نیست)

درخت نیست

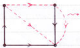
* برای داشتن مسیرتیا، درخت بایستی شامل گره‌ها گراف باشد. (از این مثال ۴ گره) (مسیرتیایی تا یک گره وجود ندارد)*

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

کاتست، شاخه را دو قسمت می کند: بیرونی و داخلی

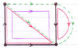
Subject:
Year : Month : Day : ( )

لینک: به بقیه‌ی شاخه‌های گراف لینک گویند.



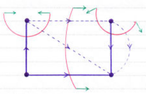
لینک

تعریف حلقه اساسی: یک لینک به همراه تعدادی شاخه‌ی درخت تشکیل حلقه اساسی مربوط به آن لینک را می دهد و جهت آن، جهت لینک می باشد.



سه لینک ← سه حلقه‌ی اساسی

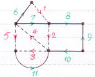
تعریف کاتست اساسی: هر شاخه درخت به همراه تعدادی لینک تشکیل یک کاتست اساسی مربوط به آن شاخه درخت را می دهد. کاتست، منحنی گوسی شکلی است که جهت آن، جهت شاخه‌ی درخت می باشد.



www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

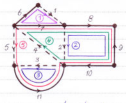
تجزیه و تحلیل حلقه : مشابه تجزیه تحلیل گره روش موارد زیر را برای تجزیه تحلیل حلقه بیان می‌کنیم.

بعنوان مثال فرض کنید گرافی از یک مدار داشته باشیم و درختی مناسب از آن را انتخاب کنیم :



نکته ۱) شماره گذاری، از لینک‌ها شروع می‌شود.

نکته ۲) هر لینک، یک حلقه تشکیل می‌دهد.



نکته ۳) شماره جهت حلقه از روی لینک‌های مربوط مشخص می‌شود.

نکته ۴) تعداد شاخه‌های درخت، همواره یک عدد از تعداد گره‌های گراف کمتر است.

۳ شاخه ← ۴ گره : مثلاً

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:

ear: Month: Day: ( )

ماتریس تلاقی حلقه با شاخه:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & B = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

KCL در تجزیه تحلیل حلقه: جریان حلقه‌ها را از i_1 تا i_5 انتخاب می‌کنیم.

مثلاً: i_1 جریان حلقه‌ی اساسی 1

$j_1 = i_1$	$j_6 = i_1$
$j_2 = i_2$	$j_7 = -i_1 + i_4 - i_5$
$j_3 = i_3$	$j_8 = -i_2 + i_4 - i_5$
$j_4 = i_4$	$j_9 = i_2 - i_4 + i_5$
$j_5 = i_5$	$j_{10} = -i_2 + i_4 - i_5$
	$j_{11} = i_3 + i_5$

PAYCO

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_1 \\ \dot{j}_2 \\ \dot{j}_3 \\ \dot{j}_4 \\ \dot{j}_5 \\ \dot{j}_6 \\ \dot{j}_7 \\ \dot{j}_8 \\ \dot{j}_9 \\ \dot{j}_{10} \\ \dot{j}_{11} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{J} = B^T i$$

KVL در تجزیه تحلیل حلقه :

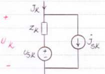
1. $v_1 - v_7 + v_6 = 0$
2. $v_2 - v_{10} + v_9 - v_8 = 0$
3. $v_3 + v_{11} = 0$
4. $v_4 + v_7 + v_8 - v_9 + v_{10} = 0$
5. $v_5 + v_{11} - v_{10} + v_9 - v_8 - v_7 = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{11} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow BV = 0$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year: Month: Day: ( )

روش منظم در تجزیه تحلیل حلقه:



$$U_K = U_{SK} + Z_K (J_K - J_{SK})$$

$$U_K = Z_K J_K + U_{SK} - Z_K J_{SK}$$

$$U = Z_b J + U_S - Z_b J_S$$

« مدل شاخه K-ام »

با تعریف Z_b و بردارهای J و U و J_S و U_S به تجزیه تحلیل مش داریم:

$$\underbrace{BU}_{KVL=0} = B Z_b \underbrace{J}_{KCL:\, B^T i} + BU_S - B Z_b J_S \Rightarrow 0 = B Z_b B^T i + BU_S - B Z_b J_S$$

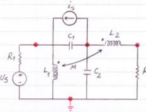
$$\Rightarrow \underbrace{Z_b B^T}_{Z_L} \cdot i = \underbrace{B Z_b J_S - BU_S}_{E_S} \Rightarrow Z_L \cdot i = E_S$$ « معادلات حلقه »

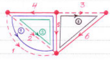
بنابراین روش منظم در تجزیه تحلیل حلقه از رسم گراف و تعیین درخت مناسب شروع شده و ماتریس های مربوطه محاسبه می شوند.

روش منظم: گراف $\rightarrow B \rightarrow Z_b \rightarrow Z_L \rightarrow J_S \rightarrow U_S \rightarrow E_S \rightarrow \underbrace{Z_m}_{Z_L} i = E_S$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

به عنوان مثال در مدار زیر ابتدا گراف را رسم کرده و از روی آن درخت مناسب را انتخاب می کنیم:





$$B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

از آنجایی که در مدار عناصر تزویج وجود دارد، ماتریس Z_b قطری نبوده و بایستی رابطه ی ولتاژ شاخه ها برحسب جریان شاخه ها نوشته شود و با رابطه ی $V = Z_b J + \dots$ مقایسه شود تا Z_b تعیین گردد.

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= R_1 J_1 + v_s \\
v_2 &= jL_1\omega \dot{J_2} + jM\omega \dot{J_3} \\
v_3 &= jM\omega \dot{J_2} + jL_2\omega \dot{J_3} \\
v_4 &= \frac{1}{jC_1\omega}(\dot{J_4} - i_s) \\
v_5 &= \frac{1}{jC_2\omega}\dot{J_5} \\
v_6 &= R_2 \dot{J_6}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_b = \begin{bmatrix}
R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & jL_1\omega & jM\omega & 0 & 0 \\
0 & jM\omega & jL_2\omega & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{jC_1\omega} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{jC_2\omega} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R_2
\end{bmatrix}$$

$$Z_L = B Z_b B^T = \dots$$

$$I_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad V_s = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_s = B Z_b J_s - B V_s = \dots$$

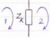
$$Z_L \cdot i = E_s$$

روش نظری در تجزیه تحلیل حلقه: درصورتیکه عناصر تزویج در مدار نباشد و همه منابع، ولتاژ باشند می‌توان از روش نظری استفاده کرد.

$$Z_L \cdot i = E_S$$

Z_L:
- Z_{ii} : مجموع امپدانسهای موجود در حلقه i-ام
- Z_{ij} : مجموع امپدانسهای مشترک در حلقه i-ام و j-ام (جهت حلقه‌ها یکسان: علامت + و جهت حلقه‌ها متفاوت: −)

مثلا:

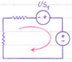


$\Rightarrow -Z_K$

$$E_S = \begin{bmatrix} \vdots \\ E_K \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

E_K: منفی مجموع منابع ولتاژ در حلقه K-ام (علامت + برای جهت منفی به مثبت)

مثلا:



$\Rightarrow U_{S1} - U_{S2}$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

معادلات انتگرال دیفرانسیل در تجزیه تحلیل حلقه: از روش منظم یا نظری استفاده کرده و معادلات حلقه را می‌نویسیم. تنها تفاوت آن، در اینست که روابط برحسب پارامتر D نوشته می‌شوند. (نه برحسب فازور)

که در آن:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow D \qquad\qquad \int_0^t dt \longrightarrow D^{-1} \text{ یا } \frac{1}{D}$$

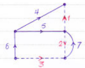
* روش ماتریس در تجزیه تحلیل حلقه همانند روشهای قبل بدست می‌آید.

تکلیف: برای مثال حل شده در تجزیه تحلیل حلقه، معادلات انتگرال دیفرانسیل را بنویسید.

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

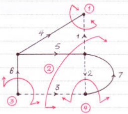
تجزیه و تحلیل کات‌ست: روابط بیان شده را برای تجزیه تحلیل کات‌ست نیز داریم.

* شماره‌گذاری را از لینک ها شروع کنید.



اولین شاخه‌ی درخت کات‌ست اول را تشکیل می‌دهد. (یعنی شاخه 4 ، زیرا ...و4و3و2و1)
شاخه لینک لینک لینک

نکته: جهت کات‌ست، هم جهت با جهت شاخه است.



کات‌ست ۱ در جهت شاخه ۴

کات‌ست ۲ در جهت شاخه ۵

کات‌ست ۳ در جهت شاخه ۶

کات‌ست ٤ در جهت شاخه ۷

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

ماتریس تلاقی شاخه با کاتست:

شاخه:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
Q = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

مثلاً: شاخه ۱ ـ کاتست های ۱ و ۲ از آن عبور می کنند که کاتست ۱ هم جهت با آن (1) و کاتست ۲ خلاف جهت آن است. (-1) ضمناً کاتست های ۳ و ۴ هیچ ارتباطی با شاخه ۱ ندارند. (0)

KCL در تجزیه تحلیل کاتست:

کاتست ۱ : $j_1 + j_4 = 0$

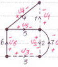
کاتست ۲ : $-j_1 + j_5 + j_3 = 0$

کاتست ۳ : $j_6 + j_3 = 0$

کاتست ٤ : $-j_3 - j_2 + j_7 = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_7 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow QJ = 0$$

KVL در تجزیه تحلیل کاتست: درصورتیکه ولتاژ شاخه‌های درخت را $e_1, \ldots, e_4$ قرار دهیم و ولتاژ همه شاخه‌ها را برحسب این ولتاژها بنویسیم، داریم:

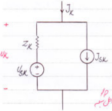


$$\begin{aligned} v_4 &= e_1 \\ v_5 &= e_2 \\ v_6 &= e_3 \\ v_7 &= e_4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} v_1 &= -v_5 + v_4 = -e_2 + e_1 \\ v_2 &= -v_7 = -e_4 \\ v_3 &= v_6 + v_5 - v_7 = e_3 + e_2 - e_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \Rightarrow v = Q^T e$$

بردار ولتاژ شاخه‌های درخت

روش منظم در تجزیه تحلیل کات ست: با در نظر گرفتن مدل شاخه، روش منظم بصورت زیر بیان می شود:



$$v_K = v_{SK} + Z_K (J_S - J_{SK})$$

$$Y_K v_K = Y_K v_{SK} + J_S - J_{SK}$$

$$J_S = Y_K v_K + J_{SK} - Y_K v_{SK}$$

برای کل شبکه: $J = Y_b v + J_S - Y_b v_S$

ضرب در Q: $\underbrace{QJ}_{KCL:\ 0} = Q Y_b \underbrace{v}_{KVL:\ Q^T e} + Q J_S - Q Y_b v_S \Rightarrow 0 = Q Y_b Q^T e + Q J_S - Q Y_b v_S$

$$\Rightarrow \underbrace{Q Y_b Q^T}_{Y_q} e = \underbrace{Q Y_b v_S - Q J_S}_{I_S} \Rightarrow Y_q . e = I_S$$

روش منظم: ترسیم گراف $\rightarrow Q \rightarrow Y_b \rightarrow Y_q \rightarrow J_S \rightarrow v_S \rightarrow I_S \rightarrow Y_q . e = I_S$

معادلات کات ست

Subject:
Year : Month : Day : ( )

روش نظری در تجزیه تحلیل کاتست: درصورتیکه مدار شامل عناصر تزویج نباشد، می توان مستقیماً رابطهٔ ماتریسی $Y_q e = I_s$ را نوشت.

$$Y_q : \begin{cases} y_{ii} : \text{مجموع ادمیتانسهای موجود در کاتست } i\text{-ام} \\ y_{ij} : \pm(\text{مجموع ادمیتانسهای مشترک بین کاتست}(\text{های}) \; i\text{-ام و } j\text{-ام}) \end{cases}$$

+ جهت کاتست ها یکسان
− جهت کاتست ها متفاوت

I_s: بردار منابع جریان کاتست

$$I_S = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{SK} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

I_{SK} ← $\pm$(مجموع منابع جریان موجود در کاتست K-ام)

+ جهت منبع و کاتست یکسان
− جهت منبع و کاتست متفاوت

رابطهٔ B و Q:

قضیه: ماتریس اساسی حلقه و ماتریس اساسی کاتست را بترتیب B و Q می نامیم. درصورتیکه این دو ماتریس مربوط به یک گراف جهت دار با یک درخت مشخص باشد، داریم:

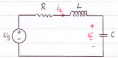
$BQ^T = 0$ و $QB^T = 0$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

«فصل دوازدهم»

«معادلات حالت»

مدار زیر را در نظر گرفته و معادلات دیفرانسیل حاکم بر این مدار را بگونه‌ای می‌نویسیم که تنها یک عدد، مشتق جریان سلف یا مشتق ولتاژ خازن در آن باشد و بقیه متغیرها برحسب جریان سلف و ولتاژ خازن باشد.



$$\begin{cases} i_L = i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \\ -v_S + R\,i_L + L\dfrac{di_L}{dt} + v_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C}\,i_L \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L}v_C - \dfrac{R}{L}i_L + \dfrac{1}{L}v_S \end{cases}$$

به این معادلات، معادلات حالت گفته می‌شود و به متغیرهای i_L و v_C متغیرهای حالت گفته می‌شود.

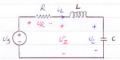
برای هر مدار جریان (شار) سلف و ولتاژ (بار) خازن متغیرهای حالت می‌باشند.

مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

انتخاب خروجی مدار، دلخواه است. البته سلف و خازن نمی توانند بعنوان خروجی های مدار در نظر گرفته شوند.

درصورتیکه v_Z و v_R بعنوان خروجی های مدار تعریف شوند، می توان برحسب متغیرهای حالت نوشت:



$$\Rightarrow \begin{cases} v_R = R\cdot i_L \\ v_Z = -R\cdot i_L + v_S \end{cases}$$

به v_S ورودی مدار گفته می شود.

می توان این معادلات را برحسب ماتریسی نوشت. با تعریف بردار متغیرهای حالت $X = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$ داریم:

معادلات حالت:
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_S$$

با تعریف $Y = \begin{bmatrix} v_R \\ v_Z \end{bmatrix}$ بعنوان خروجی داریم:

خروجی:
$$\begin{bmatrix} v_R \\ v_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & -R \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_S$$

بطور کلی با تعریف بردار $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ بعنوان متغیرهای حالت و بردار $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ بعنوان خروجی و بردار $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ بعنوان ورودی، معادلات حالت را بصورت زیر داریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

روش منظم در نوشتن معادلات حالت:

۱) انتخاب درخت مناسب که شامل همه ی خازن ها باشد و سلف ها بصورت لینک باشد.

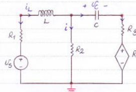
۲) انتخاب متغیرهای حالت. یعنی جریان (شار) سلف یا ولتاژ (بار) خازن.

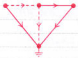
۳) نوشتن معادلات حلقه اساسی برای سلف ها و کاتست اساسی برای خازن ها.

۴) بدست آوردن متغیرهای اضافی برحسب متغیرهای حالت.

۵) نوشتن معادلات بصورت استاندارد ماتریسی

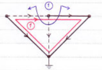
مثال)





$$X = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

نوشتن معادلات حلقه اساسی برای سلف‌ها و کاتست اساسی برای خازن‌ها:



حلقه 1 : $L\dfrac{di_L}{dt} + v_C + R_3 i_{R_3} + R_m i - v_S - R_1 i_{R_1} = 0$

ثابت ثابت ثابت ثابت

متغیرهای اضافه

کاتست 1 : $-i_L + i + C\dfrac{dv_C}{dt} = 0$

ثابت

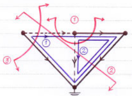
اکنون بایستی این متغیرها برحسب متغیرهای حالت نوشته شوند. برای این منظور بررسی می‌کنیم که هر متغیر

ردمدار بصورت درخت است یا لینک ؛ اگر بصورت درخت باشد بر روی آن کاتست اساسی و اگر بصورت لینک

ابتدا، بر روی آن حلقه‌ی اساسی می‌زنیم.

حلقه 2 ⟶ لینک ⟶ i کاتست 2 ⟶ درخت ⟶ i_{R_3}

کاتست 3 ⟶ درخت ⟶ i_{R_1}



② کاتست: $-i_L + i + i_{R_3} = 0$

② حلقه: $R_2 \cdot i - R_m \cdot i - R_3 \cdot i_{R_3} - V_C = 0$

③ کاتست: $i_L + i_{R_1} = 0$

بنابراین قدم ۵، این دستگاه سه معادله، سه مجهولی را حل کرده و متغیرهای اضافی درون دو معادله اول مربوط به حلقه 1 و کاتست 1 قرار گرفته و بصورت استاندارد نوشته می‌شوند.

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

تکلیف) این عملیات را انجام دهید و معادلات حالت را بصورت استاندارد ماتریسی بنویسید.

$$\begin{cases} 1 \quad -i_L + i + i_{R_3} = 0 \Rightarrow i + i_{R_3} = i_L \\ 2 \quad (R_2 - R_m)i - R_3 i_{R_3} = v_C \\ 3 \quad i_L + i_{R_1} = 0 \Rightarrow i_{R_1} = -i_L \end{cases}$$

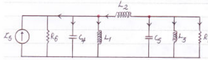
$$\xrightarrow{1,2} i = \frac{\begin{vmatrix} i_L & 1 \\ v_C & R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_2 - R_m & R_3 \end{vmatrix}}$$

و

$$i_{R_3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i_L \\ R_2 - R_m & v_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ R_2 - R_m & R_3 \end{vmatrix}}$$

برای نوشتن معادلات حالت می‌توان شار سلف و بار خازن را به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفت.

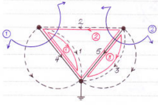
به عنوان مثال در مدار زیر $\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3 , q_4 , q_5$ به عنوان متغیرهای حالت می‌باشند.



برای نوشتن معادلات حالت در صورتیکه متغیرها، شار سلف و بار خازن باشند، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

بار خازن: $q = Cv \Rightarrow v_C = \frac{q}{C} \quad , \quad i_C = \frac{dq}{dt}$

شار سلف: $\varphi = L.i \Rightarrow i_L = \frac{\varphi}{L} \quad , \quad v_L = \frac{d\varphi}{dt}$



Subject:
Year : Month : Day : ( )

سلفهای لینک حلقه (۱) : $\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{q_4}{C_4} = 0$

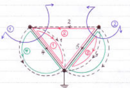
سلفهای لینک حلقه (۲) : $\frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0$

سلفهای لینک حلقه (۳) : $\frac{d\varphi_3}{dt} - \frac{q_5}{C_5} = 0$

خازنهای درخت کاتست (۱) : $-I_5 + i_{R_6} + \frac{dq_4}{dt} + \frac{\varphi_1}{L_1} - \frac{\varphi_2}{L_2} = 0$

خازنهای درخت کاتست (۲) : $\frac{\varphi_2}{L_2} + \frac{dq_5}{dt} + \frac{\varphi_3}{L_3} + i_{R_7} = 0$

$i_{R_6} \rightsquigarrow$ لینک $\Rightarrow$ حلقه ۴ $\qquad$ $i_{R_7} \rightsquigarrow$ لینک $\Rightarrow$ حلقه ۵



حلقه (۴) : $R_6 i_{R_6} - \frac{q_4}{C_4} = 0 \Rightarrow i_{R_6} = \frac{q_4}{R_6 C_4}$

حلقه (۵) : $R_7 i_{R_7} - \frac{q_5}{C_5} = 0 \Rightarrow i_{R_7} = \frac{q_5}{R_7 \cdot C_5}$

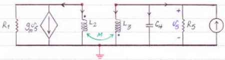
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

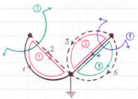
$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \dfrac{1}{C_4} q_4 \\[2mm]
\dfrac{d\varphi_2}{dt} = -\dfrac{1}{C_4} q_4 + \dfrac{1}{C_5} q_5 \\[2mm]
\dfrac{d\varphi_3}{dt} = \dfrac{1}{C_5} q_5 \\[2mm]
\dfrac{dq_4}{dt} = -\dfrac{1}{L_1}\varphi_1 + \dfrac{1}{L_2}\varphi_2 - \dfrac{q_4}{R_6 C_4} + I_5 \\[2mm]
\dfrac{dq_5}{dt} = -\dfrac{1}{L_2}\varphi_2 - \dfrac{1}{L_3}\varphi_3 - \dfrac{q_5}{R_7 \cdot C_5}
\end{cases}
$$

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_4} & \frac{1}{C_5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} \\
-\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{1}{R_6 \cdot C_4} & 0 \\
0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_3} & 0 & -\frac{1}{R_7 \cdot C_5}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} I_5
$$

اگر مدار شامل سلف تزویج باشد، برای نوشتن معادلات حالت بایستی دستگاه مربوط به معادلات سلف های تزویج را حل کنیم تا مشتق های جریانهای سلف های تزویج برحسب متغیرهای حالت بدست آیند.

بعنوان مثال در مدار زیر متغیرهای حالت، جریانهای سلف های تزویج و ولتاژ خازن می باشد.





مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

متغیرهای حالت : $J_2 \,،\, J_3 \,،\, v_4$

(۱) حلقه : $L_2 \dfrac{dJ_2}{dt} - M \dfrac{dJ_3}{dt} - R_1 \cdot i_{R_1} = 0$

(۲) حلقه : $-M \dfrac{dJ_2}{dt} + L_3 \dfrac{dJ_3}{dt} - v_4 = 0$

(۱) کات‌ست : $J_3 + C_4 \dfrac{dv_4}{dt} + i_{R_5} - I_S = 0$

$i_{R_1} \rightsquigarrow$ رفت $\Rightarrow$ (۲) کات‌ست : $i_{R_1} + g_m \underbrace{v_5}_{= v_4} + J_2 = 0 \Rightarrow i_{R_1} = -g_m v_4 - J_2$

$i_{R_5} \rightsquigarrow$ لینک $\Rightarrow$ (۳) حلقه : $R_5 \cdot i_{R_5} - v_4 = 0 \Rightarrow i_{R_5} = \dfrac{1}{R_5} v_4$

$$\begin{cases} L_2 \dfrac{dJ_2}{dt} - M \dfrac{dJ_3}{dt} = R_1(-g_m v_4 - J_2) \\ -M \dfrac{dJ_2}{dt} + L_3 \dfrac{dJ_3}{dt} = v_4 \\ \dfrac{dv_4}{dt} = -\dfrac{1}{C_4} J_3 + \dfrac{I_S}{C_4} - \dfrac{1}{R_5 \cdot C_4} v_4 \end{cases}$$

مدرس : شاكران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:

Year: Month: Day: ( )

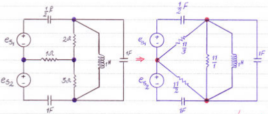
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dJ_2}{dt} = \dfrac{\begin{vmatrix} R_1(-g_m v_4 - J_2) & -M \\ v_4 & L_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_3 \end{vmatrix}} \\[2em] \dfrac{dJ_3}{dt} = \dfrac{\begin{vmatrix} L_2 & R_1(-g_m v_4 - J_2) \\ -M & v_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_3 \end{vmatrix}} \\[2em] \dfrac{dv_4}{dt} = -\dfrac{1}{C_4} J_3 + \dfrac{I_5}{C_4} - \dfrac{1}{R_5 C_4} v_4 \end{cases}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

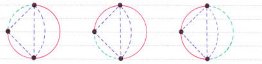
Subject:
Year : Month : Day : ( )

نکته) تعداد متغیرهای حالت در هر مدار بستگی به تعداد عناصر ذخیره کننده ی انرژی دارد. اما اگر خازن ها در مدار تشکیل حلقه دهند و یا سلف ها در مدار تشکیل کاتست دهند، هر کدام از این حالت ها، یک عدد از تعداد متغیرهای حالت کم می کند.

به عنوان مثال در مدار زیر با اینکه سه خازن و یک سلف وجود دارد، اما از آنجا که خازنها تشکیل حلقه داده اند متغیرهای حالت، ولتاژهای دو خازن و جریان سلف می باشند.



گراف ها:



مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

تکلیف) مطلوبست نوشتن معادلات حالت

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year: Month: Day: ( )

«فصل سیزدهم»

«تبدیل لاپلاس»

برای تحلیل مدار در حوزه‌ی زمان نیاز به حل معادلات انتگرال دیفرانسیل بود که محاسبات زیادی نیاز داشت. برای سادگی از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. تبدیل لاپلاس توابع را از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی لاپلاس تبدیل کرده و پس از محاسبات ساده در این حوزه، مجدداً به حوزه‌ی زمان تبدیل می‌کنیم.

در این فصل موارد زیر بیان می‌شود:

- تبدیل لاپلاس - عکس آن
- حل معادلات انتگرال دیفرانسیل
- حل معادلات حالت
- تابع تبدیل سیستم
- ارتباط آن با پاسخ ضربه
- کاربرد در یافتن پاسخ مدار در ورودی‌های مختلف
- بردن مدار به حوزه‌ی لاپلاس

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

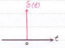
Subject:
Year: Month: Day: ( )

تعریف تبدیل لاپلاس:

$$f(t) \xrightarrow{L} F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

« حوزه‌ی زمان » « حوزه‌ی لاپلاس »

تبدیل لاپلاس $\delta(t)$:



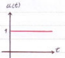
$$\delta(t) \xrightarrow{L} \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{t=0 \;\to\; e^{-s(0)} = 1}\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

حوزه‌ی زمان

$\delta(t)$ فقط در زمان $t=0$ مقدار دارد

$t=0$

تبدیل لاپلاس $u(t)$:



$$u(t) \xrightarrow{L} \int_{0^-}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس $e^{-at}u(t)$:

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \int_{0}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

تبدیل لاپلاس $\cos \omega_0 t$:

$$\cos \omega_0 t \xrightarrow{L} ?$$

اویلر $\longrightarrow$ $$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \xrightarrow{L} \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$\Rightarrow \cos \omega_0 t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

تبدیل لاپلاس $\sin \omega_0 t$:

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{\text{اویلر}} \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2j}\,\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

خواص تبدیل لاپلاس:

۱) خطی بودن: $$g(t)+f(t) \xrightarrow{L} L[g(t)] + L[f(t)]$$

۲) تبدیل لاپلاس مشتق: $$\frac{df}{dt} \xrightarrow{L} \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s e^{-st}) dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

۳) تبدیل لاپلاس انتگرال: $$\int_0^t x(\tau)d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) - \frac{x(0^-)}{s}$$

۴) انتقال فرکانس مختلط : $e^{-at}x(t) \xrightarrow{L} X(s+a)$

که در آن : $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$

۵) تغییر تأخیر : $x(t-t_0) \xrightarrow{L} e^{-t_0 s} X(s)$ که در آن $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$

مثال $e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2}$ مثال $e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{L^{-1}} u(t-2)$

۶) تبدیل لاپلاس کانولوشن :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(t) * h(t)$$

$$\int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{L} X(s)H(s)$$

که در آن : $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ و $h(t) \xrightarrow{L} H(s)$

۷) مقدار اولیه : $x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

۸) مقدار نهایی : $x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

۹) تغییر مقیاس : $x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$

یک تبدیل مهم : $\frac{t^n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{s^{n+1}}$

مثال

$$x(t) = e^{-2t}u(t-3) \xrightarrow{L} ?$$

تاخیر

تاخیر موجود در این تابع ($u(t-3)$) باید در تمامی تابع تاثیر داده شود

$$x(t) = e^{-2t}u(t-3) = e^{-2(t-3+3)}u(t-3) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

$$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$$

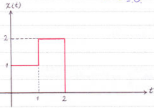
$$e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2}$$

$$e^{-2(t-3)}u(t-3) \xrightarrow{L} \frac{e^{-3s}}{s+2}$$

$$e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3) \xrightarrow{L} \frac{e^{-3s}}{s+2} \cdot e^{-6}$$

اگر تابع یک شکل موج باشد به کمک تابع $u(t)$ می‌توان تبدیل لاپلاس آن را گرفت.

بعنوان مثال تابع شکل زیر بر حسب $u(t)$ قابل بیان است:



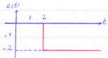
این تابع مجموع ۳ تابع زیر است:

زیرا:

در بازه‌ی $0<t<1$ داریم: $1+0+0=1$

در بازه‌ی $1<t<2$ داریم: $1+1+0=2$

در بازه‌ی $t>2$ داریم: $1+1-2=0$

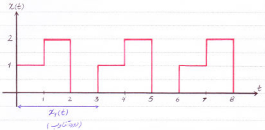


$$\Rightarrow x(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-1)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} + e^{-s}\cdot\frac{1}{s} - 2e^{-2s}\cdot\frac{1}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{1+e^{-s}-2e^{-2s}}{s}$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
Subject:
Year : Month : Day : ( )

برای توابع متناوب نیز می‌توان با استفاده از $u(t)$، لاپلاس آنرا محاسبه نمود. به اینصورت که یک دوره تناوب از آن تابع را با استفاده از $u(t)$ برحسب کل تابع نوشته و از آن تبدیل لاپلاس می‌گیریم.



$$x_1(t) = x(t)u(t) - x(t)u(t-3) \Rightarrow X_1(s) = X(s) - X(s)e^{-3s}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{X_1(s)}{1-e^{-3s}} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{1-e^{-3s}} \cdot \frac{1+e^{-s}-2e^{-2s}}{s}$$

عکوس تبدیل لاپلاس عبارت های کسری:

درصورتیکه درجه صورت کسر، برابر یا بزرگتر از درجه ی مخرج کسر باشد، صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کرده تا به عبارت کسری برسیم که در آن، درجه ی صورت کسر از درجه مخرج کسر کمتر باشد.

بعنوان مثال در کسر زیر داریم:

$$X(S)=\frac{S^3+3S^2+2S+5}{S^2+S+1}$$

$$\begin{array}{l|l} S^3+3S^2+2S+5 & S^2+S+1 \\ \hline -S^3\pm S^2\pm S & S+2 \\ \hline 2S^2+S+5 & \\ -2S^2\pm 2S\pm 2 & \\ \hline -S+3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow X(S)=\underbrace{S+2}_{\text{خارج قسمت}}+\frac{-S+3}{S^2+S+1}$$

برای محاسبه ی عکوس خارج قسمت از ضوابط زیر استفاده می کنیم:

$1 \xrightarrow{L^{-1}} \delta(t)$

$S \xrightarrow{L^{-1}} \delta'(t)$

$S^2 \xrightarrow{L^{-1}} \delta''(t)$

برای محاسبه‌ی معکوس عبارت کسری که در آن درجه‌ی صورت کمتر از درجه‌ی مخرج کسر است، ۳ حالت رخ می دهد:

حالت اول) مخرج ریشه‌های مجزا : اگر مخرج، ریشه‌های حقیقی مجزای x_i داشته باشد، عبارت کسری را بصورت زیر می نویسیم:

x_i: ریشه‌های مخرج کسر

$$X(S)=\frac{A_1}{(S-x_1)}+\frac{A_2}{(S-x_2)}+\cdots \Rightarrow A_i=(S-x_i)X(S)\Big|_{S=x_i}$$

بعنوان مثال برای کسر زیر داریم:

$$X(S)=\frac{S+8}{(S+2)(S-1)} \Rightarrow$$ ریشه‌های حقیقی مجزا : $S=-2$ ، $S=1$

$$\Rightarrow X(S)=\frac{A_1}{S+2}+\frac{A_2}{S-1}$$

$$A_1=(S+2)X(S)\Big|_{S=-2}=\frac{-2+8}{-2-1}=\frac{-6}{3}=-2$$

$$A_2=(S-1)X(S)\Big|_{S=1}=\frac{1+8}{1+2}=3$$

$$\Rightarrow X(S)=\frac{-2}{S+2}+\frac{3}{S-1} \Rightarrow x(t)=-2e^{-2t}u(t)+3e^{t}u(t)$$

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : Month : Day : ( )

حالت دوم) مخرج ریشه‌ی تکراری: در این حالت به تعداد ریشه‌ی تکراری x جملات $\frac{A_i}{(s-x)^i}$ می‌نویسیم ... که در آن:

$$A_i = \frac{1}{(n-i)!}\frac{d^{(n-i)}}{ds^{(n-i)}}(s-x)^n X(s)\Big|_{s=x}$$

مشتق $(n-i)$ ام

به عنوان مثال در کسر زیر داریم:

$$X(s) = \frac{10s}{(s+2)^3(s+8)} \Rightarrow s=-2$$ ریشه‌ی تکراری (۳ مرتبه) ، $s=-8$ ریشه مجزا

$$X(s) = \frac{A_3}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_1}{(s+2)} + \frac{B}{s+8}$$

به دست آوردن B از روش حالت اول:

$$B = (s+8)X(s)\Big|_{s=-8} = \frac{10(-8)}{(-8+2)^3} = 0.37$$

$$A_3 = (s+2)^3 X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{10s}{s+8}\Big|_{s=-2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}(s+2)^3 X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{-2(s+8)\times 80}{(s+8)^4}\Big|_{s=-2} = \frac{-2(-2+8)\times 80}{(-2+8)^4}$$

$$A_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}(s+2)^3 X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{10(s+8)-105}{(s+8)^2}\Big|_{s=-2} = \frac{80}{(-2+8)^2}$$

برای محاسبه عکس دو جمله‌ی اول از عبارت $\frac{t^n}{n!} \xrightarrow{L} \frac{1}{s^{n+1}}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{A_3}{s^3} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{A_3 t^2}{2!} \Rightarrow \frac{A_3}{(s+2)^3} \xrightarrow{L^{-1}} A_3 e^{-2t}\frac{t^2}{2!}$$

انتقال فرکانس

$$\frac{1}{s^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t}{1!} \Rightarrow \frac{A_2}{(s+2)^2} \xrightarrow{L^{-1}} A_2 e^{-2t}\frac{t}{1!}$$

$$\Rightarrow x(t) = A_3 e^{-2t}\frac{t^2}{2!}u(t) + A_2 e^{-2t} t\, u(t) + A_1 e^{-2t}u(t) + B e^{-8t}u(t)$$

ضرایب A, B, C را با مولفه‌های نظیر به نظیر خود، در صورت کسر اصلی یعنی 1 مقایسه می‌کنیم

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$1 \rightarrow$ ضریب s^2 ، ضریب s ، ثابت

حالت سوم) مخرج ریشه‌ی حقیقی ندارد.

برای این حالت ، کسری که مخرج آن ریشه‌ی حقیقی ندارد را نوشته و عبارت صورت آن را یک درجه پایین‌تر از درجه‌ی مخرج می‌نویسیم و به کمک طرفین وسطین کردن کسرها ، ضرایب مجهول را بدست می‌آوریم.

به عنوان مثال کسر زیر را در نظر بگیرید:

$$X(S)=\frac{1}{S^3+2S^2+2S+1}$$

ریشه‌ای که مخرج را صفر می‌کند $\rightarrow S=-1$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} S^3+2S^2+2S+1 & S+1 \\ \hline \underline{-S^3-S^2} & S^2+S+1 \\ S^2+2S+1 & \\ \underline{-S^2-S} & \\ S+1 & \\ \underline{-S-1} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow X(S)=\frac{A}{S+1}+\frac{BS+C}{S^2+S+1}$$

یک درجه کمتر

ریشه حقیقی ندارد

طرفین وسطین: $A(S^2+S+1)+(S+1)(BS+C)=1 \Rightarrow \underbrace{(A+B)}_{0}S^2+\underbrace{(A+B+C)}_{0}S+\underbrace{A+C}_{1}=1$

$$\Rightarrow B=-1 \,,\, C=0 \,,\, A=1 \Rightarrow X(S)=\frac{1}{S+1}-\frac{S}{S^2+S+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\frac{1}{S+1}=e^{-t}u(t)$$

و برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس $\frac{S}{S^2+S+1}$ بایستی آن را به فرم‌های مشخص درآوریم:

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:

Year: Month: Day: ( )

$$\sin bt \xrightarrow{L} \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\cos bt \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1} = \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

صورت کسر هم باید انتقال فرکانس ← انتقال فرکانس داشته باشد.

$$= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2+s+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\,u(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,u(t)$$

حل معادلات انتگرال دیفرانسیل به کمک لاپلاس: با گرفتن لاپلاس از طرفین معادله انتگرال دیفرانسیل $y(t)$ بدست می آید.

مثال)

$$y(t)+\underbrace{\int_0^{\infty} y(\lambda)(t-\lambda)\,d\lambda}_{y(t)\circledast t} = e^{-t}$$

$$\xrightarrow{L}\quad Y(S) \qquad Y(S)\frac{1}{S^2} \qquad \frac{1}{S+1}$$

$$\Rightarrow Y(S)\underbrace{\left(1+\frac{1}{S^2}\right)}_{\frac{S^2+1}{S^2}} = \frac{1}{S+1} \Rightarrow Y(S)\frac{S^2+1}{S^2} = \frac{1}{S+1}$$

$$\Rightarrow Y(S) = \frac{S^2}{(S^2+1)(S+1)} = \cdots \longrightarrow$$

با لاپلاس معکوس گرفتن، $y(t)$ بدست می آید.

حل معادلات حالت به کمک لاپلاس: پس از اینکه برای هر مدار معادلات حالت را نوشتیم (بصورت ماتریسی) با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه ماتریسی و قرار دادن شرایط اولیه می توان متغیرهای حالت را بدست آورد.

فرض کنید در مداری، معادلات حالت بصورت زیر بدست آمد:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} v_s(t)$$

که در آن : $v_s(t) = u(t)$ ، $v(0) = 1^V$ ، $i(0) = 0^A$

$$\frac{dv}{dt} \xrightarrow{L} sV(s) - v(0) \quad , \quad \frac{di}{dt} \xrightarrow{L} sI(s) - i(0) \quad , \quad x(t) \xrightarrow{L} X(s)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sV - v(0) \\ sI - i(0) \end{bmatrix}}_{\underbrace{\begin{bmatrix} sV \\ sI \end{bmatrix}}_{II} - \begin{bmatrix} v(0) \\ i(0) \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}}_{I} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

* چون در عبارت I ماتریس 2×2 در ماتریس $\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$ ضرب شده است، در

عبارت II نیز بایستی ماتریس 2×2 در ماتریس $\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$ ضرب شود، تا بتوان این دو عبارت را با یکدیگر ساده کرد.

در مدارهایی که ... داشته باشد، از روش ماتریس (ماتریس سیستم) میتوان مدار را حل کرد،
اما به کمک لاپلاس (مدل سلف و خازن) میتوان آن را حل کرد.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{S} \\ \frac{1}{S} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S+2 & -1 \\ -1 & S+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{S}+\overset{V(0)}{1} \\ \frac{1}{S}+\underset{I(0)}{0} \end{bmatrix} \Rightarrow V = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{S}+1 & -1 \\ \frac{1}{S} & S+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+2 & -1 \\ -1 & S+2 \end{vmatrix}} = \dots \quad , \quad I = \frac{\begin{vmatrix} S+2 & \frac{5}{S}+1 \\ -1 & \frac{1}{S} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+2 & -1 \\ -1 & S+2 \end{vmatrix}} = \dots$$

نهایتاً با عکس تبدیل لاپلاس عبارت فوق، $v(t)$ و $i(t)$ بدست می‌آیند.

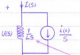
مدل سلف در حوزه‌ی لاپلاس: برای تحلیل هر مدار با جایگذاری مدل های سلف و خازن می‌توان به کمک لاپلاس خروجی مدار را به ازای هر ورودی بدست آورد.

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V(S) = L\left(S I(S) - i(0)\right)$$

$$V(S) = L S I(S) - L i(0) \quad (1)$$

$$I(S) = \frac{1}{LS} V(S) + \frac{1}{S} i(0) \quad (2)$$

LS → امپدانس



ادمیتانس

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران
ahmadrsh@yahoo.com

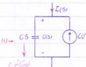
Subject:
Year : Month : Day : ( )

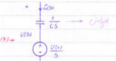
مدل خازن در حوزه‌ی لاپلاس:

$$i(t)=C\frac{dv}{dt} \Rightarrow I(s)=C\left(sV(s)-V(0)\right)$$

$$I(s)=C\,sV(s)-CV(0) \qquad (1)$$

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{V(0)}{s} \qquad (2)$$





مفهوم تابع تبدیل سیستم: در صورتیکه در یک مدار $x(t)$ ورودی باشد و $y(t)$ خروجی، $h(t)$ را خروجی گوییم

در صورتیکه ورودی تابع ضربه باشد.

$$x(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=h(t)$$

تابع تبدیل سیستم

برای هر مدار می‌توان نوشت: $y(t)=x(t)\circledast h(t)$

$$y(t)=x(t)\circledast h(t) \xrightarrow{L} Y(s)=X(s)H(s) \xrightarrow{x(t)=\delta(t)} Y(s)=1\times H(s)$$

تابع تبدیل سیستم

برای هر مدار که تابع تبدیل سیستم معلوم باشد خروجی مدار برای هر ورودی معلوم است.

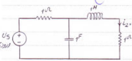
$H(s)$: معلوم

$X(s)$: معلوم $\Rightarrow Y(s)=X(s)H(s)$

$Y(s)$: ?

مثال) برای مدار زیر ابتدا تابع تبدیل سیستم را بدست آورده، سپس پاسخ مدار به ورودی $u(t)$ را محاسبه نمایید.

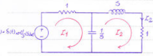
(شرایط اولیه صفر هستند)



برای بدست آوردن تابع تبدیل سیستم $U_S=\delta(t)$ قرار داده و $I_2(s)$ را بدست می‌آوریم:

خروجی به ورودی ضربه $\longrightarrow$ $H(s) \triangleq I_2(s)$

روش حل: قرار دادن معادل سلف و خازن



مش: $Z_m \cdot i = E_s$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s}+s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{s} & 1 \\ -\frac{1}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s}+s+1 \end{vmatrix}} = \frac{1/s}{(1+\frac{1}{s})(\frac{1}{s}+s+1)-\frac{1}{s^2}}$$

مدرس : شاکران

Subject:

Year : Month : Day : ( )

$L\,u(t)$

پاسخ مدار به ورودی $u(t)$: $I_2(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$

پاسخ مدار به ورودی $\sin t$: $I_2(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot H(s)$

$L \sin t$

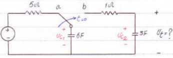
مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:
Year : 1389 Month : 9 Day : 22 ( )

بردن مدار به حوزه لاپلاس: هر مداری را با استفاده از مدل های بیان شده برای سلف و خازن می توان به حوزه ی لاپلاس برد. ابتدا شرایط اولیه ولتاژ و جریان مربوط به سلف و خازن محاسبه می گردد.

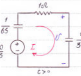
به عنوان مثال در مدار زیر داریم:



$U_{c_1}(0) = 10\,V \quad , \quad U_{c_2}(0) = 0\,V$

$$i_c = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow I(s) = C\,(sV(s) - V(0)) \Rightarrow V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{V(0)}{s}$$

$t > 0 \Rightarrow$ کلید در وضعیت b



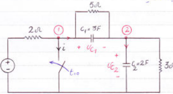
پس از جایگذاری مدل های سلف و خازن در حوزه لاپلاس، مدار را به کمک تجزیه تحلیل گره یا مش حل می کنیم، مگر موارد خاصی که بهتر است مستقیما KVL و KCL نوشته شود.

$$U = \frac{\frac{10}{s}\cdot\frac{1}{3s}}{\frac{1}{6s}+\frac{1}{3s}+1} = \frac{20}{s+2s+6s^2} = \frac{20}{6s(s+\frac{1}{2})} = \frac{20/6}{s(s+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{20}{3}}{s} + \frac{\frac{20/6}{-1/2}}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{20}{3}u(t) - \frac{20}{3}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

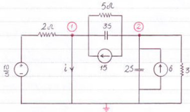
مثال: $i(t)$ برای $t>0$ را بدست آورید.



$$v_{C_1}(0)=\frac{10\times5}{2+5+3}=5v \qquad v_{C_2}(0)=\frac{10\times3}{2+5+3}=3v$$

در تحلیل $t>0$

$$i_C=C\frac{dv}{dt}\Rightarrow I_C=C(SV(S)-v(0))\Rightarrow I(S)=CSV(S)-Cv(0)$$



بخاطر اتصال کوتاه ⇐ $v_1=0$

$$KCL\ 1:\ \frac{0-\frac{10}{S}}{2}+I+(0-v_2)\left(\frac{1}{5}+3S\right)-15=0$$

(چون ظرفیت خازن برحسب ادمیتانس است، منابع جریان نیز بایستی برحسب ادمیتانس باشد.)

$$KCL\ 2:\ (v_2-0)\left(\frac{1}{5}+3S\right)+15+v_2\cdot2S-6+\frac{1}{3}v_2=0\Rightarrow v_2\checkmark \xrightarrow[KCL\ 1]{} I\checkmark$$

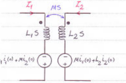
مدرس : شاکران

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

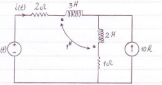
اگر سلف های تزویج در مدار باشد، می‌توان مدل زیر را بجای آن قرار داد:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = L_1 S I_1 - L_1 i_1(0) + M S I_2 - M i_2(0) \\ V_2 = M S I_1 - M i_1(0) + L_2 S I_2 - L_2 i_2(0) \end{cases}$$

منبع ولتاژ



تکلیف) $i(t) = ?$



www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

محاسبات مقادیر اولیه و نهایی: بدون محاسبه‌ی یک تابع، می‌توان مقادیر اولیه یا نهایی آنرا بدست آورد.

بعنوان مثال اگر $F(s) = \dfrac{s+a}{s^3+bs^2+cs+d}$ باشد:

الف) مقدار اولیه و نهایی $f(t)$ ب) مقدار اولیه و نهایی $f'(t)$ و $f''(t)$

مقدار اولیه $f(0) = \lim\limits_{s\to\infty} s\overset{L}{F(s)} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s^2+as}{s^3+bs^2+cs+d} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sL\left[f'(t)\right] = \lim\limits_{s\to\infty} s\left[sF(s) - \underset{0}{f(0)}\right] = \lim\limits_{s\to\infty} s^2F(s) = \dots = 1$

$f''(0) = \lim\limits_{s\to\infty} sL\left[f''(t)\right] = \lim\limits_{s\to\infty} s\left[s^2F(s) - sf(0) - \underset{1}{\cancel{f'(0)}}\right] = \lim\limits_{s\to\infty} s\left[s^2F(s) - 1\right] = a-b$

Subject:
Year : Month : Day : ( )

«فصل چهاردهم»

«فرکانس های طبیعی»

درصورتیکه مدار شامل هیچ منبعی نباشد و تنها شرایط اولیه درمدار وجود داشته باشد، یک متغیر شبکه (ولتاژ یک گره یا جریان یک شاخه) بصورت روبرو نوشته می شود: $x(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$ متغیر شبکه

به s_1 و s_2 و ... فرکانس های طبیعی متغیر شبکه گوئیم.

الف) فرکانس های طبیعی متغیر شبکه: $x(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+\dots$

ب) فرکانس های طبیعی کل شبکه: پس از اینکه مدار را به حوزه ی لاپلاس بردیم و معادلات گره یا مش برای آن نوشته شد، فرکانس های طبیعی کل شبکه بصورت زیر تعریف می شوند:

گره: $Y_n e = I_s$ مش: $Z_m i = E_s$

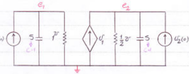
دترمینان Y_n و دترمینان Z_m به ازای s هایی برابر صفر می شوند که به آنها فرکانس های طبیعی کل شبکه گوئیم.

www.simulink.blogsky.com
مدرس : شاکران
ahmadrsh@yahoo.com

Subject:

Year : Month : Day : ( )

بعنوان مثال در مدار زیر پس از اینکه منابع را صفر کردیم (منابع مستقل) و مدل های لاپلاس خازن با شرایط اولیه را قرار دادیم، خواهیم داشت:



روش حل: تجزیه تحلیل گره (میانبر)

$Y_n e = I_s$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_1+v_2(0) \end{bmatrix}$$

و $-v_1 = e_1$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0-1 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix}$$

فرکانس های طبیعی کل شبکه: $|Y_n| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (s+1)(s+\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s=-1 \\ s=-\frac{1}{2} \end{cases}$

فرکانس طبیعی متغیر e_1:

$$e_1=\frac{\begin{vmatrix} U_1(0) & 0 \\ U_2(0) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}=\frac{U_1(0)\cancel{(S+\frac{1}{2})}}{\cancel{(S+\frac{1}{2})}\underbrace{(S+1)}_{S=-1}} \Rightarrow e_1(t)=U_1(0)e^{-t}u(t) \Rightarrow S=-1$$

فرکانس های طبیعی متغیر e_2:

$$e_2=\frac{\begin{vmatrix} S+1 & U_1(0) \\ -1 & U_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}=\frac{U_2(0)(S+1)+U_1(0)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{-2U_1(0)}{\underbrace{S+1}_{S=-1}}+\frac{2(\frac{U_2(0)}{2}+U_1(0))}{\underbrace{S+1/2}_{S=-1/2}}$$

$$\Rightarrow e_2(t)=-2U_1(0)e^{-t}+(U_2(0)+2U_1(0))e^{-\frac{1}{2}t} \Rightarrow S_1=-1 , S_2=-\frac{1}{2}$$

خنثی کردن اثر یک فرکانس طبیعی از یک متغیر: با انتخاب شرایط اولیه مناسب، می توان اثر یک فرکانس طبیعی را از یک متغیر شبکه از بین برد.

بعنوان مثال با انتخاب $U_2(0)+2U_1(0)=0$، یعنی:

مثلاً $\begin{cases} U_2(0)=-2 \\ U_1(0)=1 \end{cases}$

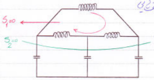
می توان اثر فرکانس طبیعی $-\frac{1}{2}$ را از متغیر $e_2(t)$ حذف کرد.

Subject:

Year :   Month :   Day :   (   )

فرکانس طبیعی $S_1=0$: این فرکانس در دو حالت بوجود می‌آید:

الف) سلف‌ها تشکیل حلقه دهند   ب) خازن‌ها تشکیل کاتست دهند.



این مدار دو فرکانس طبیعی صفر دارد. یکی بخاطر سلف‌هایی که تشکیل حلقه داده‌اند و دیگری بخاطر خازن‌هایی که تشکیل کاتست داده‌اند.

بنابراین متغیر شبکه بصورت زیر بدست می‌آید:

$x(t)=K_1+K_2e^{s_2t}+K_3e^{s_3t}$ جریان سلف یا ولتاژ خازن

$\downarrow s_1=0$

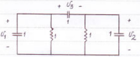
(K_1e^{0t})

* اثبات:

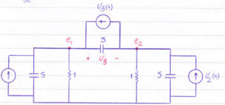
$$v_L=L\frac{di}{dt} \Rightarrow L_1\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+L_3\frac{di_3}{dt}=0 \Rightarrow L_1si_1+L_2si_2+L_3si_3=0 \Rightarrow s=0$$

$$i_C=C\frac{dv}{dt} \Rightarrow C_1\frac{dv_1}{dt}+C_2\frac{dv_2}{dt}+C_3\frac{dv_3}{dt}=0 \Rightarrow C_1sv_1+C_2sv_2+C_3sv_3=0 \Rightarrow s=0$$

معادله دیفرانسیل متغیر حالت: مدار زیر را در نظر گرفته و فرکانس های طبیعی متغیر ها را تعیین می کنیم. شرایط اولیه $v_1(0)$ و $v_2(0)$ و $v_3(0)$ است.



$$i_c = c\frac{dv}{dt} \Rightarrow I_c = C(SV(S) - V(0)) \Rightarrow I(s) = CSV(s) - CV(0)$$



روش حل: روش گره

$Y_n \cdot e = I_s$

$$\begin{bmatrix} S+1+S & -S \\ -S & S+1+S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{A}{v_1(0)+v_3(0)} \\ \underset{B}{-v_3(0)+v_2(0)} \end{bmatrix}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

$$e_1=\frac{\begin{vmatrix} A & -s \\ B & 2s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & 2s+1 \end{vmatrix}}=\frac{2As+A+Bs}{4s^2+4s+1-s^2}\ ,\ e_2=\frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & A \\ -s & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s+1 & -s \\ -s & 2s+1 \end{vmatrix}}=\frac{2Bs+B+As}{4s^2+4s+1-s^2}$$

$$U_3=e_1-e_2=\frac{As-Bs+A-B}{3s^2+4s+1}=\frac{As-Bs+A-B}{3(s^2+\frac{4}{3}s+\frac{1}{3})}=\frac{(A-B)\cancel{(s+1)}}{3\cancel{(s+1)}(s+\frac{1}{3})}\Rightarrow U_3=\frac{A-B}{3}e^{-\frac{1}{3}t}u(t)$$

در رابطه‌ی $U_3=\dfrac{\frac{A-B}{3}}{s+\frac{1}{3}}$ بجای s پارامتر D را قرار می‌دهیم، معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$(D+\frac{1}{3})U_3=\frac{A-B}{3}$$

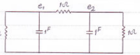
برای هر متغیر x یک معادله دیفرانسیل همگن $Q(D)X=0$ وجود دارد. معادله دیفرانسیل فوق، دارای این خاصیت است که هر پاسخ ورودی صفر x شبکه در این معادله صدق می‌کند و هر جواب این معادله، پاسخ ورودی صفر x می‌باشد. از آنجایی که هیچ معادله دیفرانسیل از مرتبه کوچکتری نمی‌تواند خاصیت فوق را داشته باشد، لذا این معادله را معادله دیفرانسیل مینیمال گوئیم.

فرکانس‌های طبیعی برای متغیر x از حل $Q(D)=0$ بدست می‌آید.

$$\underbrace{(D+\frac{1}{3})}U_3=\frac{A-B}{3}$$

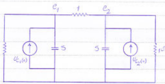
$$D+\frac{1}{3}=0\Rightarrow D=-\frac{1}{3}$$

روش حذف برای رسیدن به معادله دیفرانسیل : برای مثال در مدار زیر می‌توان معادله دیفرانسیل متغیر e_2 را به روش حذف بدست آورد:



برای اینکار مدار را در حوزه لاپلاس با شرایط اولیه $v_{c_1}(0)$ و $v_{c_2}(0)$ رسم می‌کنیم:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow I_C = C(SV_C - v_C(0)) = CSV_C - Cv_C(0)$$



تجزیه تحلیل گره:

$$Y_n e = I_S \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+S & -1 \\ -1 & 2+S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c_1}(0) \\ v_{c_2}(0) \end{bmatrix}$$

این معادلات را به نحوی بازنویسی می‌کنیم که متغیری که می‌خواهیم معادله دیفرانسیل آنرا بنویسیم، آخرین مولفه قرار گیرد.

مثلاً اگر e_1 را می‌خواستیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2+S \\ 2+S & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c_1}(0) \\ v_{c_2}(0) \end{bmatrix}$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day : ( )

در ادامه، ماتریس را بالا مثلثی می‌کنیم و بجای S پارامتر D را قرار می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2+D & -1 & U_{C_1}(0) \\ -1 & 2+D & U_{C_2}(0) \end{array}\right]$$

باید صفر شود

سطر اول + $(D+2)\times$ سطر دوم $\longrightarrow$ جایگذاری در سطر دوم

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2+D & -1 & U_{C_1}(0) \\ 0 & (2+D)^2-1 & U_{C_2}(0)(2+D)+U_{C_1}(0) \end{array}\right]$$

مطابق با e_2 $A(D)e_2 \Rightarrow A(D)e_2 = 0 \Rightarrow A(D)=0$

$\Rightarrow (2+D)^2-1=0 \Rightarrow (2+D)^2=1 \Rightarrow 2+D=\pm 1 \Rightarrow D=-1 , -3$ «فرکانس‌های طبیعی متغیر e_2»

PAYCO

Subject:
Year : Month : Day : ( )

مثال) معادله دیفرانسیل متغیر x_3 را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & D+2 & -1 \\ 0 & -1 & D+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

روش حذف:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} D+1 & -1 & 0 & a_1 \\ -1 & D+2 & -1 & a_2 \\ 0 & -1 & D+1 & a_3 \end{array}\right]$$

(۱) (۲) (۳) ترتیب صفر کردن

صفر

* در حالت کلی، برای صفر کردن یک درایه، سطر مربوط به آن درایه را در عبارت مناسبی ضرب و با یکی از سطرهای مناسب ماتریس جمع می‌کنیم و پاسخ آن را در سطر مورد نظر جایگذاری می‌کنیم.

سطر دوم $\longrightarrow$ سطر اول + $(D+1)\times$ سطر دوم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} D+1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & \overbrace{(D+2)(D+1)}^{D^2+3D+1}-(D+1) & & a_2(D+1)+a_1 \\ 0 & -1 & D+1 & a_3 \end{array}\right]$$

صفر

سطر سوم $\longrightarrow$ سطر دوم + $(D^2+3D+1)\times$ سطر سوم

PAYCO

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:

Year: Month: Day: ( )

$$\left[\begin{array}{ccc|c} D+1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & D^2+3D+1 & -(D+1) & a_2(D+1)+a_1 \\ 0 & 0 & \underbrace{(D+1)(D^2+3D+1)-(D+1)}_{A(D)\ \text{معادله مشخصه}} & a_3(D^2+3D+1)+a_2(D+1)+a_1 \end{array}\right]$$

$$A(D)=0 \Rightarrow (D+1)(D^2+3D+1)-(D+1)=0 \Rightarrow D^3+3D^2+D+D^2+3D+1-D-1=0$$

$$\Rightarrow D^3+4D^2+3D=0$$

$$\Rightarrow D(D^2+4D+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} D=0 \\ D=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(3)}}{2} \nearrow D=-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow D=-3 \end{cases}$$

فرکانس‌های طبیعی x_3 : $D=0،-1،-3$

«فصل پانزدهم»

«توابع شبکه»

تابع شبکه بنا به تعریف، نسبت لاپلاس پاسخ به لاپلاس ورودی، در حالتیکه شرایط اولیه در شبکه وجود نداشته باشند، می باشد.

$$\text{تابع شبکه} \triangleq \frac{L\left[\text{پاسخ}\right]}{L\left[\text{ورودی}\right]}$$

از آنجائیکه ورودی و پاسخ ممکن است جریان یا ولتاژ باشند، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

«ادمیتانس نقطه تحریک»

$$H = \frac{L[I]}{L[V]}$$

«نسبت انتقال ولتاژ»

$$H = \frac{L[v_o]}{L[v_i]}$$

«امپدانس انتقال»

$$H = \frac{L[v_o]}{L[I_i]}$$

«امپدانس نقطه تحریک»

$$H = \frac{L[V]}{L[I]}$$

«ادمیتانس انتقال»

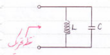
$$H = \frac{L[I_o]}{L[v_i]}$$

«نسبت انتقال جریان»

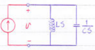
$$H = \frac{L[I_o]}{L[I_i]}$$

در حوزه‌ی توابع شبکه، منابع را ورودی در نظر می‌گیرند.

مثال) تابع شبکه (امپدانس نقطه تحریک) را برای مدار زیر محاسبه نمایید.



ابتدا بایستی مدار را در حوزه‌ی لاپلاس با شرایط اولیه صفر رسم نموده و نسبت ولتاژ نقطه تحریک به جریان منبع در نقطه تحریک را بدست آوریم.

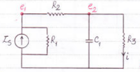


$$H = \frac{\text{ولتاژ}}{\text{جریان (منبع)}} = \frac{L[V]}{L[I]}$$

امپدانس

$$KVL: \; V = I.Z \Rightarrow \frac{V}{I} = Z = \frac{LS \times \frac{1}{CS}}{LS + \frac{1}{CS}}$$

مثال



$$H = \frac{L[i]}{L[I_S]}$$

$$i = \frac{e_2}{R_3}$$

$Y_n . e = I_S$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+CS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_S \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & I_S \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+CS \end{vmatrix}}$$

$$I = L[i] = \frac{e_2}{R_3} = \dots \checkmark \Rightarrow H \checkmark$$

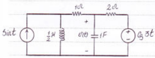
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

«فصل شانزدهم»

«قضایای شبکه»

۱) قضیه جمع آثار: اگر ولتاژ یا جریان شاخه‌ای مورد نظر باشد و شبکه دارای چند منبع ورودی باشد، برای بدست آوردن پاسخ، می‌توان اثر هر یک از منابع را با حذف منابع دیگر (منابع ولتاژ را اتصال کوتاه و منابع جریان را اتصال باز) محاسبه کرد و پاسخ نهایی را از مجموع پاسخ‌ها بدست آورد.

به عنوان مثال در مدار زیر برای محاسبه $v(t)$ خواهیم داشت:

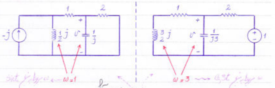


$$\sin t \xrightarrow[\cos(t-90)]{\text{فازور}} 1e^{-j90} = 1(\cos 90 - j\sin 90) = -j$$

$$\cos 3t \xrightarrow{\text{فازور}} 1e^{j0} = 1$$

اکنون هر منبع را به تنهایی در مدار تأثیر می‌دهیم و پاسخ مدار را در آن حالت بدست می‌آوریم و با کمک اصل جمع آثار پاسخ نهایی مدار را بدست می‌آوریم.

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران



$v = v + v$ جمع آثار

قضیه جمع آثار در توابع شبکه: بنابراین قضیه، تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر $X(s)$ ناشی از اعمال

همزمان تمام منابع نابسته برابر است با: $X(s) = \sum_{k=1}^{m} H_k(s) I_k(s)$

که در آن $I_k(s)$ تبدیل لاپلاس m ورودی و $H_k(s)$ توابع شبکه خروجی $X(s)$ نسبت به این m ورودی است.

$H_k(s) = \frac{X(s)}{I_k(s)} \quad , K = 1, \dots, m$

مثلاً برای مثال قبل داریم:

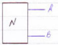
توابع شبکه را گونه‌ای تعریف می‌کنیم که حاصلضرب آنها در منابع پاسخ مورد نظر را تشکیل دهد. یعنی: $v = v + v$

$v = H_1 I_s + H_2 v_s$

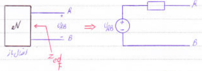
$H_1 = \frac{v}{I_s} \qquad H_2 = \frac{v}{v_s}$

PAYCO

۱۲ قضیه تونن و نورتن : برای هر شبکه بصورت شکل زیر می‌توان مدار معادل تونن یا نورتن را بدست آورد.

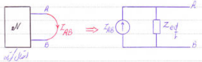


مدار معادل تونن : با اتصال باز کردن سرهای A و B مقدار v_{AB} را محاسبه می‌کنیم و با صفر کردن منابع مستقل، Z_{eq} از دو سر A و B را محاسبه می‌کنیم. مدار معادل تونن بصورت زیر تعریف می‌شود:



مدار معادل نورتن : با اتصال کوتاه کردن دو سر A و B و محاسبه جریان آن و همچنین محاسبه Z_{eq}

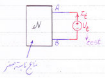
مدار معادل نورتن بصورت زیر بدست می‌آید:



مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

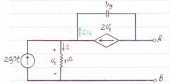
Subject:
Year : Month : Day : ( )

محاسبه Z_{eq} با وجود منابع وابسته: می‌دانیم برای محاسبه Z_{eq} بایستی کلیه منابع نابسته حذف گردند. درصورتیکه منابع وابسته در مدار باشد، بصورت زیر Z_{eq} را محاسبه می‌کنیم:



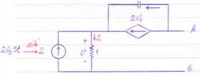
$$Z_{eq} = \frac{V_t}{I_t}$$

مثال) معادل تونن شکل زیر را بیابید:

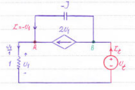


فرم فازور برای محاسبه V_{AB}:

$$\frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j\,\frac{1}{3}\times 3} = -j$$



$$V_{AB} = -j(-2V_1) + V_1 \Rightarrow V_{AB} = (2j+1)2$$



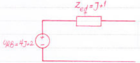
$$V_t = -j(-V_1) + V_1 = (j+1)V_1$$

$$Z_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{(j+1)V_1}{V_1} = (j+1)$$

$KCL_A)\ 2V_1 + I - V_1 = 0 \Rightarrow I = -V_1$

$KCL_B)\ I_t - 2V_1 + V_1 = 0 \Rightarrow I_t = 2V_1 - V_1 = V_1$

در نتیجه:



قضیه هم‌پاسخی: شبکه تغییرناپذیر N که تنها از مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها، سلف‌های تزویج و ترانسفورماتورها تشکیل شده است را در نظر بگیرید:

حالت اول: در شبکه N به صورت شکل زیر یک منبع ولتاژ در ورودی قرار داده و جریان خروجی آن را اندازه می‌گیریم.

طبق این قضیه، در صورتی که منبع ولتاژ را در خروجی قرار دهیم و جریان ورودی را اندازه بگیریم، خواهیم داشت:

$$J_1 = J_2$$

تابع شبکه نیز در این دو مدار، برابر است.

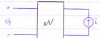
(مدار I) $H(S) = \dfrac{J_2(S)}{e(S)}$ (مدار II) $H(S) = \dfrac{J_1(S)}{e(S)}$, $J_1 = J_2$

حالت دوم: در صورتیکه یک منبع جریان در ورودی مدار قرار داده و ولتاژ خروجی را محاسبه کنیم، طبق قضیه هم پاسخی، این ولتاژ برابر است با ولتاژ ورودی، وقتیکه منبع را در خروجی قرار دهیم.

همچنین توابع شبکه در این دو مدار یکسان است.

$H = \frac{v_2}{i}$

$v_1 = v_2$



$H = \frac{v_1}{i}$

حالت سوم: در صورتیکه منبع جریان را در ورودی قرار داده و جریان خروجی را اندازه بگیریم و مدار که منبع ولتاژ را در خروجی قرار داده و ولتاژ ورودی را اندازه بگیریم، طبق قضیه هم پاسخی خواهیم داشت:

$H = \frac{J_2}{i}$

$if: i = e \Rightarrow J_2 = v_1$

تابع شبکه در این دو مدار نیز یکسان است.

$H = \frac{v_1}{e}$

$i_1 = i_1' + i_1''$
i_1' ناشی از منبع v_1

مثال) شبکه N از عناصر RLC تشکیل شده است. با فرض وجود منبع v_1 تنها در شبکه $(v_2=0)$ خواهیم داشت:

$v_2 = 0$

$v_1 = 4\cos(\omega t + 60) = 4e^{j60}$

$i_1 = \cos(\omega t + 80) = e^{j80}$

$i_2 = \cos(\omega t + 70) = e^{j70}$

مطلوبست پیدا کردن جریان i_1 اگر:

$$\begin{cases} v_1 = 2\cos(\omega t + 10) = 2e^{j10} \\ v_2 = \cos(\omega t + 20) = e^{j20} \end{cases}$$

جمع آثار در تابع شبکه:

$$i_1 = H_1 v_1 + H_2 v_2$$

$$H_1 = \frac{i_1}{v_1 \text{ منبع}}\Big|_{v_2=0} \qquad H_2 = \frac{i_1}{v_2 \text{ منبع}}\Big|_{v_1=0}$$

در اطلاعات شبکه داریم. در اطلاعات شبکه موجود نیست.

$H_2 = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0}$ را به کمک اطلاعات شبکه نمی توان محاسبه کرد. اما به کمک قضیه هم پاسخی می توان H_2 را محاسبه کرد. برای محاسبه H_2 کافیست از هم پاسخی حالت اول استفاده کنیم.

$$\Longrightarrow \frac{i_1}{v_2} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0} = \frac{e^{j70}}{4e^{j60}}$$

$$\Longrightarrow i_1 = \left(\frac{e^{j80}}{4e^{j60}}\right)2e^{j10} + \left(\frac{e^{j70}}{4e^{j60}}\right)e^{j20} = \frac{1}{2}e^{j30} + \frac{1}{4}e^{j30} = \frac{3}{4}e^{j30}$$

$$\Longrightarrow i_1(t) = \frac{3}{4}\cos(\omega t + 30)$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )

مثال) با درنظر گرفتن مدار زیر، خانه‌های خالی جدول را پر کنید.

شماره آزمایش	I_{S_1}	V_1	I_2	V_{S_2}
۱)	5	20	-1	0
۲)	0	a	2	40
۳)	-3	c	b	10
۴)	e	50	5	d

$a=?$ ⇐ در آزمایش ۲، منبع V_{S_2} در مدار و منبع I_{S_1} صفر است. طبق حالت سوم قضیه هم پاسخی داریم:

(چون جهت جریان I_2 برعکس جهت جریان هم پاسخی است)

$$H=\frac{I_2}{I_{S_1}}=\frac{V_1}{V_{S_2}} \Rightarrow \frac{1}{5}=\frac{V_1}{40} \Rightarrow V_1=8$$

$b=?$ ⇐ در آزمایش ۳، هر دو منبع V_{S_2} و I_{S_1} در مدار هستند. طبق قضیه جمع آثار در تابع شبکه داریم:

جمع آثار
$$I_2=H_1V_{S_2}+H_2I_{S_1}=\frac{I_2}{V_{S_2}}\bigg|_{I_{S_1}=0}\times V_{S_2}+\frac{I_2}{I_{S_1}}\bigg|_{V_{S_2}=0}\times I_{S_1}=\frac{-2}{40}\times 10+\frac{1}{5}(-3)=-1.1 \Rightarrow I_2=-1.1$$

طبق تعریف تابع انتقال، فقط منبع I_{S_1} در مدار است، از روی آزمایش ۱ بدست می‌آید. طبق تعریف تابع انتقال فقط V_{S_2} در مدار است، از روی آزمایش ۲.

$c = ?$ ⇐ طبق تقسیم جمع آثار در منابع مستقل داریم:

جمع آثار . $U_1 = H_1 U_{S_2} + H_2 I_{S_1} = \frac{U_1}{U_{S_2}}\Big|_{I_{S_1}=0} \times U_{S_2} + \frac{U_1}{I_{S_1}}\Big|_{U_{S_2}=0} \times I_{S_1} = \frac{8}{40} \times 10 + \frac{20}{5}(-3) = -10$

منابع

از مورد آزمایش ۲ بدست می‌آید . از مورد آزمایش ۱ بدست می‌آید

$\Rightarrow U_1 = -10$

$d = ?, e = ?$ ⇐ جمع آثار در منابع مستقل

$U_1 = H_1 U_{S_2} + H_2 I_{S_1} \Rightarrow 50 = \frac{8}{40} U_{S_2} + \frac{20}{5} I_{S_1}$

$I_2 = H_1 U_{S_2} + H_2 I_{S_1} \Rightarrow 5 = -\frac{2}{40} U_{S_2} + \frac{1}{5} I_{S_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{40} U_{S_2} + 4 I_{S_1} = 50 \\ \frac{-2}{40} U_{S_2} + \frac{1}{5} I_{S_1} = 5 \end{cases} \Rightarrow I_{S_1} = \frac{175}{12} = 14.58 \text{ , } U_{S_2} = -\frac{125}{3} = -41.66$$

U_{S_2}	I_2	U_1	I_{S_1}	شماره آزمایش
0	-1	20	5	۱
40	2	8	0	۲
10	-1.1	-10	-3	۳
$-\frac{125}{3}$	5	50	$\frac{175}{12}$	۴

«فصل هفدهم»

«دو قطبی ها»

۱) تعریف - نحوه ی محاسبه پارامترها

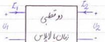
۲) استفاده از پارامترها در مدار :

الف : تحلیل مدارهای واسطه دو قطبی

ب : اتصال دو قطبی ها

یک دو قطبی شبکه ای در داخل یک جعبه سیاه است که دو جفت سر قابل دسترسی دارد ، که یک جفت آن نشان دهنده ی ورودی و جفت دیگر نشان دهنده ی خروجی است.

نکته : دو قطبی می تواند در حوزه لاپلاس یا حوزه زمان باشد.



هنگامیکه با یک دو قطبی سروکار داریم ، توجه خود را به ۴ متغیر قطب (V_1 ، I_1 ، V_2 ، I_2) محدود می سازیم و از این ۴ متغیر ، ۲ متغیر را مستقل و دو متغیر را وابسته در نظر می گیریم.

بنابراین ۴ مدل بدست می آید :

مدرس : شاکران
www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com

مدل امپدانس :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \quad ، \quad \text{پارامتر} : Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$$

مدل ادمیتانس :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases} \quad ، \quad \text{پارامتر} : Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$$

مدل انتقال :

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} V_2 - a_{12} I_2 \\ I_1 = a_{21} V_2 - a_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2 = b_{11} V_1 - b_{12} I_1 \\ I_2 = b_{21} V_1 - b_{22} I_1 \end{cases}$$

مدل هیبرید :

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

نحوه‌ی محاسبه پارامترها:

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \Longrightarrow Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} \qquad Z_{12} = \frac{U_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$

تبدیل پارامترها به یکدیگر:

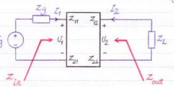
پارامترهای Y معلوم و پارامترهای Z مجهول

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \end{cases}$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} \\ I_2 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{22} I_1 - Y_{12} I_2}{\Delta Y} = \underbrace{\boxed{\frac{Y_{22}}{\Delta Y}}}_{Z_{11}} I_1 \; \underbrace{\boxed{\frac{-Y_{12}}{\Delta Y}}}_{Z_{12}} I_2$$

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{11} I_2 - Y_{21} I_1}{\Delta Y} = \underbrace{\boxed{\frac{-Y_{21}}{\Delta Y}}}_{Z_{21}} I_1 + \underbrace{\boxed{\frac{Y_{11}}{\Delta Y}}}_{Z_{22}} I_2$$

تحلیل مدارهای واسط دوقطبی :



می توانیم پارامترهای زیر را بدست آوریم:

Z_{in} ، Z_{out} ، بهره جریان $= \frac{I_2}{I_1}$ ، بهره ولتاژ $= \frac{V_2}{V_1}$

$$\begin{cases} V_1 = -Z_g I_1 + V_g & (1) \\ V_2 = -Z_L I_2 & (2) \\ V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 & (3) \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 & (4) \end{cases}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$$

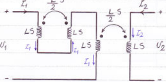
(1) , (2) $\Longrightarrow -Z_L I_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{-Z_{21} I_1}{Z_L + Z_{22}}$

در (3) قرار میدهیم $\Longrightarrow V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} \left(\frac{-Z_{21} I_1}{Z_L + Z_{22}} \right)$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

Subject:
Year : Month : Day : ( )

مثال) مطلوبست محاسبه پارامترهای Z دو قطبی زیر:

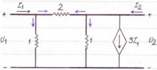


$$U_1 = LSI_1 - \frac{L}{2}SI_1 + LSI_1 - \frac{L}{2}SI_1 + LSI_1 + \overbrace{\frac{L}{2}S}^{Z_{12}} I_2$$

$$Z_{11} = LS - \frac{L}{2}S + LS - \frac{L}{2}S + LS = 2LS$$

$$U_2 = \underbrace{LS}_{Z_{22}} I_2 + \underbrace{\frac{L}{2}S}_{Z_{21}} I_1$$

مثال) مطلوبست تعیین پارامترهای Y



$$I_1 = \frac{U_1}{1} + \frac{U_1 - U_2}{2} = \overbrace{\frac{3}{2}}^{Y_{11}} U_1 - \overbrace{\frac{1}{2}}^{Y_{12}} U_2$$

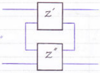
$$I_2 = 3I_1 + \frac{U_2}{1} + \frac{U_2 - U_1}{2} = 3\left(\frac{3}{2}U_1 - \frac{1}{2}U_2\right) + U_2 + \frac{U_1 - U_2}{2} = \overbrace{\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)}^{Y_{21}} U_1 + \overbrace{\left(-\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)}^{Y_{22}} U_2$$

www.simulink.blogsky.com
ahmadrsh@yahoo.com
مدرس : شاکران

اتصال دوقطبی ها :

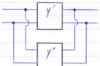
۱) اتصال متوالی

$Z = Z' + Z''$



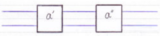
۲) اتصال موازی

$Y = Y' + Y''$



۳) اتصال زنجیره ای

$a = a'a''$



۴) اتصال متوالی - سری

$h = h' + h''$