

## تعیین مرتبه AR در مدل ARMA دوبعدی بر مبنای معیار MDL و روش متغیر کمکی

مهدیه سادات سعدآبادی، مسعود شفیعی و مهدی کراری

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی برق

[in\\_sadabadi@aut.ac.ir](mailto:in_sadabadi@aut.ac.ir) [mshafiee@aut.ac.ir](mailto:mshafiee@aut.ac.ir) [karrari@aut.ac.ir](mailto:karrari@aut.ac.ir)

چکیده - در شناسایی سیستم و تخمین طیفی با استفاده از مدل‌های AR و ARMA دوبعدی، مسئله تعیین مرتبه مدل، اغلب ضروری است. در این مقاله، راه حل جدیدی مبتنی بر معیار حداقل طول توصیف MDL و روش متغیر کمکی، برای تعیین مرتبه AR در مدل ARMA دوبعدی، مطرح شده است. در روش ارائه شده، فرض می‌شود که مدل دوبعدی، علی، پایدار، خطی و غیر متغیر با شیفت است. مثال‌های عددی، دقت بالا و عملکرد مطلوب این روش را در تعیین مرتبه AR نشان می‌دهند.

کلید واژه- تعیین مرتبه مدل، متغیر کمکی، مدل ARMA دوبعدی، معیار MDL

## ۱- مقدمه

عبارت را نتیجه دهد به عنوان بهترین تخمین از مرتبه مدل، در نظر گرفته می‌شود. یکی از معایب معیار AIC یا MDL آن است که در این معیارها بایستی پارامترهای متناظر با تمامی ساختارهای ممکنه برای مدل، تخمین زده شوند، از این رو، پیاده سازی این معیارها، زمان بر می‌باشد [10].

الگوریتم‌های مبتنی بر تعیین رتبه ماتریس‌های خاص، مثالی از روشهای مبتنی بر جبر خطی برای تعیین مرتبه مدل است [11-12].

در این مقاله، روش جدیدی برای تعیین مرتبه AR در مدل ARMA دوبعدی، مطرح شده است. این روش، مبتنی بر معیار MDL و روش متغیر کمکی می‌باشد و در آن فرض می‌شود که مدل دوبعدی، علی، پایدار، خطی و غیرمتغیر با شیفت است.

مزیت روش مطرح شده آن است که امکان تعیین مرتبه صحیح مدل را با دقت بالا و بدون نیاز به تخمین پارامترهای مدل، فراهم می‌سازد.

در این مقاله، فرمول بندی مسئله و الگوریتم اصلی به ترتیب

در سالهای اخیر، مدلسازی سیگنالهای دوبعدی با استفاده از مدل‌های AR و ARMA دوبعدی مورد توجه قرار گرفته است. این مدل‌ها در تخمین طیفی [3]-[1]، مدلسازی تصویر [4]، کدینگ تصویر [5]، فشرده سازی داده [6]، تخمین تصویر و فیلتر کالمن دوبعدی [9]-[7] مورد استفاده قرار می‌گیرند. در اکثر این کاربردها، فرض می‌شود که مرتبه مدل از قبل مشخص است ولی در عمل، مرتبه مدل نامعلوم است و بایستی تعیین گردد. تعیین مرتبه مدل، اولین مرحله اساسی در راستای هدف مدلسازی و تخمین پارامترهای مدل می‌باشد. تحقیقات اندکی در زمینه تعیین مرتبه مدل AR دوبعدی صورت گرفته است. به طور کلی، این روشها را می‌توان به دو گروه روشهای مبتنی بر شاخص اطلاعات و روشهای مبتنی بر جبر خطی تقسیم‌بندی نمود [10-12].

در زمینه روشهای مبتنی بر شاخص اطلاعات، معیار AIC و MDL را می‌توان نام برد. در این معیارها، هدف حداقل کردن عبارتی است که به واریانس خطا و تعداد پارامترهای آزاد مدل وابسته است و مرتبه‌ای که کمترین مقدار این

$$W = [w_{0,0} \ w_{0,1} \ \dots \ w_{0,N_2-1} \ w_{1,0} \ w_{1,1} \ \dots \ w_{1,N_2-1} \ \dots \ w_{N_1-1,0} \ \dots \ w_{N_1-1,N_2-1}]^T \quad (3-ج)$$

$$w_{i_1,i_2} = \sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1,j_2} e_{i_1-j_1,i_2-j_2}$$

جهت توسعه معیار MDL جدید، ماتریس متغیر کمکی به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$Z = \begin{bmatrix} z_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{0,1} & z_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{0,N_2-1} & z_{0,N_2-2} & \dots & z_{0,N_2-1-p_2} & 0 & \dots & 0 \\ z_{1,0} & 0 & \dots & 0 & z_{0,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,N_2-1} & z_{1,N_2-2} & \dots & z_{1,N_2-1-p_2} & z_{0,N_2-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N_1-1,N_2-1} & z_{N_1-1,N_2-2} & \dots & z_{N_1-1,N_2-1-p_2} & z_{N_1-2,N_2-1} & \dots & z_{N_1-1-p_1,N_2-1-p_2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن،  $z_{i_1,i_2}$  یک متغیر کمکی است. متغیر کمکی باید با عبارت نویز  $w_{i_1,i_2}$  ناهمبسته و با  $y_{i_1,i_2}$  به طور کامل همبسته باشد [13]. مثلاً در حالتی که  $k_1 = p_1$  و  $k_2 = p_2$ ، بایستی روابط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{\substack{N_1 N_2 \\ N_1 \text{ or/and } N_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{N_1 N_2} Z^T W = 0$$

$$\lim_{\substack{N_1 N_2 \\ N_1 \text{ or/and } N_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{N_1 N_2} Z^T Y = R \quad ; \quad \det(R) \neq 0 \quad (5)$$

انتخابهای متعددی برای تعیین  $z_{i_1,i_2}$  وجود دارند. در این مقاله، خروجی تأخیر یافته  $y_{i_1-i_1,i_2-i_2}$  با  $i_1 > q_1, i_2 > q_2$  به عنوان متغیر کمکی  $z_{i_1,i_2}$  در نظر گرفته شده است. با ضرب کردن عبارت  $\frac{1}{N_1 N_2} Z^T$  از سمت چپ در معادله (۲) و قرار دادن  $V = \frac{1}{N_1 N_2} Z^T W$ ، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{N_1 N_2} Z^T Y \theta = V \quad (6)$$

در [13] نشان داده شده است که  $V$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر می‌باشد. اگر ماتریس  $D$  را به صورت زیر تعریف کنید:

$$D = \frac{1}{N_1 N_2} Z^T Y \quad (7)$$

آن گاه معادله (۶) را می‌توان به صورت رابطه (۸) بیان نمود.

در بخشهای ۲ و ۳، آورده شده‌اند. مثالهای عددی در بخش ۴ ظاهر شده‌اند و نهایتاً، بخش ۵ شامل نتایج مقاله است.

## ۲- فرمول بندی مسئله

سیستم دوبعدی علی، پایدار، خطی و غیرمتغیر با شیف که به صورت زیر توصیف می‌شود، در نظر بگیرید [10].

$$\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1,i_2} y_{i_1-i_1,i_2-i_2} = \sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1,j_2} e_{i_1-j_1,i_2-j_2} \quad (1)$$

که در آن،  $(p_1^*, p_2^*)$  و  $(q_1^*, q_2^*)$  به ترتیب، مرتبه مدل MA و AR می‌باشند. فرض کنید که شرایط زیر برقرار است.

فرض ۱:  $e_{i_1,i_2}$ ، نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_e^2$  است.

فرض ۲:  $a_{0,0} = 1, a_{p_1^*,p_2^*} \neq 0, b_{q_1^*,q_2^*} \neq 0$

## ۳- الگوریتم تعیین مرتبه مدل AR

معادله (۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود (فرض کنید که تعداد داده‌های نمونه برداری شده  $N_1 N_2$  است به گونه‌ای که  $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$  و  $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$ ).

$$Y \theta = W \quad (2)$$

که در آن:

(۳- الف)

$$Y = \begin{bmatrix} y_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_{0,1} & y_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{0,N_2-1} & y_{0,N_2-2} & \dots & y_{0,N_2-1-p_2} & 0 & \dots & 0 \\ y_{1,0} & 0 & \dots & 0 & y_{0,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,N_2-1} & y_{1,N_2-2} & \dots & y_{1,N_2-1-p_2} & y_{0,N_2-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N_1-1,N_2-1} & y_{N_1-1,N_2-2} & \dots & y_{N_1-1,N_2-1-p_2} & y_{N_1-2,N_2-1} & \dots & y_{N_1-1-p_1,N_2-1-p_2} \end{bmatrix}$$

$$\theta = [a_{0,0} \ a_{0,1} \ \dots \ a_{0,p_2} \ a_{1,0} \ \dots \ a_{1,p_2} \ \dots \ a_{p_1,0} \ a_{p_1,1} \ \dots \ a_{p_1,p_2}]^T \quad (3-ب)$$

$$J_{MDL}(p_1, p_2, \theta) = \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{2} \log \sigma^2 + \frac{(k_1+1)(k_2+1)}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2\sigma^2} \theta^T R \theta + \frac{1}{2} (p_1+1)(p_2+1) \log((k_1+1)(k_2+1)) \quad (12)$$

در [10] نشان داده شده است که معیار MDL را می توان به صورت زیر، تعمیم داد.

$$J(p_1, p_2) = \lambda_{\min} K \quad (13)$$

$$K = \frac{1}{((k_1+1)(k_2+1))^{(p_1+1)(p_2+1)}}$$

که در آن،  $\lambda_{\min}$  کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $R$  است. از معادله بالا، می توان مشاهده کرد که وقتی  $k_1$  و یا  $k_2 \rightarrow \infty$ ، ترم  $K$  تقریباً یک خواهد شد و مسئله تعیین مرتبه AR با امتحان کردن کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $R$  به ازای مقادیر مختلف  $p_1, p_2$  ساده خواهد شد. توجه کنید که اگر  $p_1, p_2$  به گونه ای انتخاب شوند که  $p_1 \geq p_1^*$  و  $p_2 \geq p_2^*$ ، نسبت به حالتی که  $p_1 < p_1^*$  یا  $p_2 < p_2^*$  بسیار کوچک خواهد بود ( زیرا در حالتی که  $p_1 < p_1^*$  یا  $p_2 < p_2^*$ ، مدل دارای پارامترهای کافی جهت برازنده شدن با داده ها نمی باشد).

از این رو، مقادیر  $J(p_1, p_2)$  را می توان در جدولی قرار داد به گونه ای که در آن،  $p_1$  از بالا به پایین و  $p_2$  از چپ به راست افزایش یابد. هر سطر جدول  $J(p_1, p_2)$  به سطر قبل تقسیم نمائید ( جدول نسبت سطری ) و هر ستون این جدول را نیز به ستون قبلی تقسیم کنید ( جدول نسبت ستونی ). با توجه به جداول نسبت سطری و ستونی، تخمین  $p_1^*, p_2^*$ ، به ترتیب برابر شماره سطر و ستونی است که شامل حداقل مقدار جداول نسبت سطری و نسبت ستونی می باشد [10].

با توجه به نتایج بالا، الگوریتم تعیین مرتبه مدل ARMA دوبعدی به صورت زیر خلاصه می شود.

مرحله ۱: مجموعه  $S = [p_{1\min}, p_{1\max}] \times [p_{2\min}, p_{2\max}]$  را به عنوان مجموعه تمامی حالات ممکنه برای مرتبه AR  $(p_1, p_2)$  در نظر بگیرید و فرض کنید که  $(p_1, p_2)$  مرتبه صحیح مدل است.

$$D\theta = V \quad (8)$$

در رابطه فوق، ماتریس  $D$ ، ماتریسی با ابعاد  $((k_1+1)(k_2+1)) \times ((p_1+1)(p_2+1))$  است و بردارهای  $\theta$  و  $V$  نیز به ترتیب دارای ابعاد  $1 \times ((p_1+1)(p_2+1))$  و  $1 \times ((k_1+1)(k_2+1))$  می باشند.

اکنون، ماتریس  $((p_1+1)(p_2+1)) \times ((p_1+1)(p_2+1))$ ،  $R$  را می توان به صورت زیر تعریف نمود.

$$R = D^T D \quad (9)$$

توجه کنید که ماتریس  $R$ ، ماتریسی متقارن و مثبت نیمه معین است و حاوی اطلاعاتی راجع به مرتبه AR می باشد.

در این مقاله، روش جدیدی ارائه شده است، این روش تعیین مرتبه AR مدل ARMA دوبعدی را با دقت بالا و بدون نیاز به تخمین پارامترهای مدل فراهم می سازد. در این روش از معیار MDL و ماتریس  $R$  برای تعیین مرتبه استفاده می شود. در حالت دوبعدی، معیار MDL عبارت است از [10]:

$$J_{MDL}(p_1, p_2) = -\log(f(V)) + \frac{1}{2} (p_1+1)(p_2+1) \log((k_1+1)(k_2+1)) \quad (10)$$

که در آن،  $f(V)$  تابع چگالی احتمال  $V$  است به طوری که  $V = [v_{0,0} \dots v_{0,k_2} \dots v_{k_1,0} \dots v_{k_1,k_2}]^T$  از آنجایی که  $v_{i,j}$  نویز سفید گوسی با میانگین صفر است، رابطه زیر نتیجه می شود.

$$f(V) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} V^T V\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \theta^T R \theta\right) \quad (11)$$

که در آن،  $\sigma^2$  واریانس  $v_{i,j}$  است. با جایگذاری  $f(V)$  در رابطه (۱۰)، رابطه (۱۲) حاصل می شود.

جداول نسبت سطری و نسبت ستونی مربوط به این مثال، در جداول I و II آورده شده است.

با توجه به این جداول، تخمین  $p_1^*, p_2^*$ ، به ترتیب برابر شماره سطر و ستونی است که شامل حداقل مقدار جداول نسبت سطری و نسبت ستونی می باشد. با توجه به جداول I و II، مرتبه مدل AR در مدل ARMA دو بعدی مطرح شده در مثال ۱ برابر  $p_1^* = 1, p_2^* = 1$  است.

مثال ۲: مثال دوم، یک مدل AR دوبعدی پایدار از مرتبه (۲ و ۲) است.

$$y_{t_1, t_2} = 0.36 y_{t_1, t_2-2} + 0.49 y_{t_1-2, t_2} - 0.1764 y_{t_1-2, t_2-2} + e_{t_1, t_2}$$

نتایج حاصل شده از شبیه سازیهای مثال ۲ در جداول III و IV (جداول نسبت سطری و ستونی) آورده شده است.

با توجه به این جداول، مرتبه مدل AR دو بعدی در مثال ۲ برابر  $p_1^* = 2, p_2^* = 2$  می باشد.

سمبل \* در جداول، نشان دهنده مرتبه صحیح مدل AR دوبعدی می باشد.

#### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله تعیین مرتبه AR یک مدل ARMA دوبعدی علی، پایدار، خطی و غیر متغیر با شیفیت مورد بررسی قرار گرفته است و روشی بر مبنای ترکیب معیار MDL و روش متغیر کمکی مطرح شد. بر خلاف معیار AIC و MDL دوبعدی، این روش امکان تعیین مرتبه مدل را با دقت بالا و بدون نیاز به تخمین پارامتر فراهم می سازد.

مثالهای عددی مطرح شده، عملکرد مطلوب روش را در تعیین مرتبه آشکارتر می سازد.

مرحله ۲: ماتریس R را از رابطه (۹) به دست آورید و مقادیر ویژه آن را محاسبه کنید.

مرحله ۳: معیار مطرح شده در رابطه (۱۳) را به ازای هر  $(p_1, p_2)$  ارزیابی کنید.

مرحله ۴: جداول نسبت سطری و نسبت ستونی را تشکیل دهید.

مرحله ۵:  $p_1^*, p_2^*$  به ترتیب برابر شماره سطر و ستونی است که شامل حداقل مقدار جداول نسبت سطری و نسبت ستونی می باشد.

در اینجا به بررسی برخی از ویژگیهای روش مطرح شده می پردازیم.

۱- همانطور که مشاهده نمودید در این روش، مرتبه  $(p_1, p_2)$  بدون نیاز به هیچ تخمین پارامتر، تعیین می شود. به عبارت دیگر، مرتبه  $(p_1^*, p_2^*)$  را می توان به طور مستقل و قبل از تخمین پارامتر، تعیین نمود.

۲- روش مطرح شده، تعیین مرتبه های  $(p_1^*, p_2^*)$  و  $(q_1^*, q_2^*)$  را از یکدیگر جدا می کند. پس از آنکه، مرتبه AR تعیین شد مرتبه MA را می توان به طور مستقل و بدون نیاز به پارامترهای AR تعیین نمود. شایان ذکر است که تعیین مرتبه MA در بسیاری از کاربردها از جمله تخمین طیفی مدل ARMA، ضرورت ندارد [14].

#### ۴- مثالهای عددی

در این بخش، چندین مثال آورده شده است تا عملکرد روش مطرح شده برای تعیین مرتبه AR مشخص شود. در تمامی مثالها، ورودی  $e_{t_1, t_2}$ ، نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است.

مثال ۱: در اولین مثال، یک مدل ARMA دوبعدی به صورت زیر داده شده است.

$$y_{t_1, t_2} = 0.9 y_{t_1-1, t_2} + 0.9 y_{t_1, t_2-1} - 0.81 y_{t_1-1, t_2-1} + e_{t_1, t_2} - 0.2 e_{t_1-1, t_2}$$

مدل فوق، یک مدل دوبعدی پایدار با مرتبه AR (۱ و ۱) و مرتبه MA (۱ و ۰) است.

جدول I: جدول نسبت سطری در مثال ۱

		$P_2$								
		۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$P_1$	*۱	۰/۱۴۷	۰/۴۷۵	۰/۳۶۵	۰/۳۳۴	۰/۳۲۲	۰/۳۲۸	۰/۳۴۲	۰/۳۵۳	۰/۳۷۵
	۲	۰/۷۹	۰/۸۷۶	۰/۸۹۶	۰/۹۲۴	۰/۹۷۷	۱/۰۱۱	۱/۰۴۳	۱/۰۹۵	۱/۱۴۶
	۳	۱/۰۰۴	۰/۹۶۷	۱/۰۶۹	۱/۱۱۵	۱/۱۵۲	۱/۱۸۸	۱/۲۲	۱/۲۴۹	۱/۲۸۹
	۴	۱/۰۱۶	۱/۰۲۷	۱/۰۹	۱/۱۳۹	۱/۱۹۴	۱/۲۳۶	۱/۲۷۸	۱/۳۰۶	۱/۳۳۶
	۵	۱/۰۳۲	۱	۱/۱۰۵	۱/۱۴۹	۱/۱۹۶	۱/۲۳۴	۱/۲۷۹	۱/۲۸۵	۱/۳۴۲
	۶	۱/۰۲۸	۱/۰۸۱	۱/۱۰۴	۱/۱۴۶	۱/۱۹۴	۱/۲۴۵	۱/۲۸۱	۱/۳۲۴	۱/۳۷۷
	۷	۱/۰۳۴	۱	۱/۱۱۷	۱/۱۴۸	۱/۲۰۳	۱/۲۴۷	۱/۲۷۲	۱/۲۸۹	۱/۳۴۱
	۸	۱/۰۳۵	۱/۰۶۴	۱/۱۰۴	۱/۱۲۴	۱/۱۷	۱/۲۲۸	۱/۲۵۴	۱/۳۲۶	۱/۳۵۸

جدول II: جدول نسبت ستونی در مثال ۱

		$P_2$							
		*۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$P_1$	۰	۰/۱۰۱	۰/۸۷۵	۱/۰۳۹	۱/۰۳۹	۱/۰۲۷	۱/۰۳۳	۱/۰۲۷	۱
	۱	۰/۳۲۵	۰/۶۷۳	۰/۹۴۹	۱	۱/۰۴۶	۱/۰۷۷	۱/۰۵۹	۱/۰۶۷
	۲	۰/۳۶۱	۰/۶۸۸	۰/۹۷۹	۱/۰۶۱	۱/۰۸۲	۱/۱۱۱	۱/۱۱۱	۱/۱۱۷
	۳	۰/۳۴۸	۰/۷۶۱	۱/۰۲۱	۱/۰۹۷	۱/۱۱۵	۱/۱۴۲	۱/۱۳۷	۱/۱۵۲
	۴	۰/۳۵۱	۱/۸۰۷	۱/۰۶۷	۱/۱۴۹	۱/۱۵۵	۱/۱۸۱	۱/۱۶۱	۱/۱۸
	۵	۰/۳۴	۰/۸۹۲	۱/۱۱	۱/۱۹۶	۱/۱۹۲	۱/۲۲۴	۱/۱۶۷	۱/۲۳۲
	۶	۰/۳۵۸	۰/۹۱۱	۱/۱۵۲	۱/۲۴۶	۱/۲۴۳	۱/۲۶	۱/۳۰۶	۱/۲۸۲
	۷	۰/۳۴۹	۱/۰۱	۱/۱۸۴	۱/۳۰۶	۱/۲۸۹	۱/۲۸۵	۱/۲۲۲	۱/۳۳۴
	۸	۰/۳۵۸	۱/۰۴۸	۱/۲۰۵	۱/۳۵۹	۱/۳۵۳	۱/۳۱۲	۱/۲۹۲	۱/۳۶۶

جدول III: جدول نسبت سطری در مثال ۲

		$P_2$								
		*	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$P_1$	۱	۱/۰۴۰	۱/۰۸۲	۰/۷۰۷	۰/۹۷۵	۱/۶۱	۰/۶۱۴	۰/۲۱۸	۰/۸۰۸	۰/۵۳۸
	*۲	۱۷۷۶-۱۰	۱۲۸۶-۱۰	۱/۰۰۶	۰/۴۰۳	۰/۷۳۸	۰/۷۵۳	۱/۲۳۸	۰/۵۰۷	۰/۵۳۹
	۳	۰/۸۸۸	۱/۲۷	۰/۵۳۳	۱/۱۰۱	۱/۳۶۳	۱/۳۲۷	۰/۷۹	۱/۷۲	۰/۷۱۲
	۴	۰/۵۹۴	۰/۹۰۱	۰/۸۷۵	۰/۷۲۷	۰/۹۷۸	۰/۷۰۲	۰/۷۳	۰/۴۴۸	۰/۳۹۶
	۵	۲/۳۹۷	۰/۸۵۸	۱/۱۸۲	۱/۲۸۳	۰/۴۲۷	۱/۰۰۴	۰/۷۹۱	۱/۱۲۳	۱/۵۷۴
	۶	۰/۴۹۲	۰/۹۹۴	۰/۸۵۸	۰/۲۰۱	۰/۴۴۴	۰/۶۳۱	۰/۶۴۹	۰/۳۹۵	۰/۲۰۴
	۷	۱/۰۱۲	۰/۳۶۱	۰/۹۹۲	۲/۹۲	۱/۳۶	۰/۵۸۷	۲/۴۶۴	۰/۴۱۱	۱/۶۶۵
	۸	۰/۷۵۶	۱/۱۷۲	۰/۶۳	۰/۹۳۵	۰/۴۴۳	۰/۷۶۶	۰/۳۹۹	۱/۶۱۲	۰/۷۶۲

جدول IV: جدول نسبت ستونی در مثال ۲

		$P_2$							
		۱	*۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$P_1$	۰	۰/۹۶۹	۳۱۲۶-۱۱	۰/۹۸۲	۰/۱۳۸	۰/۹۲۸	۰/۲۶۲	۰/۴۰۹	۰/۴۶۹
	۱	۱/۰۰۸	۲۰۴۶-۱۱	۱/۳۵۵	۰/۲۲۸	۰/۳۵۴	۰/۰۹۳	۱/۵۱۶	۰/۳۲
	۲	۰/۷۲۸	۰/۱۶	۰/۵۴۲	۰/۴۱۹	۰/۳۶۱	۰/۱۵۳	۰/۶۲	۰/۳۳۲
	۳	۱/۱۲۳	۰/۰۶۲	۱/۱۲۱	۰/۵۱۸	۰/۳۵۲	۰/۰۹۱	۱/۳۵	۰/۱۳۷
	۴	۱/۷۰۴	۰/۰۶۱	۰/۹۳۲	۰/۶۹۷	۰/۲۵۲	۰/۰۹۴	۰/۸۳۳	۰/۱۲۱
	۵	۰/۶۱	۰/۰۸۳	۱/۰۱۱	۰/۲۳۲	۰/۵۹۴	۰/۰۷۴	۱/۱۸۳	۰/۱۲۱
	۶	۱/۲۳۲	۰/۰۷۲	۰/۲۳۷	۰/۵۱۲	۰/۸۴۴	۰/۰۵۸	۰/۹۴۶	۰/۰۸۸
	۷	۰/۴۴	۰/۱۹۸	۰/۶۹۸	۰/۲۳۸	۰/۳۶۴	۰/۲۴۴	۰/۱۵۸	۰/۳۵۶
	۸	۰/۶۸۱	۰/۱۰۶	۱/۰۳۵	۰/۱۱۳	۰/۶۲۹	۰/۱۲۷	۰/۶۳۷	۰/۱۶۹

## ۶- مراجع

- [1] P. Kiernan, "Two-Dimensional AR Spectral Estimation using a Two Dimensional Minimum Free Energy Method", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, pp. 3075-3081, Dec. 1995.
- [2] J. A. Cadzow and K. Ogino, "Two-Dimensional Spectral Estimation", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-29, pp. 396-401, June 1981.
- [3] X.-D. Zhang and J. Cheng, "High Resolution Two-Dimensional ARMA Spectral Estimation", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 39, pp. 765-770, Mar. 1991.
- [4] A. Rosenfeld, Image Modeling. New York: Academic, 1981.
- [5] D. Gimeno, L. Torres, and J. R. Casas, "A New Approach to Texture Coding using Stochastic Vector Quantization", in Proc. IEEE ICIP, Austin, TX, vol. 2, pp. 119-123, Nov. 1994.
- [6] E. J. Delp, R. L. Kashyap, and O. R. Michell, "Image Data Compression using Autoregressive Time Series Models", Pattern Recognit., vol. 11, pp. 313-323, 1979.
- [7] S. Ranganath and A. K. Jain, "Two-Dimensional Linear Prediction Models- Part I: Spectral Factorization and Realization", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, pp. 280-399, Feb. 1985.
- [8] H. Kaufman, J. W. Woods, S. Dravida, and A. M. Tekalp, "Estimation and Identification of Two-Dimensional Images", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-28, pp. 745-756, July 1983.
- [9] W.-R. Wu and A. Kundu, "Image Estimation using Fast Modified Reduced Update Kalman Filter", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 915-926, Apr. 1992.
- [10] B. Aksasse and L. Radouane, "Two-Dimensional Autoregressive (2-D AR) Model Order Estimation", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2072-2077, July 1999.
- [11] B. Aksasse, L. Badidi, and L. Radouane, "A Rank Test Based Approach to Order Estimation- Part I: 2-D AR Models Application", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2069-2072, July 1999.
- [12] S. Rital, A. Meziane, M. Rziza, and D. Aboutajdine, "Two-Dimensional Non-Gaussian Autoregressive Model Order Determination", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 9, no. 12, pp. 426-428, December 2002.
- [13] T. Söderström and P. Stoica, "Comparison of some instrumental variable methods- Consistency and accuracy aspects", Automatica, vol. 17, pp. 101-115, 1981.
- [14] C.-B. Xiao, X.-D. Zhang, and Y.-D. Li, "A New Method for AR Order Determination of an ARMA Process", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, no. 11, pp. 2900-2903, Nov. 1996.