كنترل سيستم هاي خطي

دكتر عليرضا ثنايي

بهمن ماه ۱۳۸۶

سیستم های درجه دوم

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

از این جهت مطالعه آنها حائز اهمیت است که سیستم های درجه بالاتر را معمولاً میتوان به سیستم درجه دوم تقریب نمود.

ζ = نسبت میرائی   بزرگتر یا مساوی صفر - کوچکتر یا مساوی یک است

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

ω_n = فرکانس طبیعی نامیرا

u = ورودی - توابع تکین

$$D^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = (D + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(D + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = 0$$

$$D_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\alpha + j\omega_d$$

$$D_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\alpha - j\omega_d$$

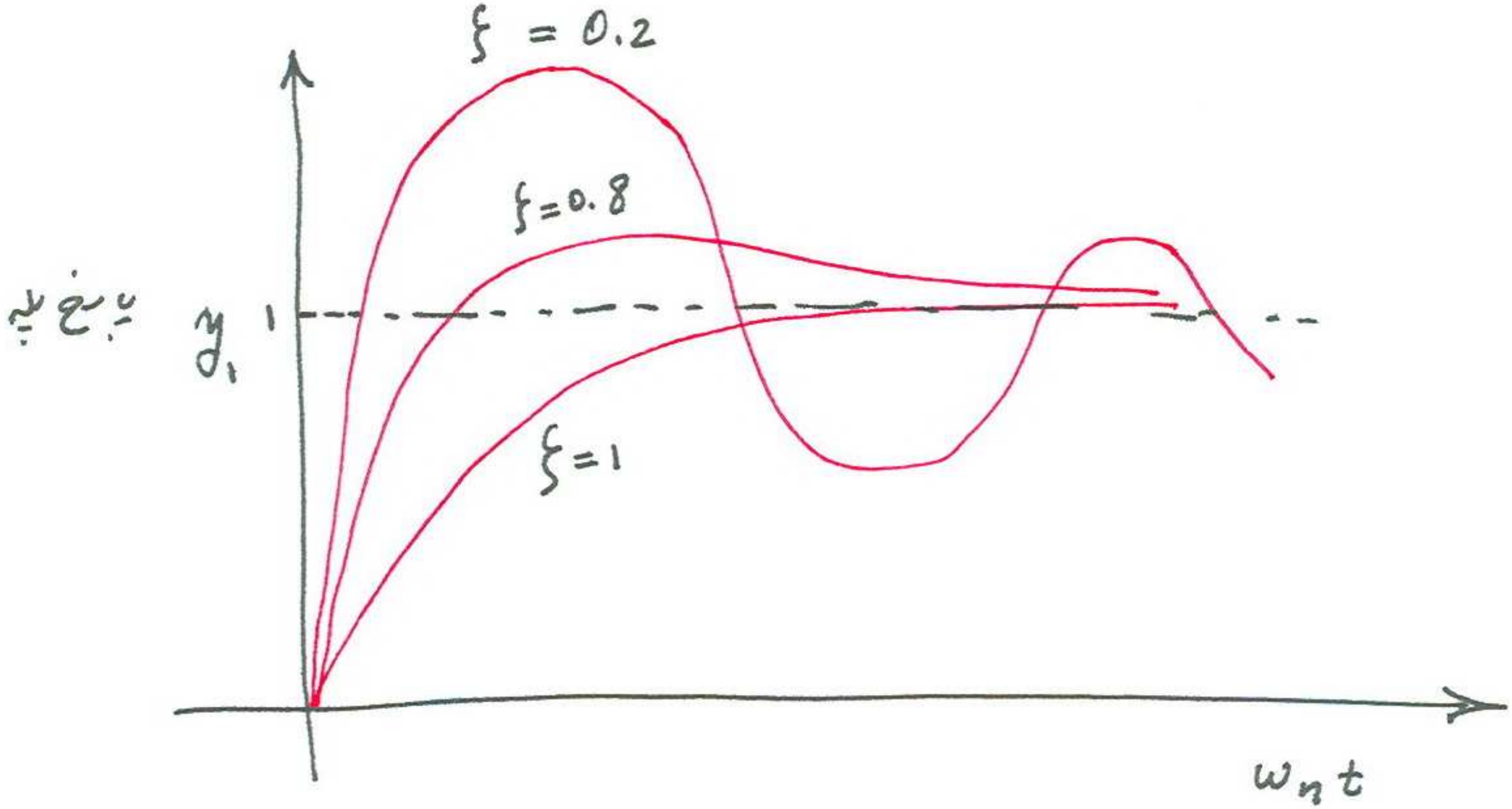
$\alpha \equiv \zeta\omega_n$ ضریب میرائی

$\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ فرکانس طبیعی میرا

$\tau = \frac{1}{\alpha}$ ثابت زمانی

$$y_1(t) = \int_0^t w(t-\tau)\, \omega_n^2 \, d\tau = 1 - \frac{\omega_n e^{-\alpha t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t + \phi)$$

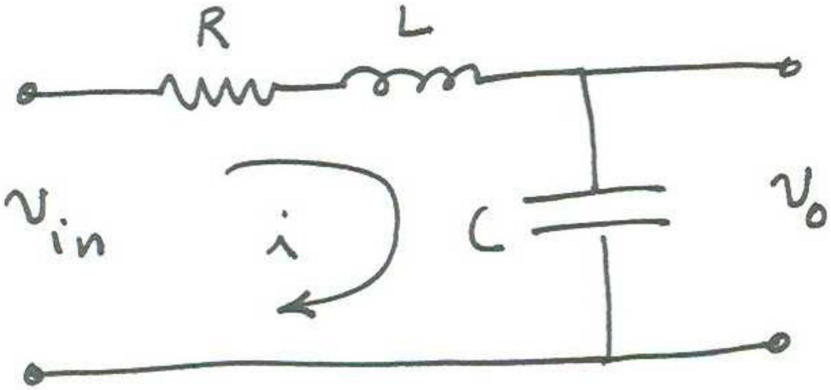
$$\phi \equiv \tan^{-1} (\omega_d / \alpha)$$



نمایش سیستم های خطی به صورت معادلات حالت

تعریف: در مهندسی کنترل معتبر است بجای نمایش رفتار دینامیک سیستم به صورت تک یا چند معادله دیفرانسیل درجه ۲، ۳، n آنرا با دسته ای از معادلات دیفرانسیل درجه اول نمایش داده و از ابزارهای قدرتمند جبر ماتریس ها در بدست آوردن جواب (پاسخ) استفاده کنیم.

مثال:



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\,dt = v_i$$

$$v_o = \frac{1}{c}\int i\,dt$$

$$i = c\,\frac{dv_o}{dt}$$

$$LC\frac{d^2 v_o}{dt^2} + RC\frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC}v_o = \frac{v_i}{Lc}$$

$$x_1 = v_o \longrightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{dv_o}{dt}$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \longrightarrow x_2 = \frac{dv_o}{dt}$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{Lc}x_1 = \frac{v_i}{Lc}$$

$U = v_i$ ورودی

$y = v_o = x_1$

خروجی

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{Lc}x_1 + \frac{U}{Lc}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{Lc} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{Lc}\end{bmatrix}u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

خروجی $= v_0 = x_1$

$$y = c^T x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را به صورت معادلات حالت بنویسید

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = u$$

$$x_1 = y \longrightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \longrightarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} \longrightarrow \frac{dx_3}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^3x_1}{dt} = \frac{d^3y}{dt^3}$$

$$\frac{dx_3}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_1}{dt} + x_1 = u$$

$$\frac{dx_3}{dt} = u - \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} - x_1$$

$$= u - x_3 - x_2 - x_1$$

$$\boxed{\frac{dx_3}{dt} = u - x_3 - x_2 - x_1}$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

شکل کلی

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = u
$$

$$
x_1 = y
$$

$$
\frac{dx_1}{dt} = x_2
$$

$$
\frac{dx_2}{dt} = x_3
$$

$$
\vdots
$$

$$
\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n
$$

$$
\frac{dx_n}{dt} = -\frac{1}{a_n} \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i \, x_{i+1} \right] + \frac{1}{a_n} u
$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \cdots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix} u$$

در مثال قبل :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{1} & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ماتریس انتقال

$$\frac{dx}{dt} = AX + BU$$

$$\frac{d\phi}{dt} = A\phi$$

ϕ : یک ماتریس $n \times n$ تابع زمان که ماتریس انتقال نامیده میشود

$\phi(0) = I$: ماتریس شرائط اولیه I یک ماتریس $n \times n$ واحد

$\phi(t) = e^{At}$: جواب معادله همگن فوق

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$x(0)$: حالت سیستم در لحظه $t=0$

اگر در فاصله $0 < t < +\infty$ مقدار $x(0)$ و $u(t)$ را داشته باشیم برای همه $t \geq 0$ میتوان مقدار $x(t)$ را بدست آورد.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط اولیه داده شده به کمک معادلات حالت حل کنید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u \qquad y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = -1$$

(پاسخ حالت گذرا و پایدار سیستم داده شده را که ورودی آن پله واحد است بدست آورید)

حل:

$$x_1 \equiv y \qquad \boxed{\frac{dx_1}{dt} = x_2} \longrightarrow \frac{dx_2}{dt} = u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u(t) = 1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{At} = I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$x(t) = e^{At}\, x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) = 1 - t + \int_0^t (t-\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = -1 + \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

پاسخ آزاد_ ورودی صفر است

$$x_{1a} = 1 - t$$

$$x_{2a} = -1$$

پاسخ اجباری

شرایط اولیه صفر است

$$x_{1b} = \int_0^t (t-\tau)\, d\tau\ \ u(\tau)$$

$$x_{2b} = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) = x_{1a} + x_{1b} = 1 - t + t^2/2$$

$$x_2(t) = x_{2a} + x_{2b} = -1 + t$$

حفظ میشود

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$y_1 = x_1(t) = 1 - t + t^2/2$$

$$y_2 = \frac{dx_1(t)}{dt} = 1 - t$$

مثال قبل را به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

مفروضات:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \longrightarrow SX(S) - x(0) = AX(S) + \frac{1}{S} b$$

$$[SI - A] X(S) = x(0) + \frac{1}{S} b$$

$$X(S) = [SI - A]^{-1} x(0) + \frac{1}{S} [SI - A]^{-1} b$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

$$[SI - A]^{-1} = \frac{1}{S^2} \begin{bmatrix} S & 0 \\ -(-1) & S \end{bmatrix}^T = \frac{1}{S^2} \begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

$$X(S) = \frac{1}{S^2} \begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{S^3} \begin{bmatrix} S & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot b$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2} \\ -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^3} \\ \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

عبارت اول تبدیل لاپلاس پاسخ گذرا و
عبارت دوم پاسخ اجباری می باشد.

$$X(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^3} \\ -\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1(t) - t + t^2/2 \\ -1(t) + t \end{bmatrix}$$

تبدیل لاپلاس

بسیاری از تکنیک های ریاضی حل مسائل مهندسی بر اساس تغییر متغیر و جایگزینی عنوان توابع دارای متغیرهای حقیقی (مثل زمان یا فاصله) با توابع دارای متغیر مختلط و یا وابسته به فرکانس صورت میگیرد.

بطور مثال:

برای حل بعضی مسائل الکتریکی و پیدا نمودن جریان در قسمتی از یک مدار الکتریکی که ولتاژ ورودی یک ولتاژ تناوبی است. تبدیل فوریه ولتاژ ورودی را بدست آورده و جریان را برای هر یک از عبارت های سری فوریه بدست آورده با هم جمع می کنیم. (چون سیستم خطی است - اصل انطباق)

مزیت تبدیل لاپلاس:

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل را به صورت جبری امکان پذیر میکند

* اعداد مختلط - عملیات برداری را به جبری تبدیل میکنند.

* اگر تمام شرایط اولیه صفر بوده و $U(s) = 1$ باشد (ورودی ضربه باشد)

مخرج کسر حاصل را چندجمله‌ای مشخصه می‌نامند. Charactristic Polynomial

* علت اینکه $n > m$

* برای بدست آوردن جواب کامل نظیر باید سایر اطلاعات لازم داده شده باشد

* موارد فوق برای سیستم‌های خطی است. سیستم‌های غیرخطی تبدیل لاپلاس ندارند

* برای بدست آوردن جواب معادله در حوزه زمان باید عکس تبدیل لاپلاس را با استفاده از بسط کسرها بدست آوریم

* بدست آوردن ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه روشهای گوناگونی دارد. از جمله روش نیوتن و روشهای هندسی

* ریشه های چند جمله ای مشخصه باید گرفتار سیستم در حالت گذرا و یا پایداری باشد.

* ریشه های معادله مشخصه بستگی به پارامترهای سیستم، شرائط اولیه و آرایش آن (معادله دیفرانسیل اصلی) دارد.

* بدست آوردن ریشه های چند جمله ای کار ساده ای نیست لذا آنرا به صورت ترسیمی معلوم نموده و رفتار سیستم را تجزیه و تحلیل می کنند.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i}$$

بعد از گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله

$$\sum_{i=0}^{n} \left[a_i \left(s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y_0^k \right) \right] =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \left[b_i \left(s^i U(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} u_0^k \right) \right]$$

$$m \leqslant n \qquad u_0^k = \left(\frac{d^k u}{dt^k} \right)\Big|_{t=0}$$

$$a_n = 1$$

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} +$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

* پاسخ اجباری u و u_0 بدون y_0
* پاسخ آزاد . بدون u و فقط y_0

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i-1} b_i s^{i-1-k} u_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] + \cdots$$

صفحه مختصات مختلط و ریشه‌های معادله مشخصه

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=0}^{m} (b_i/b_m)\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s+Z_i)}{\prod_{i=0}^{n} (s+P_i)}$$

$$F(s) = |F(s)|\, e^{j\phi} = |F(s)| \angle \phi$$

$$\phi \equiv \arg F(s) = \tan^{-1}\left[\operatorname{Im} F(s) / \operatorname{Re} F(s) \right]$$

$$F(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} |s+z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s+P_i|} \angle \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_{iz} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{ip} \right]$$

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\operatorname{Im} P}{\operatorname{Re} P} \right]$$

$$s + Z_i = |s+z_i| \angle \phi_{iz}, \quad s + P_i = |s+P_i| \angle \phi_{ip}$$

بدست آوردن مانده ریشه های غیر تکراری معادله مشخصه در صفحه مختصات مختلط

$$C_K = (S + P_K)\, F(S) \Big|_{S=-P_K} = \left. \frac{b_m (S + P_K) \prod_{i=1}^{m} (S + Z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (S + P_i)} \right|_{S=-P_K}$$

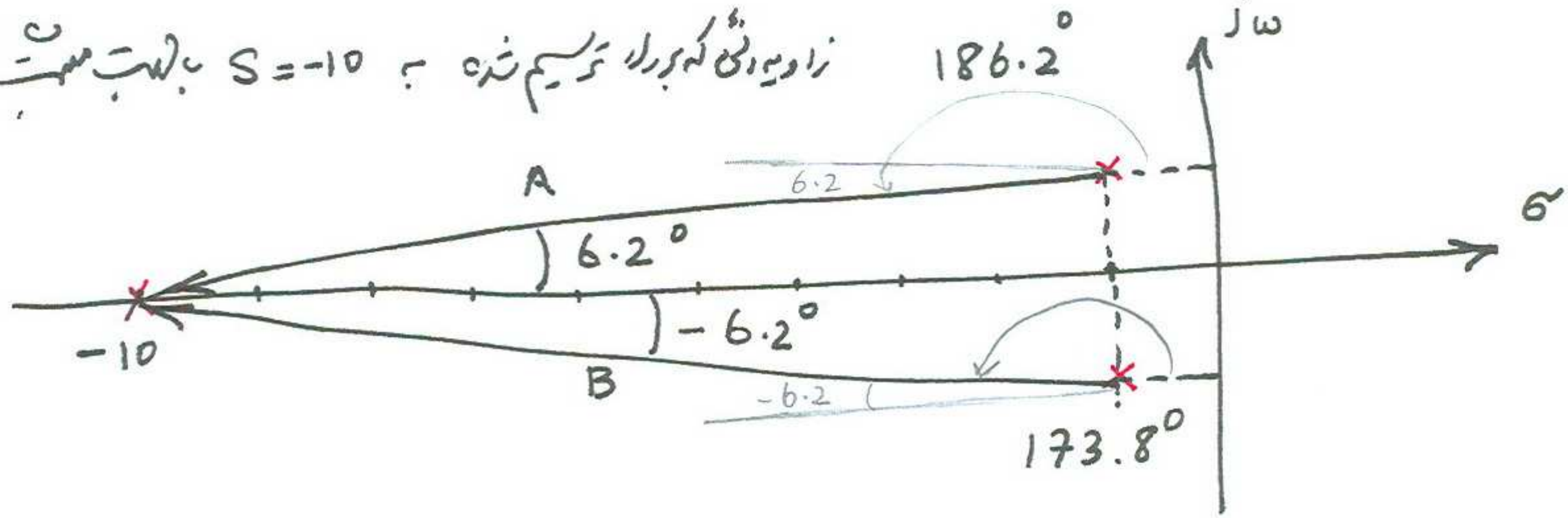
$$C_K = |C_K|\, e^{j\phi_K} = |C_K| \angle \phi_K$$

$$C_K = |C_K| \cos\phi_K + j\, |C_K| \sin\phi_K$$

مثال عددی : مانده های تابع زیر را به صورت تصویری پیدا کنید

$$F(s) = \frac{20}{(s+10)(s+1+j)(s+1-j)}$$

زاویه‌ای که بردار ترسیم شده به $S=-10$ با جهت مثبت محور حقیقی می‌زند



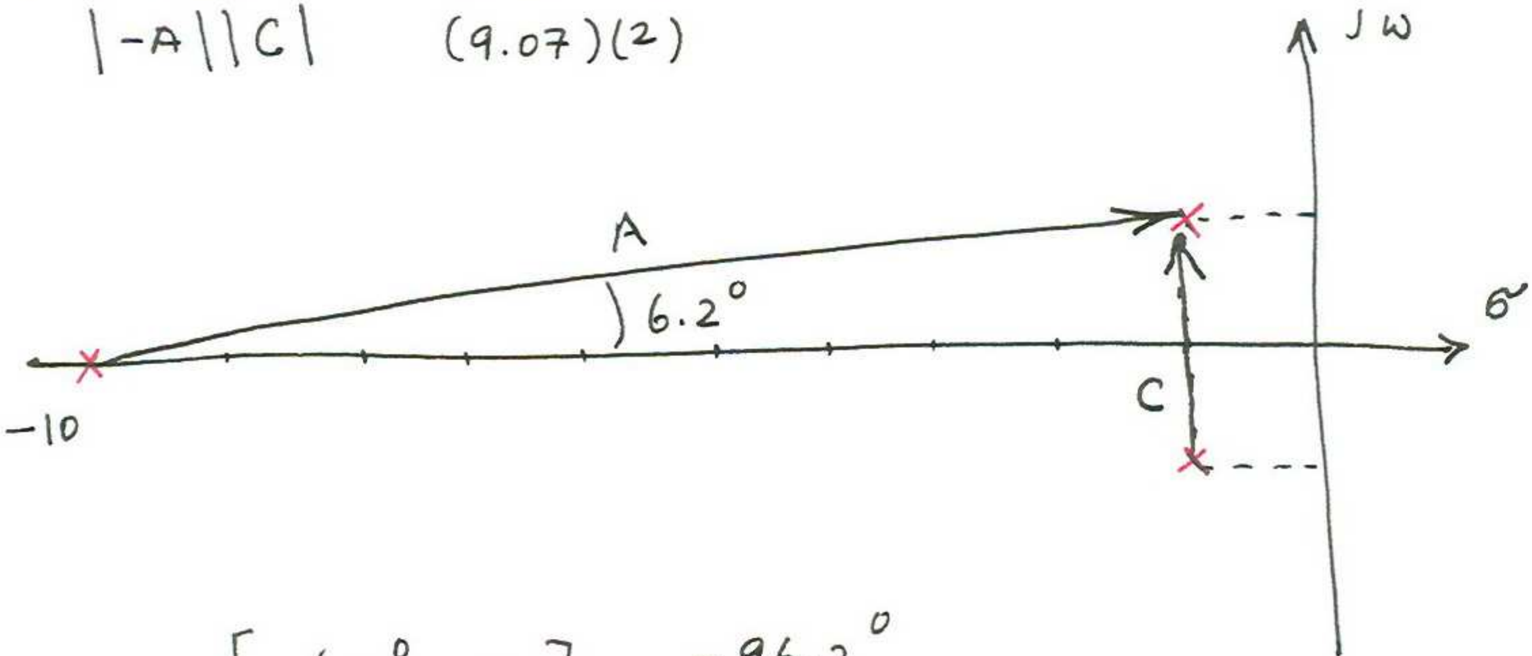
ابتدا مانده تابع را در $S=-10$ بدست می‌آوریم

$$|C_1| = \frac{20}{|A|\cdot|B|} = \frac{20}{(9.07)(9.07)} = 0.243$$

$$\varphi_1 = -\left[(186.2^\circ + 173.8^\circ)\right] = -360^\circ$$

بدست آوردن مانده تابع در $S = -1 + j$

$$C_2 = \frac{20}{|-A||C|} = \frac{20}{(9.07)(2)} = 1.102$$

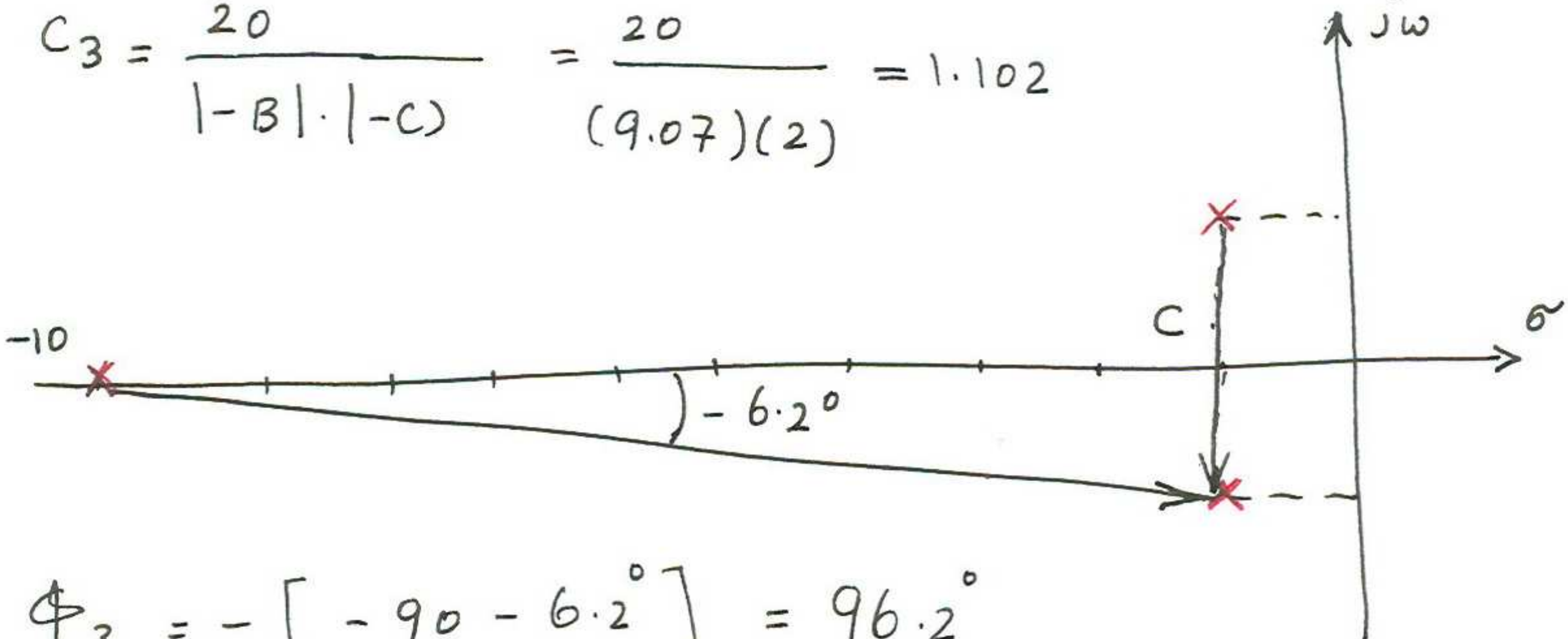


$$\phi_2 = -\left[6.2^\circ + 90\right] = -96.2^\circ$$

$$C_2 = 1.102 \angle -96.2^\circ = -0.128 - j1.095$$

بدست آوردن مانده تابع در $S = -1 - j$

$$C_3 = \frac{20}{|-B| \cdot |-C|} = \frac{20}{(9.07)(2)} = 1.102$$



$$\phi_3 = -\left[-90 - 6.2^\circ\right] = 96.2^\circ$$

$$C_3 = 1.102 \angle 96.2^\circ$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+1-j} + \frac{C_3}{s+1+j}$$

ملاحظات :

۱- روش تصویری بدست آوردن مانده‌ها برای ریشه های غیرتکراری است

۲- مقدار مانده در ریشه مختلط عدد مختلط است

۳- برای بدست آوردن مانده در هر نقطه از تمام نقاط به آن نقطه وصل می کنیم

۴- جهت بردار همیشه به سمت نقطه‌ای است که در آن مانده را حساب می کنیم

۵- زاویه بردار همیشه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و جهت مثبت محور حقیقی اندازه‌گیری می‌شود

۶- زاویه در هر نقطه برابر است با مجموع زاویه بردارهائی که از صفرها ترسیم شده است منهای زاویه بردارهائی که از قطب‌ها رسم شده است

۷- $|C_k|$ برابر است با حاصلضرب bm در حاصلضرب فاصله صفرها تا نقطه مورد نظر تقسیم بر حاصلضرب فاصله قطب‌ها تا نقطه مورد نظر

سیستم های مرتبه دوم

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

$$Y(s) = \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right] U(s)$$

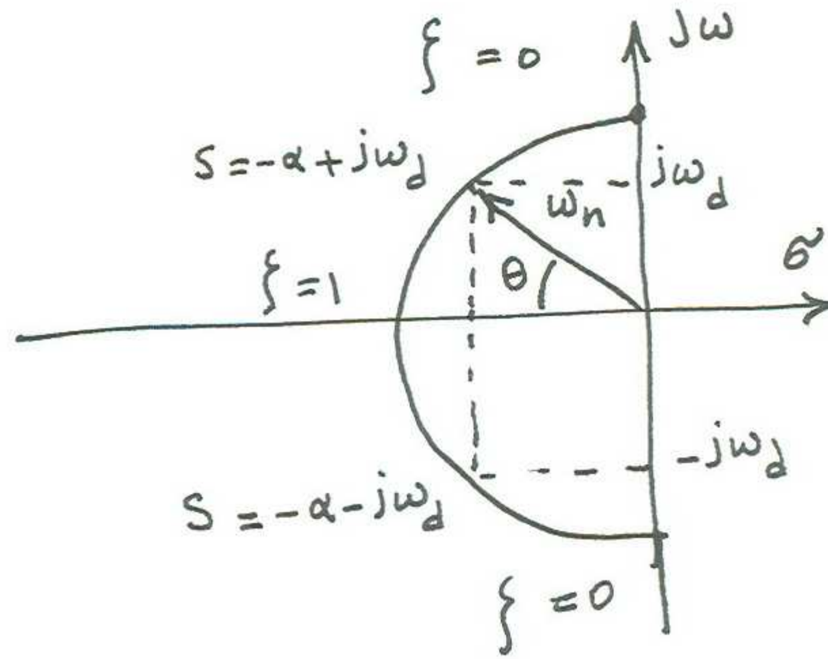
$$s = -\xi\omega_n \pm \sqrt{1-\xi^2}$$

$$s = -\alpha \pm j\omega_d$$

ثابت زمانی $\quad \frac{1}{\alpha} \equiv \frac{1}{\xi\omega_n}$

فرکانس طبیعی میرا $\quad \omega_d \equiv \sqrt{1-\xi^2}$

$$\theta = \cos^{-1}\xi$$



مثال عددی :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 9y = 9u$$

1) ξ نسبت میرائی $\qquad 2\xi\omega_n = 5 \longrightarrow \xi = \frac{5}{2\omega_n} = \frac{5}{6}$

2) ω_n فرکانس طبیعی نامیرا $\qquad \omega_n^2 = 9 \longrightarrow \omega_n = 3 \ rad/sec.$

3) τ ثابت زمانی $\qquad \tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{\frac{5}{6}\times 3} = 2/5 \ sec.$

4) ω_d فرکانس طبیعی میرا $\qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 3\sqrt{1-\frac{25}{36}} = 1.66 \ rad/sec.$

تقریب کردن سیستم های درجه بالاتر با درجه دوم

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 12\frac{d^2y}{dt^2} + 22\frac{dy}{dt} + 20y = 20u$$

با فرض اینکه در شرایط اولیه $y(t)$ و مشتقات آن صفر باشد تبدیل لاپلاس خروجی عبارت است از:

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] \equiv Y(s) = \frac{20}{s^3+12s^2+22s+20}\,U(s)$$

$$Y(s) = \frac{10}{41}\left(\frac{1}{s+10} - \frac{s}{s^2+2s+2}\right)U(s) + \frac{80}{41}\left(\frac{U(s)}{s^2+2s+2}\right)$$

$$\frac{80}{41}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+2s+2}\right]$$ پاسخ سیستم بعلت ضریب 80 تحت تأثیر این قسمت است

$$d^2y/dt^2 + 2\,dy/dt + 2y = 2u$$

پايداري

Stability پایداری

* تعریف های پایداری ← ورودی کراندار - خروجی کراندار
← پاسخ ضربه

* پایداری نسبی - میزان نزدیکی سیستم به ناپایداری
- تغییرات پارامترهای سیستم بدون ناپایدار شدن سیستم

* شرط لازم و کافی برای اینکه سیستم پایدار باشد اینستکه قسمت حقیقی ریشه معادله مشخصه منفی باشد
درنتیجه پاسخ ضربه سیستم به صورت نمایی صفر می شود

* درصورتیکه ریشه ها دارای قسمت حقیقی صفر باشد. گویند سیستم در مرز ناپایداری قرار دارد.

* ممکن است دامنه خروجی محدود باشد ولی وقتی $t \to \infty$ خروجی به سمت صفر میل نمیکند

* شرط لازم برای اینکه سیستم پایدار باشد . ضرایب معادله مشخصه همه ضرایب حقیقی و علامت یکسان دارند - هیچیک از ضرایب صفر نبا

روشهای تعیین پایداری سیستم های پیوسته

در طراحی سیستم های کنترلی عموماً پارامترهای سیستم متغیر میشوند و در پایداری سیستم به ازای تغییرات پارامترها سیستم مطالعه میشود. در اینگونه موارد ضرورتی ندارد که برای هر تغییر پارامترها ریشه های معادله مشخصه را که گاهی نیاز به محاسبات طاقت فرسا دارد بدست آورد. بلکه لازم است حدود پایداری و میزان نزدیکی سیستم به مرز ناپایداری به ازای تغییرات پارامترها را بدست آورد. اینجا را با مطالعه فاصله حقیقی ریشه های معادله مشخصه از محور موهومی در جهت منفی محورهای حقیقی مطالعه نمود. در این جهت روشهای زیر که بدون حل معادله مشخصه میتوان وضعیت پایداری یک سیستم را مطالعه نمود بررسی می کنیم:

۱- روش راث ROUTH

۲- روش هورویتز HURWITZ

۳- روش کسر های متوالی Continued Fractions

روش روث

۱- روش روث - همه ضرائب معادله حقیقی اند

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

هر سطر جدول را میتوان در عددی غیر صفر
ضرب یا بر آن تقسیم نمود.

$$b_1 \equiv \frac{a_{n-1}\, a_{n-2} - a_n\, a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 \equiv \frac{a_{n-1}\, a_{n-4} - a_n\, a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 \equiv \frac{b_1\, a_{n-3} - a_{n-1}\, b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1\, a_{n-5} - a_{n-1}\, b_3}{b_1}$$

شرط پایداری: اولین ستون جدول روث تغییر علامتی نداشته باشد

مثال عددی روش روث :

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s^1	$\frac{6\times 12-8}{6}=\frac{64}{6}$	0	
s^0	$\frac{\frac{64}{6}\times 8-6\times 0}{\frac{64}{6}}=8$	0	

* چون در ستون اول جدول روث تغییر علامتی نداریم پس ریشه های این معادله همه دارای قسمت حقیقی منفی بوده و سیستم پایدار می باشد.

* تعداد تغییر علامت ها در ستون اول جدول روث برابر است با تعداد ریشه هایی که دارای قسمت حقیقی مثبت اند (در سمت راست محور موهومی قرار دارند)

مثال عددی روش : حدود K را برای سیستمی که معادله مشخصه آن به صورت زیر داده شده است
طوری پیدا کنید که سیستم پایدار باشد

$$S^3 + 3S^2 + 3S + 1 + K = 0$$

S^3	1	3	0
S^2	3	$1+K$	0
S^1	$\frac{3\times 3-(1+K)}{3}=\frac{8-K}{3}$	0	
S^0	$\frac{\frac{8-K}{3}\times(1+K)}{\frac{8-K}{3}}=1+K$		

شرایط پایداری

$$8-K>0$$
$$K<8$$
$$K+1>0$$
$$K>-1$$

$$-1<K<8$$

مثال:

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

شرط لازم برای پایداری برقرار است

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	$\frac{1\times3-5\times2}{1}=-7$	$\frac{1\times10-2\times0}{1}=10$	0
s^1	$\frac{-7\times5-1\times10}{-7}=6.43$	0	0
s^0	10		

* چون دو تغییر علامت در ستون اول جدول روث داریم پس سیستم ناپایدار است.

* با داشتن برنامه های کامپیوتری می‌توان به سادگی ریشه‌های معادله مشخصه را بدست آورد.

مثال: با استفاده از جدول روث در پایداری سیستم زیر تحقیق کنید.

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

چون در ضرایب معادله مشخصه تغییر علامت داریم پس شرط لازم برای پایداری برقرار نیست و سیستم ناپایدار است.

برای تمرین حال روش روث را ادامه میدهیم

s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	$\frac{-4\times1-6}{-4}=2.5$	0
s^0	6	0

* همانطور که دیده میشود. در ستون اول جدول روث تغییر علامت داریم پس سیستم ناپایدار است

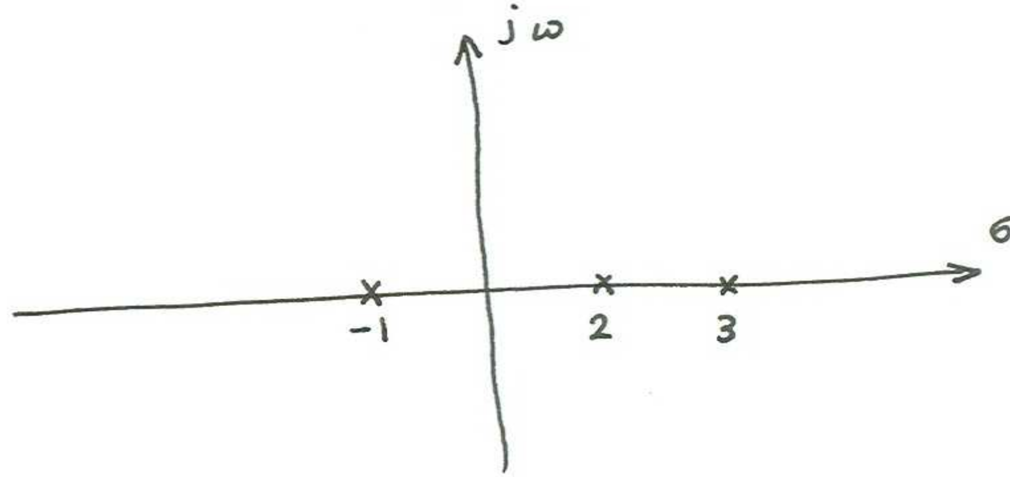
* چون دو تغییر علامت داریم دارای دو ریشه سمت راست محور موهومی هستیم.

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

$$(s-2)(s+1)(s-3) = 0$$

$s_1 = 2$ $\qquad s_3 = -1$

$s_2 = 3$



حالات خاص در جدول روث :

۱- در صورتیکه نخستین درایه سطری صفر باشد . درایه های سطر بعدی به بینهایت میل میشود. در این صورت بجای ۰ عدد کوچکی مثل ε را قرار داده جدول را ادامه میدهیم .

مثال :

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	$\frac{2-2}{1} = 0 \;\; \varepsilon$	3	0
s^1	$\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} \simeq \frac{-3}{\varepsilon}$	0	0
s^0	3		

* دو تغییر علامت داریم پس سیستم ناپایدار است

حالات خاص

روش روث

حالات خاص جدول روث :

۲ - همه درایه های یک سطر برابر صفر اند - سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد

- معادله حداقل یک جفت ریشه حقیقی مساوی و مختلف العلامه دارد.

- معادله یک یا چند جفت ریشه موهومی دارد

- معادله چند جفت ریشه مزدوج مختلط دارد که نسبت به مبدا قرینه اند.

در اینصورت گامهای زیر را برمیداریم :

۱- معادله کمکی را با استفاده از ضرایب سطر قبل تشکیل میدهیم $\quad A(S) = 0$

۲- از معادله کمکی نسبت به S مشتق میگیریم $\quad dA(S)/dS = 0$

۳- به جای سطر صفرها ضرایب $dA(S)/dS = 0$ را قرار میدهیم

۴- جدول روث را تکمیل میکنیم

۵- با توجه به ضرائب ستون اول جدول روث در پایداری سیستم قضاوت میکنیم

در مثال زیر اگر $K=8$ باشد آنگاه در جدول روث سطر s^1 برابر صفر خواهد شد در این صورت معادله کمکی را

$$s^3+3s^2+3s+\underbrace{1+K}_{9}=0$$

به صورت زیر تشکیل میدهیم:

s^3	1	3	0
s^2	3	9	0
s^1	$2A=6$ 0	0 0	0
s^0	9		

$$As^2+B=0$$

A و B عناصر اول و دوم سطر قبل می باشند. در مثال قبل

$$A=3 \quad \text{و} \quad B=9$$

$$As^2+B=0$$

ریشه هایی از معادله مشخصه

$$3s^2+9=0 \longrightarrow s=\pm j\sqrt{3}$$

* با استفاده از ریشه های معادله کمکی می توان در واقع ریشه های معادله مشخصه را بدست آورد.

* اگر بخواهیم جدول روث را در صورتیکه تمام سطر s^1 آن صفر باشد با استفاده از معادله کمکی تکمیل کنیم به صورت زیر عمل میکنیم

$$As^2+B=0$$

$$2As+0=0$$

$2A$ و 0 را در سطر s^1 قرار داده و جدول کامل میشود.

* بنابراین در مثال فوق اگر $K=8$ باشد

مثال :

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	$\frac{28-4}{6} = 6$	0
s^2	4	$\frac{6\times4-4\times0}{6} = 4$	0
s^1	8 0	0 0	تمام عناصر سطر s^1 صفر شده است
s^0	$\frac{4\times8-4\times0}{8} = 4$		

معادله کمکی را باید تشکیل دهیم :

$$As^2 + B = 0$$

$$4s^2 + 4 = 0$$

$$\underline{\underline{8}}s + \underline{\underline{0}} = 0$$

با استفاده از معادله کمکی به جای سطر s^1 مقادیر 8 و 0 را قرار میدهیم.

* چون در ستون اول جدول روث تغییر علامتی نداریم شرط لازم و کافی برای پایداری برقرار است.

اما ریشه های معادله مشخصه

$$4s^2 + 4 = 0 \longrightarrow \boxed{s = \pm j}$$

بیان میدارد که سیستم در مرز پایداری قرار دارد.

مثال :

$$s^4 + s^3 - s - 1 = 0$$

s^4	1	0	-1
s^3	1	-1	0
s^2	$\frac{1\times 0-(-1)\times 1}{1}=1$	$\frac{1\times(-1)-0}{1}=-1$	
s^1	$\frac{1(-1)-(1)(-1)}{1}=0$ 2	0 0	
s^0	-1		

تمام عناصر سطر s^1 برابر صفر شده است

معادله کمکی

$$As^2+B=0$$

$$s^2-1=0$$

$$\underline{\underline{2}}s-0=0$$

* چون در ستون اول تغییر علامت داریم سیستم ناپایدار است

* ضمن اینکه ریشه معادله مشخصه $s^2-1=0 \Longleftarrow s=\pm 1$

یک ریشه مثبت در سمت مثبت محور موهومی داریم و سیستم ناپایدار است.

مثال: معادله مشخصه یک سیستم کنترل حلقه بسته به صورت زیر داده شده است. حدود K را طوری پیدا کنید که سیستم پایدار باشد.

حل:

$$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0$$

s^3	1	$K+2$
s^2	$3K$	4
s^1	$\dfrac{3K(K+2)-4}{3K}$	0
s^0	4	

* برای اینکه سیستم پایدار باشد از سطر s^2 می‌فهمیم که باید $K>0$ باشد.

* در سطر سوم s^1 نیز صورت کسر باید بزرگتر از صفر باشد

$$3K(K+2)-4>0$$

$$3K^2+6K-4>0$$

$$K<-2.528$$

$$\boxed{K>0.528}$$

بنابراین شرط پایداری اینکه $K>0.528$.

روش هورویتز

معیار پایداری هورویتز (HURWITZ)

* در این روش دترمینان زیر را از ضرایب معادله مشخصه تشکیل میدهیم

* فرض بر این است که $a_n > 0$

* شرط پایداری هورویتز این است که تمام دترمینان های کهادی تشکیل شده از دترمینان اصلی فوق باید مثبت باشند. در غیر اینصورت ریشه های معادله مشخصه مقدار حقیقی مثبت خواهند داشت.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{matrix} a_0 & n\ \text{فرد} \\ a_1 & n\ \text{زوج} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{matrix} a_1 & n\ \text{فرد} \\ a_0 & n\ \text{زوج} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & & & 0 \\ \cdots & & & & & & \cdot \\ 0 & \cdots & & & & & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

مثال: مطلوبست تعیین وضعیت پایداری سیستم زیر به روش هورویتز

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112$$

چون همه دترمینانها مثبت اند پس سیستم پایدار است

$$\Delta_1 = 8 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88$$

مثال: با استفاده از روش هورویتز حدود K را طوری بدست آورید که سیستم زیر پایدار باشد

$$s^2 + Ks + 2K - 1 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K-1 \end{vmatrix} = 2K^2 - K = K(2K-1) \qquad \Delta_1 = K$$

شرط پایداری این است که $K > 0$ و $K > 1/2$ باشد

مثال: با استفاده از روش هورویتز حدود K را طوری بدست آورید که سیستم پایدار باشد. از مقادیر منفی K صرفنظر کنید. $K>0$

$$s^3+(4+K)s^2+6s+16+8K=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} \overset{a_{n-1}}{4+K} & \overset{a_{n-3}}{16+8K} & 0 \\ \overset{a_n}{1} & \overset{a_{n-2}}{6} & 0 \\ 0 & \overset{a_{n-1}}{4+K} & \overset{a_{n-3}}{16+8K} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1=|4+K| \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4+K & 16+8K \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=(4+K)\left[6(16+8K)-(4+K)\times 0\right]-1\left[(16+8K)^2-0\right]+0$$

$$=6(4+K)(16+8K)-(16+8K)^2$$

شرط پایداری:

$$K>-4 \longleftarrow K+4>0$$

$$\Delta_2>0 \longrightarrow 6(4+K)-16+8K>0 \qquad 8-2K>0 \longrightarrow \boxed{K\leqslant 4}$$

$$\Delta_3>0 \longrightarrow (16+8K)(24+6K-16-8K)>0 \Longrightarrow$$

$$(16+8K)(8-2K)>0 \Longrightarrow \boxed{K\leqslant 4}$$

مثال: آیا سیستم زیر پایدار است. با استفاده از روش هورویتز

$$s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 9s + 12 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = 18 - 9 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 3(54-36) - 1(81-0) + 0$$

$$=$$

روش کسر های متوالی

روش کسرهای متوالی

$$Q(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$Q_1(s) \equiv a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots$$

$$Q_2(s) \equiv a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} s + \frac{\left(a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}\right) s^{n-2} + \left(a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}\right) s^{n-4}}{Q_2(s)}$$

$$= h_1 s + \cfrac{1}{h_2 s + \cfrac{1}{h_3 s + \cfrac{1}{h_4(s) + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{h_n s}}}}}$$

اگر تمام h های محاسبه شده به روش فوق مثبت باشند سیستم پایدار است.

مثال عددی:

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \end{array}$$

$$Q(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

$$Q_1(s) = s^3 + 12s$$

$$Q_2(s) = 6s^2 + 8$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a_n s}{a_{n-1}} + \frac{\left(a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}\right) s^{n-2}}{Q_2}$$

$n = 3$

$a_0 = 8$

$a_1 = 12$

$a_2 = 6$

$a_3 = 1$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 12s}{6s^2 + 8} = \frac{1}{6}s + \frac{\left(12 - \frac{1 \times 8}{6}\right) s}{6s^2 + 8}$$

$$= \frac{1}{6}s + \frac{\frac{32}{3}s}{6s^2 + 8}$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{6}s + \frac{1}{\frac{(6s^2 + 8)}{\frac{32}{3}s}} =$$

$$= \frac{1}{6}s + \frac{1}{\frac{9}{16}s + \frac{8}{\frac{32}{3}s}} =$$

$$= \frac{1}{6}s + \frac{1}{\frac{9}{16}s + \frac{1}{\frac{4}{3}s}}$$

چون تمام h ها مثبت هستند پس
معادله مشخصه ریشه با مقدار حقیقی
مثبت ندارد. و پایدار است

مثال عددی: با استفاده از روش کسرهای متوالی معلوم کنید که معادله مشخصه زیر بیان کننده یک سیستم پایدار است یا ناپایدار

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + 12$$

حل:

$$Q_1(s) = s^3 + 8s$$

$$Q_2(s) = 4s^2 + 12$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 8s}{4s^2+12} = \frac{1}{4}s + \frac{\left(8 - \frac{1\times 12}{4}\right)}{4s^2+12} = \frac{1}{4}s + \frac{5s}{4s^2+12}$$

$$= \frac{1}{4}s + \frac{1}{\frac{4s^2+12}{5s}} = \frac{1}{4}s + \frac{1}{\frac{4}{5}s + \frac{12}{5s}}$$

$$= \frac{1}{4}s + \frac{1}{\frac{4}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{12}s}}$$

چون تمام h ها مثبت هستند این معادله مشخصه بیانگر یک سیستم پایدار می باشد.

مثال عددی: با استفاده از روش کسرهای متوالی حدود K را طوری پیدا کنید که سیستم پایدار باشد

$$Q(s) = s^3 + 14s^2 + 56s + K = 0$$

$$Q_1(s) = s^3 + 56s$$

$$Q_2(s) = 14s^2 + K$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 56s}{14s^2 + K} = \frac{1}{14}s + \frac{\left(56 - \frac{K}{14}\right)s}{14s^2 + K}$$

$$= \frac{1}{14}s + \frac{1}{\frac{14s^2 + K}{(56 - K/14)s}} = \frac{1}{14}s + \frac{1}{\frac{14s}{56 - \frac{K}{14}} + \frac{K}{(56 - K/14)}}$$

$$= \frac{1}{14}s + \frac{1}{\left[\frac{14}{56 - K/14}\right]s + \frac{1}{\left[\frac{56 - K/14}{K}\right]s}}$$

شرط پایداری

$$56 - K/14 > 0$$

$$\boxed{0 < K < 784}$$

تابع تبدیل

transfer function تابع تبدیل

۱- تابع تبدیل عبارتست از تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه سیستم . وقتی که همه شرائط اولیه صفر است

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

۲- " " با استفاده از معادله دیفرانسیل سیستم بدست می آید

۳- با استفاده از تابع تبدیل درباره پایداری سیستم میتوان قضاوت نمود (مخرج تابع تبدیل ....)

۴- " " میتوان در صفحه مختصات s صفرها و قطب ها را ترسیم نمود (ریشه های صورت و مخرج)

۵- برای بدست آوردن پاسخ زمانی این سیستم با داشتن تابع تبدیل آن :

$$Y(s) = P(s) \cdot X(s)$$

سپس معکوس تبدیل لاپلاس $Y(s)$ را بدست می آوریم .

۶- برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی سیستم

$$|P(j\omega)| \quad , \quad \arg P(j\omega)$$

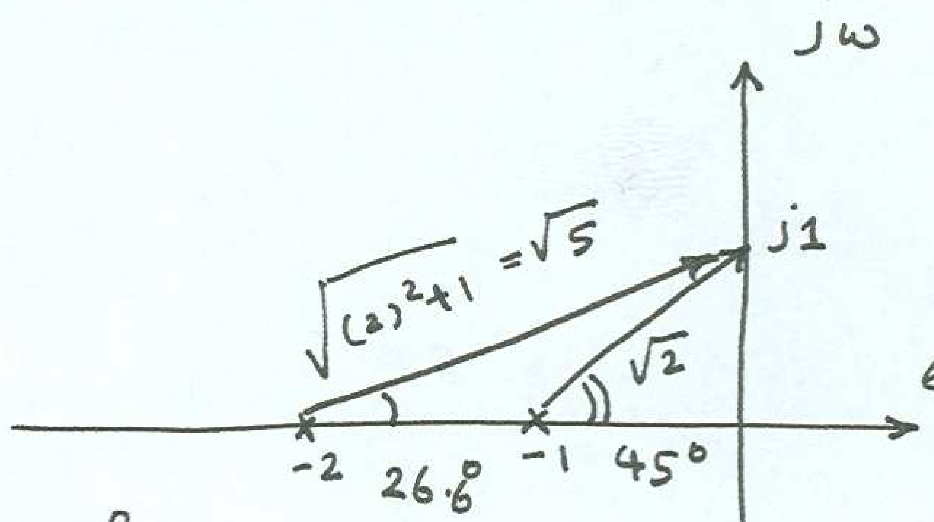
به ازای مقادیر مختلف ω قدر مطلق و زاویه تابع تبدیل محاسبه شده ترسیم میگردد .

در حالت خاص - ورودی پله - $\omega = 0$ است - ورودی dc نیز نامیده میشود .

$P(0)$ را بهره dc نیز می گویند

مثال: پاسخ فرکانسی سیستم زیر را بدست آورید

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

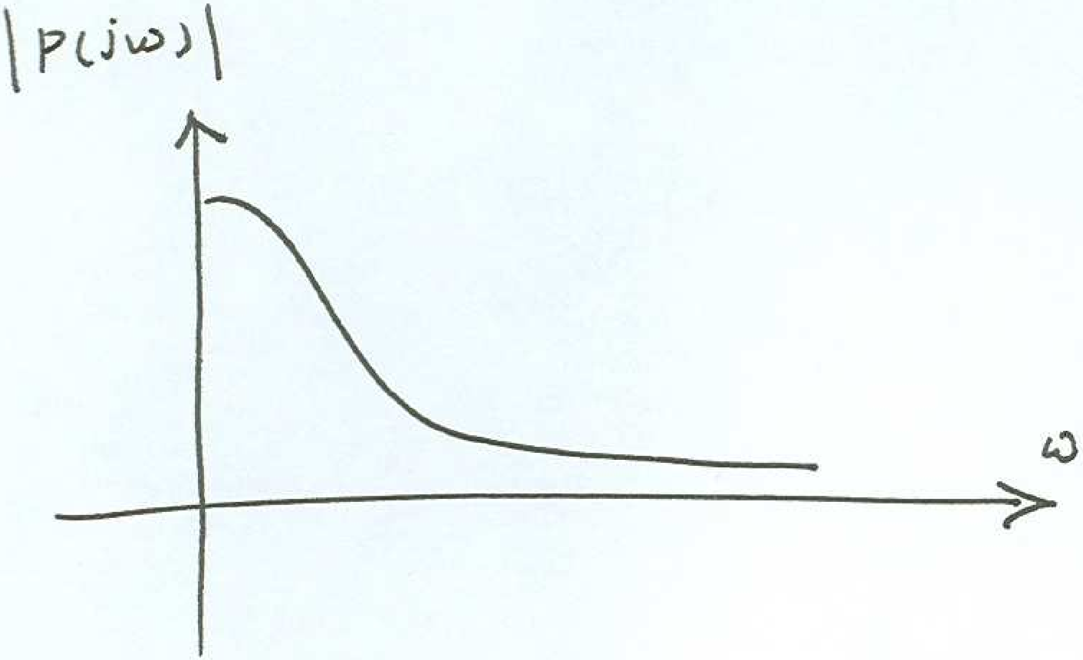


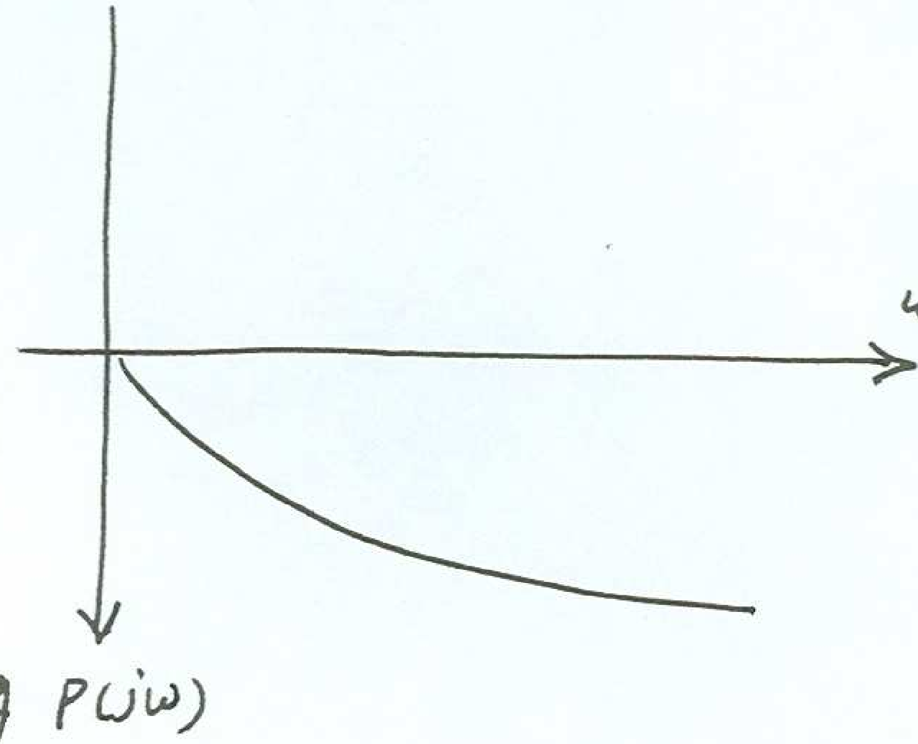
$$|P(j1)| = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = 0.316$$

$$\arg P(j1) = -26.6^\circ - 45^\circ = -71.6^\circ$$

ω	0	0.5	1	2	4	8
$\lvert P(j\omega)\rvert$	0.5	0.433	0.316	0.158	0.054	0.015
$\arg P(j\omega)$	0	-40.6	-71.6	-108.5	-139.4	-158.9

پاسخ فرکانسی

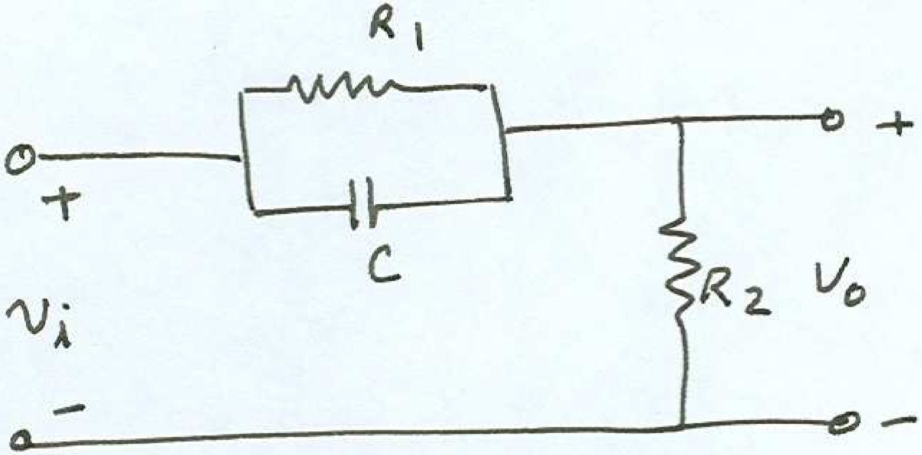




* زاویه همیشه منفی است. (ورودی خروجی را اشباع نکند) . درجه مخرج بیشتر است . تعداد قطب‌ها از صفرها بیشتر است

جبران سازی

مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید



جبران ساز پیش فاز

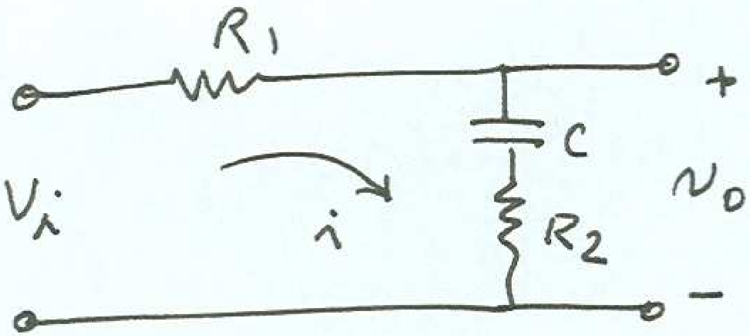
$$c\frac{d}{dt}(v_i - v_o) + \frac{1}{R_1}(v_i - v_o) = \frac{1}{R_2}v_o$$

$$Cs\left[V_i - V_o\right] + \frac{1}{R}\left[V_i - V_o\right] = \frac{1}{R_2}V_o$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل شرائط اولیه را صفر می‌گیریم

$$P(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Cs + 1/R_1}{Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

مثال:



جبران‌ساز پس‌فاز

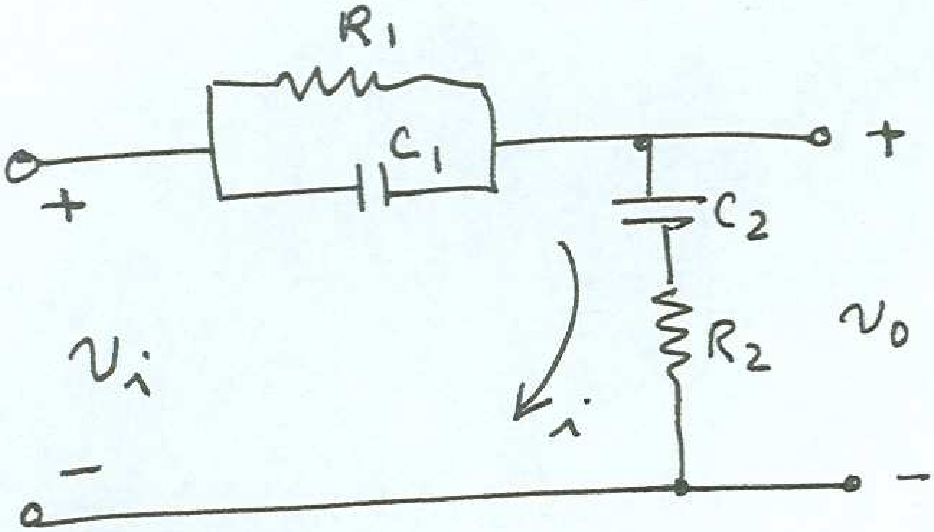
$$iR_1 + \frac{1}{c}\int_0^t i\,dt + iR_2 = v_i$$

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{cs}\right) I(s) = V_i(s)$$

$$V_o(s) = \left(R_2 + \frac{1}{cs}\right) I(s)$$

$$P = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 + \frac{1}{c}s}{R_1 + R_2 + \frac{1}{c}s}$$

مثال:



جبران ساز پیش فاز پس فاز

$$\frac{1}{R_1}(v_i - v_o) + C_1 \frac{d}{dt}(v_i - v_o) = i$$

$$\frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt + iR_2 = v_o$$

از این دو معادله تبدیل لاپلاس گرفته شرائط اولیه را صفر قرار داده سپس آنگاه $I(s)$ را حذف می‌کنیم

$$P = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_1C_1}\right)s + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$$

مثال: پاسخ پله سیستم زیر را بدست آورید

$$P(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = P(s) \cdot X(s)$$

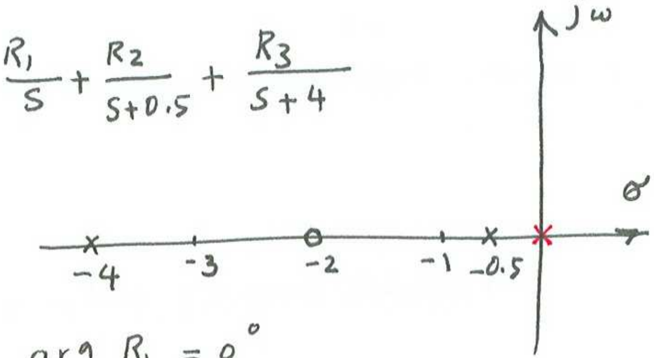
$$= \frac{2(s+1)}{s+2} \times \frac{1}{s} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = 1 + e^{-2t}}$$

مثال: پاسخ پله سیستم زیر را بصورت تصویری به دست آورید

$$P(s) = \frac{s+2}{(s+0.5)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+0.5} + \frac{R_3}{s+4}$$



$$Y(s) = P(s) \cdot X(s)$$

① ماندهٔ در مبدأ

$$|R_1| = \frac{2}{0.5 \times 4} = 1 \qquad \arg R_1 = 0^\circ$$

② مانده در قطب -0.5

$$|R_2| = \frac{1.5}{0.5 \times 3.5} = 0.857 \qquad \arg R_2 = -180^\circ$$

③ مانده در قطب -4

$$|R_3| = \frac{2}{4 \times 3.5} = 0.143 \qquad \arg R_3 = -180^\circ$$

$$y(t) = R_1 + R_2 e^{-0.5t} + R_3 e^{-4t} = \boxed{1 - 0.857 e^{-0.5t} - 0.143 e^{-4t}}$$

مثال : پاسخ پله سیستم زیر را بدست آورید

$$P(s) = \frac{3(s+2+j)(s+2-j)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$Y(s) = \frac{3(s+2+j)(s+2-j)}{s\,(s+3)(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+3} + \frac{R_3}{s+1+j} + \frac{R_4}{s+1-j}$$

$$R_1 = s \cdot Y(s)\Big|_{s=0} = \frac{3(2+j)(2-j)}{3(1+j)(+1-j)} = 5/2$$

$$R_2 = (s+3)\cdot Y(s)\Big|_{s=-3} = \;----\; = -2/5$$

$$R_3 = (s+1+j)\cdot Y(s)\Big|_{s=-1-j} = \frac{-3}{20}(7+j)$$

$$R_4 = (s+1-j)\cdot Y(s)\Big|_{s=-1+j} = -3/20\,(7-j)$$

$$y(t) = 5/2 - 2/5\, e^{-3t} - \frac{3\sqrt{2}}{4} e^{-t}\left[e^{-j(t+\theta)} + e^{j(t+\theta)}\right]$$

$$= \frac{5}{2} - 2/5\, e^{-3t} - \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-t} \cos(t+\theta)$$

$$\theta = -\tan^{-1}[1/7] = -8.13^\circ$$

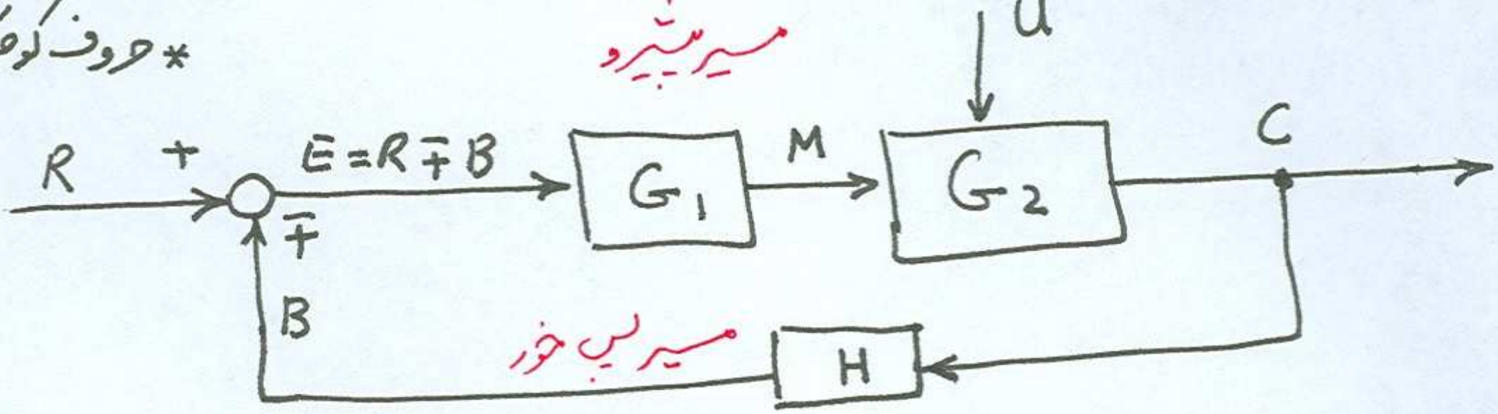
جبر دیاگرام بلوك وتابع تبدیل سیستم ها

جبر دیاگرام بلوکی و تابع تبدیل سیستم ها

* دیاگرام بلوکی نمایش تصویری یک سیستم فیزیکی و رابطه اجزاء تشکیل دهنده آن با یکدیگر می باشد.

* با استفاده از دیاگرام بلوکی و ساده کردن دیاگرام های پیچیده میتوان رفتار سیستم را پیش بینی نموده آن را تجزیه و تحلیل نمود

* حروف بزرگ تبدیل لاپلاس
* حروف کوچک حوزه زمان



R : سیگنال ورودی مبنا

B : " فیدبک اولیه

G : تابع تبدیل مسیر پیشرو

H : " " پس خور

C : خروجی کنترل شده

U : اغتشاش

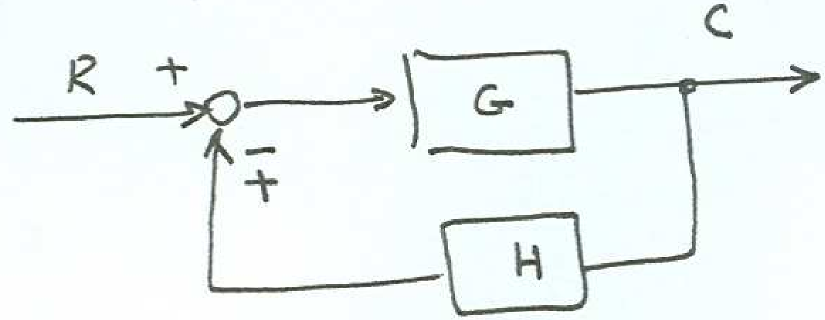
E : سیگنال خطا یا تحریک

M : سیگنال ورودی تغییر یافته

G_1 : تابع تبدیل کنترل کنند

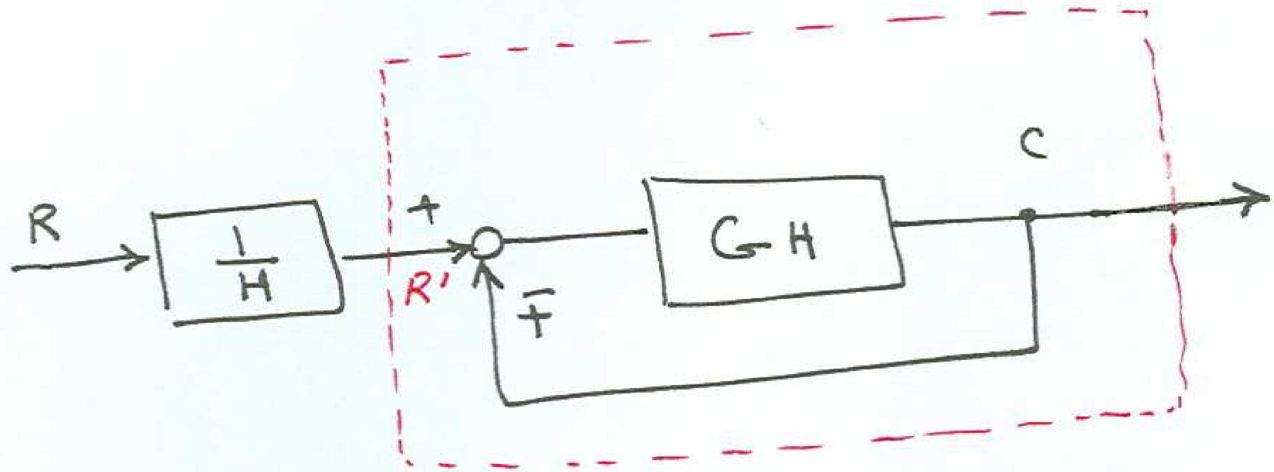
G_2 : " سیستم مورد کنترل

تبدیل شکل کانونی یک سیستم فیدبک دار به سیستم فیدبک واحد



فیدبک واحد :

فیدبک اولیه h با خروجی کنترل شده c برابر است.



مزیت ها :

۱ـ به رابطه بین حلقه بسته (به صورت کانونیکال) ـ حلقه باز با فیدبک واحد توجه کنید

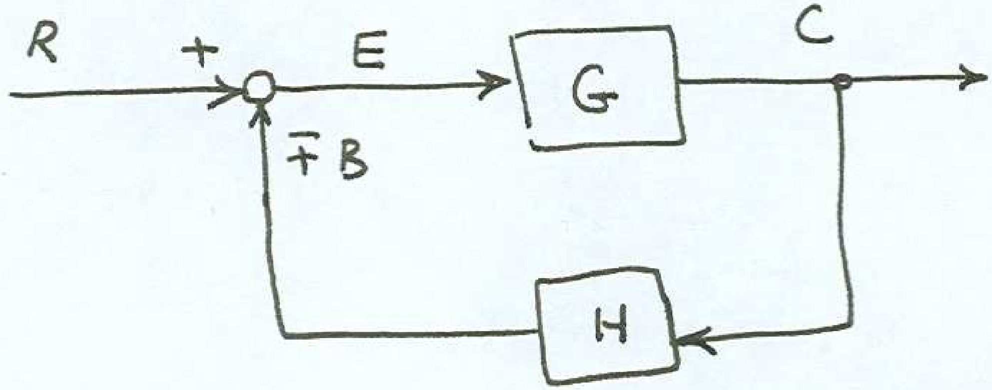
۲ ـ رابطه بین ورودی و خروجی در فیدبک واحد فوق به صورت زیر می باشد

$$\frac{C}{R'} = \frac{GH}{1 \pm GH}$$

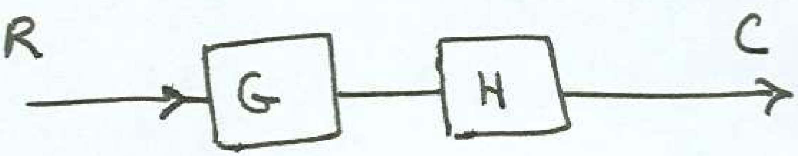
۳ ـ معادله مشخصه و شرط پایداری

$$1 \pm GH = 0$$

شکل کانونی سیستم های کنترل فیدبک دار (حلقه بسته)



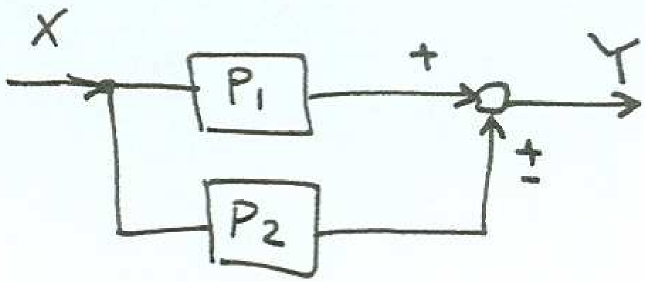
GH : تابع تبدیل حلقه باز

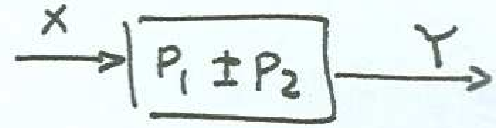


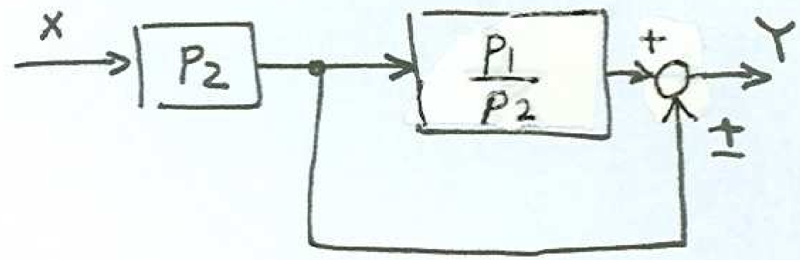
درصورتیکه دو تابع تبدیل G و H را به صورت حلقه باز قرار دهیم تابع تبدیل سیستم (حلقه باز) به صورت زیر می باشد

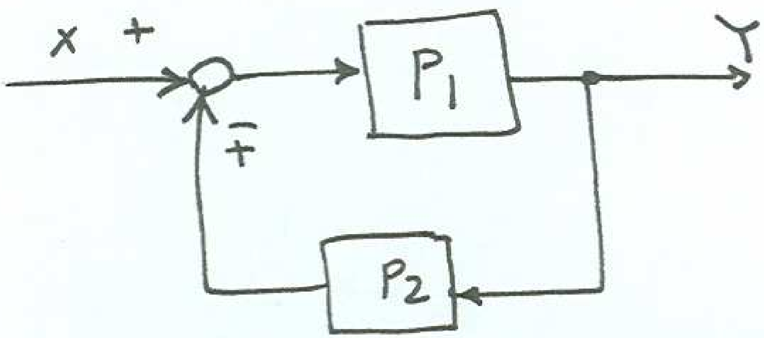
$$GH$$

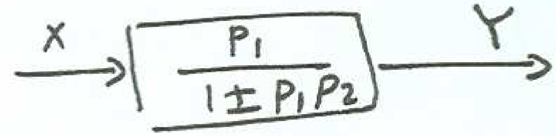
قواعد مهم ساده کردن دیاگرام های بلوکی

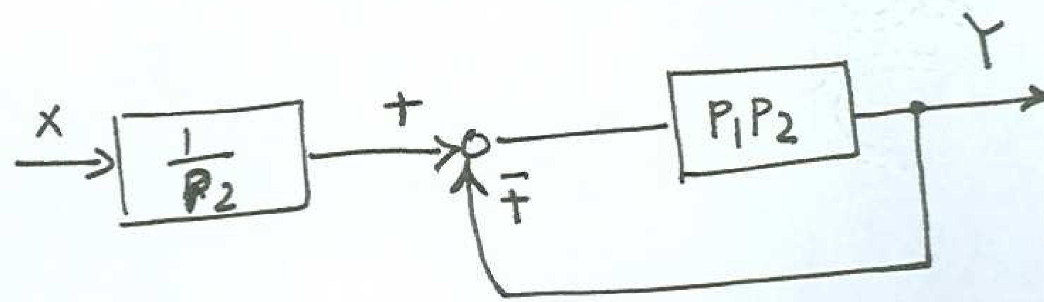






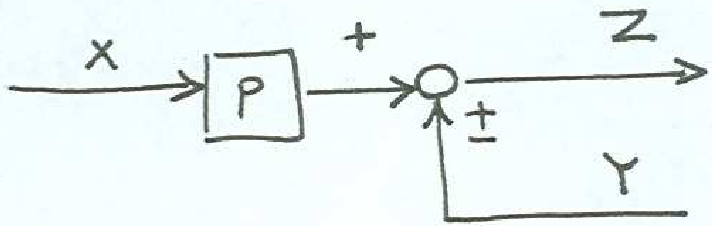


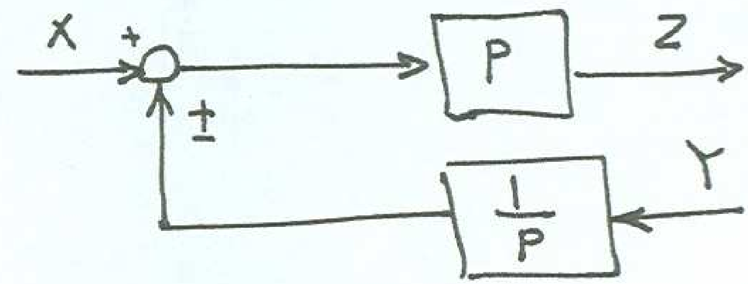


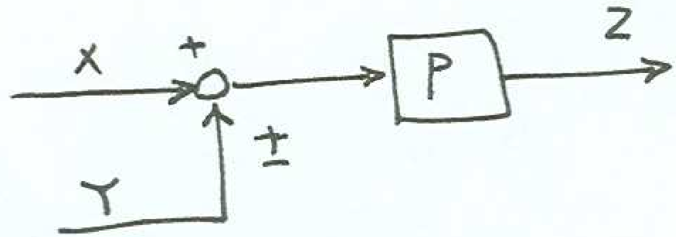


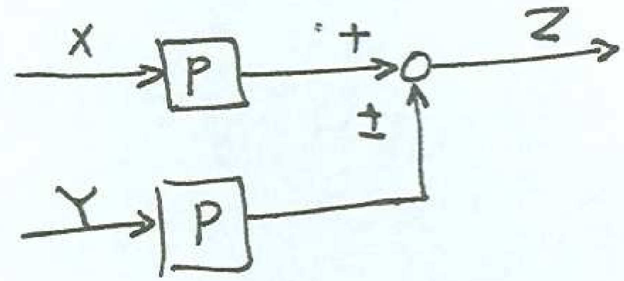
تبدیل شکل کانونیکال حلقه بسته به فیدبک واحد

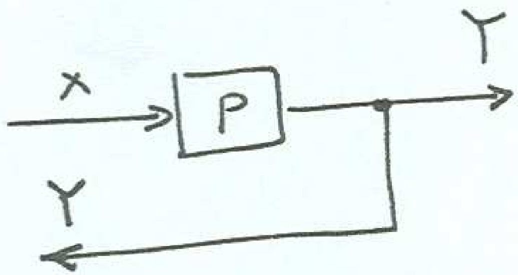
قواعد ساده کردن دیاگرام های بلوکی

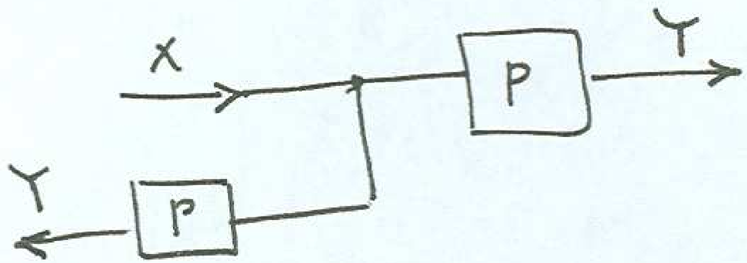


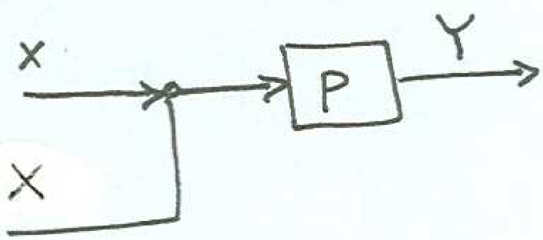


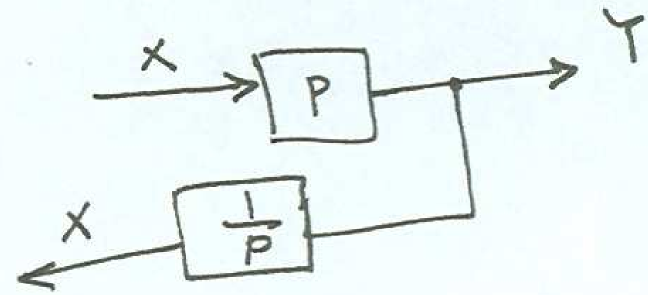




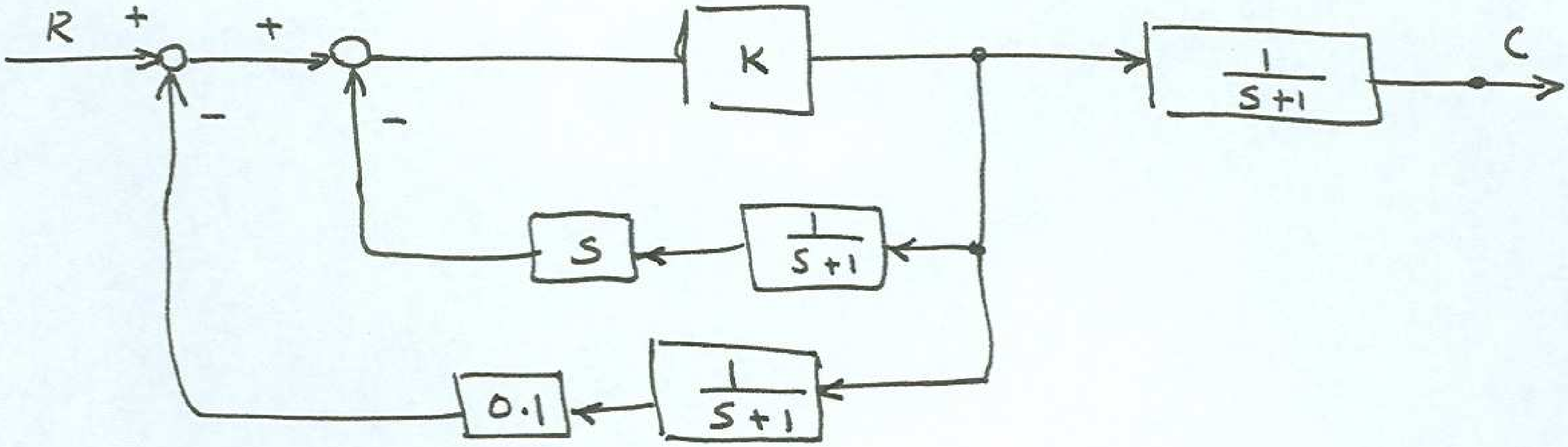


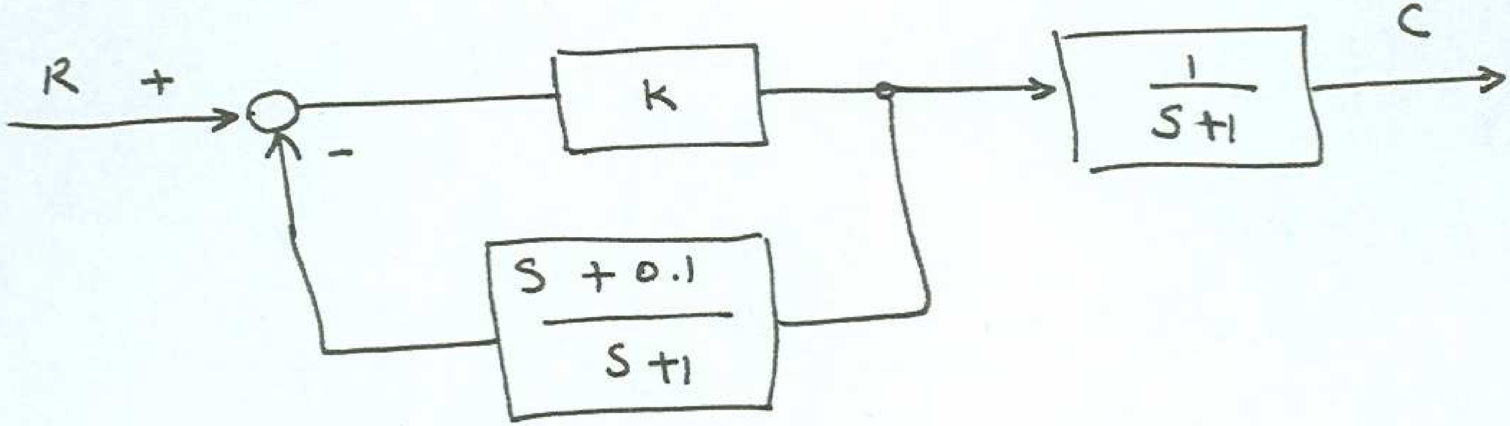




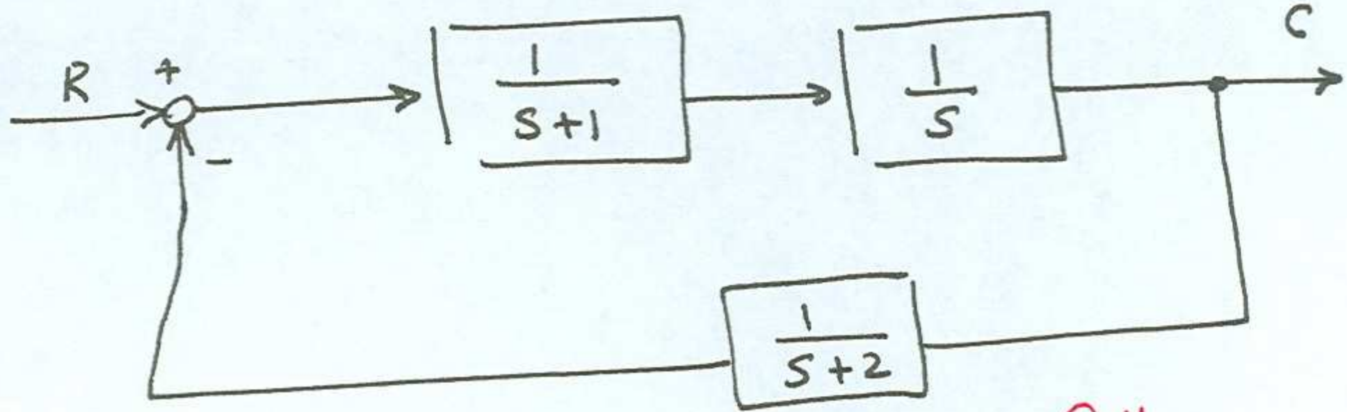


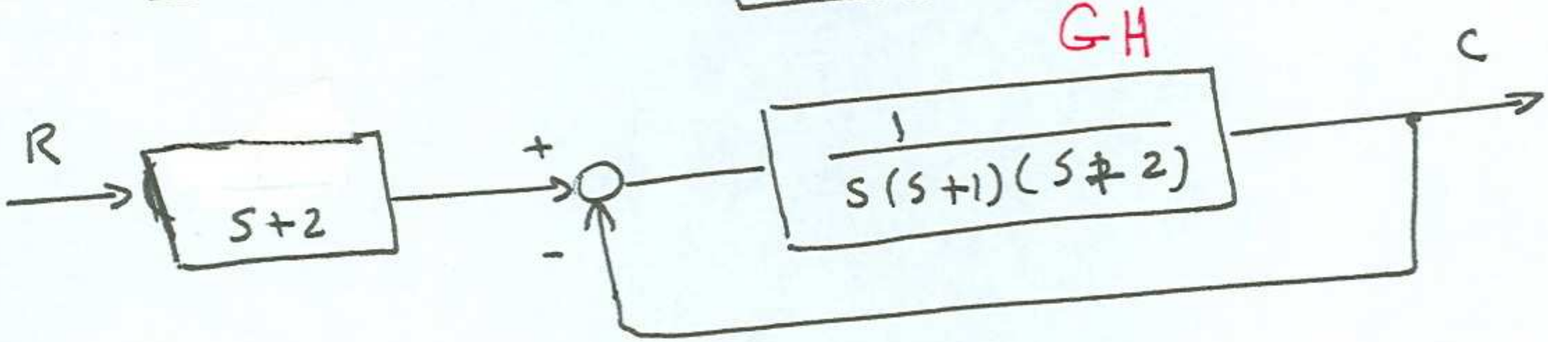
مثال : دیاگرام بلوکی زیر را ساده کنید (به صورت کانونیکال درآورید)





مثال : دیاگرام بلوکی زیر را به فیدبک واحد تبدیل نموده و معادله مشخصه سیستم را بدست آورید
با فیدبک واحد





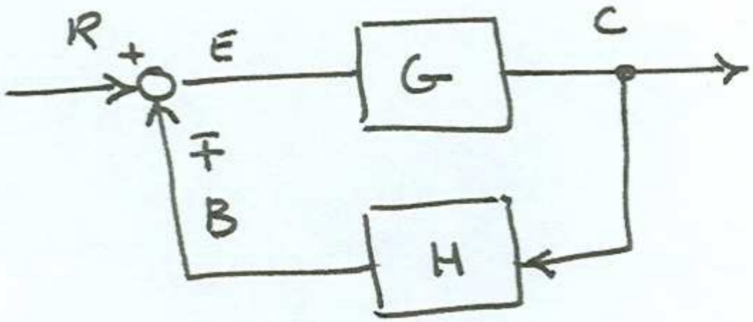
معادله مشخصه <= صورت کسر تابع تبدیل حلقه باز + مخرج کسر تابع تبدیل حلقه باز (GH) =

$$1 + S(S+1)(S+2) = 0$$

$$\boxed{S^3 + 3S^2 + 2S + 1 = 0}$$

معادله مشخصه

بدست آوردن رابطه بین بعضی کمیات مهم
نسبت به مبنا در شکل کانونی سیستم حلقه بسته



$$C = EG$$
$$= (R \mp B)\,G$$
$$= (R \mp HC)\,G$$
$$= GR \mp GHC$$

$$C \pm GHC = GR$$

$$C(1 \pm GH) = GR$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی

$$E = R \mp B$$

$$B = CH$$
$$C = GE$$

$$E = R \mp CH$$

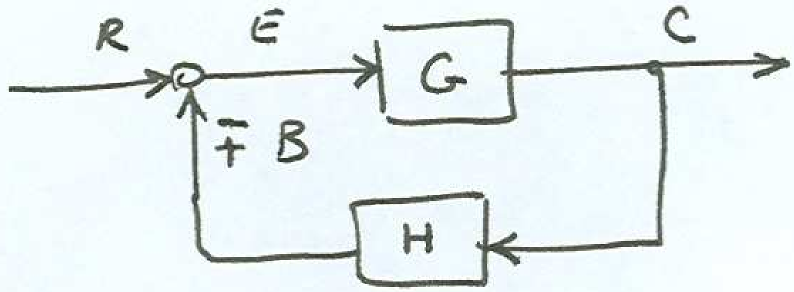
$$E = R \mp GEH$$

$$E \pm GEH = R$$

$$E(1 \pm GH) = R$$

$$\boxed{\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}}$$

نسبت خطا نسبت
به سیگنال تحریک به مبنا



$$E = R \mp B$$

$$B = CH$$

$$C = GE$$

$$B = GEH$$

$$= GH(R \mp B)$$

$$B = GHR \mp GHB$$

$$B \pm GHB = GHR$$

$$B(1 \pm GH) = GHR$$

نسبت فیدبک اولیه به سینا

$$\boxed{\frac{B}{R} = \frac{GH}{1+GH}}$$

برداشت ها :

- درصورتیکه سیستم چندین ورودی داشته باشد از جمع آنها استفاده می شود

- درصورتیکه $H=1$ باشد سیستم به فیدبک واحد تقلیل پیدا میکند

- رابطه بین رفتار سیستم بصورت حلقه باز و بسته از اهمیت زیادی برخوردار است. بطوریکه با مطالعه تابع تبدیل باز میتوان به رفتار سیستم بصورت حلقه بسته پی برد.

رابطه بین تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

$$1 \pm GH = 0$$

$$GH \equiv \frac{\text{صورت حلقه باز}}{\text{مخرج \quad "}}$$

$$1 \pm \frac{\text{صورت تابع تبدیل حلقه باز}}{\text{مخرج تابع تبدیل حلقه باز}} = 0$$

$$\text{مخرج تابع تبدیل حلقه باز} \quad + \quad \text{صورت تابع تبدیل حلقه باز} \quad = 0$$

بنابراین برای بدست آوردن معادله مشخصه سیستم حلقه بسته:
کافی است صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه باز را باهم جمع کنیم و مساوی صفر قرار دهیم.

* رابطه بین صفرها و قطب های حلقه باز و بسته

گراف عبور سیگنال

گراف عبور سیگنال

* صورت ساده شده دیاگرام بلوکی است

* ابزاری ترسیمی برای نمایش روابط ورودی و خروجی (علت و معلول) میان متغیرهای یک دستگاه معادلات جبری خطی

* نسبت به دیاگرام بلوکی از قواعد ریاضی دقیق‌تری پیروی می‌کند و از دقت بیشتری برخوردار است

* در صورتیکه سیستم با معادلات انتگرو دیفرانسیلی توصیف شده باشد ابتدا آنرا با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت دستگاه معادلات جبری خطی در آوریم

$$y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \dots N$$

* متغیرها می‌توانند توابعی از زمان، فرکانس مختلط و یا هر کمیت دیگر و یا ثابت باشند ولی به هر صورت از نظر ریاضی دارای مفهوم متغیر می‌باشند.

* a_{12} اپراتوری است که y_1 را به y_2 تصویر می‌کند. تطبیق می‌دهد

* a_{12} را بهره یا تابع انتقال یا ترانس میتانس دو متغیر می‌نامند

$$y_1 \xrightarrow{a_{12}} y_2$$

* اگر y_1 و y_2 تابعی از متغیر مختلط s باشند
a_{12} را تابع تبدیل می‌نامند

* a_{12} می‌تواند بصورت ثابتی نیز باشد.

* شکل فوق ساده‌ترین نوع یک گراف عبور سیگنال می‌باشد

* گراف عبور سیگنال فقط برای سیستم‌های خط...

* $y_2 = a_{12} y_1$ ...
$y_1 = \frac{1}{a_{12}} y_2$ نداریم

* متغیرهای y_1 و y_2 را به صورت یک گره و تابع انتقال a_{12} را بوسیله یک پیکان که شاخه نامیده می‌شود نمایش می‌دهند

* در نمایش گراف عبور سیگنال هر متغیر با یک گره و هر تابع انتقال با یک شاخه نمایش داده می‌شود

* شاخه‌ها از ابتدا تا انتها دارای یک جهت هستند و پیکان روی آنها جهت عبور سیگنال را نمایش می‌دهد.

مثال: نمایش قانون اهم به صورت گراف عبور سیگنال

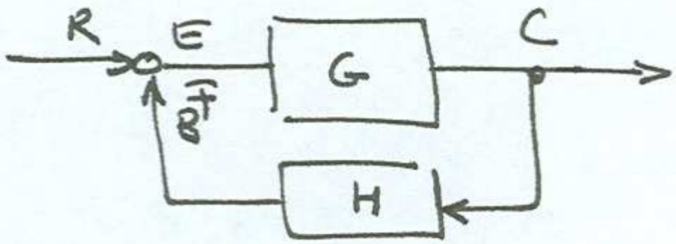
$$I \xrightarrow{R} V$$

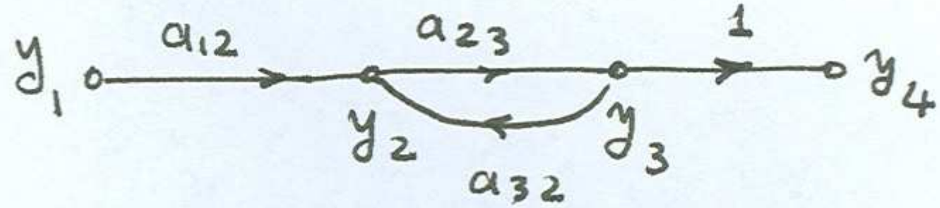
گره ورودی : یا منبع عبارتست از گرهی که تنها شاخه‌ها (شاخه یا) از آن خارج می‌شوند

* تنها یک شاخه از آن خارج می‌شود . مثل y_1

گره خروجی : تنها یک شاخه (یا چند) به آن وارد می‌شود . مثل y_4

مثال : ترسیم گراف عبور سیگنال دیاگرام بلوکی سیستم فیدبک دار به صورت کانونیکال





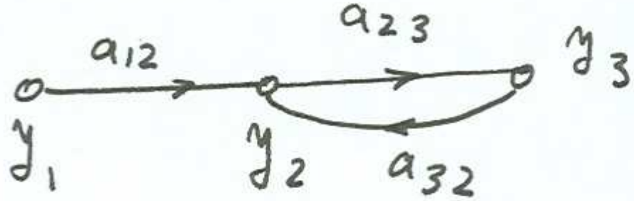
* توجه شود $y_3 = y_4$. برای رعایت تعریف خروجی بین y_3 و y_4 یک شاخه واحد قرار داده شده است .

Simulink * با این روش هر گره را غیر از گره ورودی می‌توان به گره خروجی تبدیل نمود . مثال اینجا دارد

* دقت شود در مورد گره ورودی نمی‌توان (به راحتی) این کار را انجام داده و باید معادلات را تغییر داد .

تعاریف مربوط به گراف عبور سیگنال

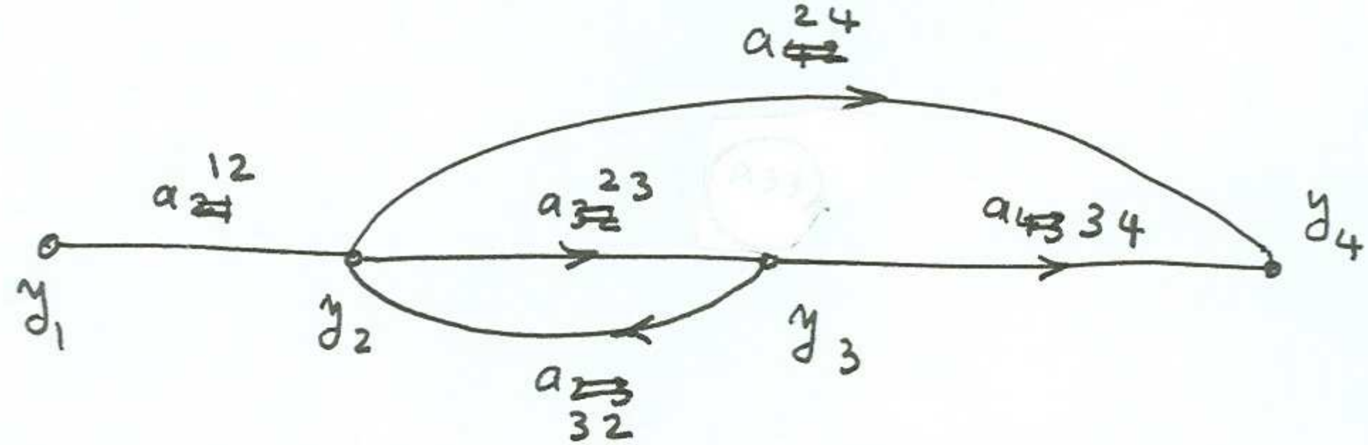
۱- مسیر : مجموعه‌ای از شاخه‌های پیوسته و پشت سرهم که در یک جهت طی می‌شوند . عبور از یک گره بیش از یکبار امکان ندارد .



مسیرها:

$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3$

$y_3 \rightarrow y_2$ یا $y_2 \rightarrow y_3$



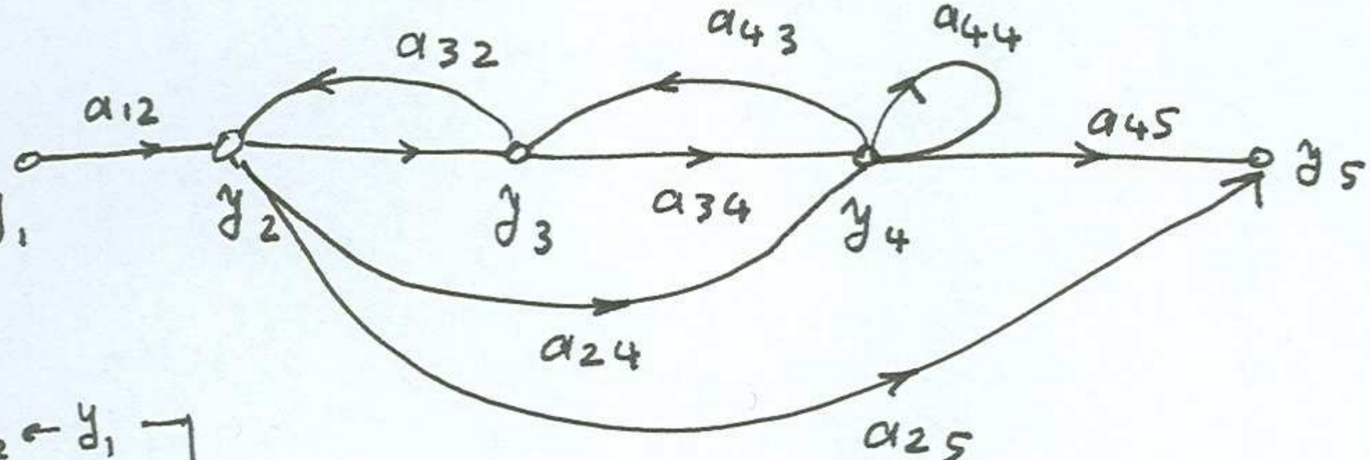
مسیرها:

$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4$

$y_2 \rightarrow y_3$ یا $y_3 \rightarrow y_2$

$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_4$

۲- مسیر پیشرو   مسیری است که از یک گره ورودی آغاز و به یک گره خروجی پایان می‌یابد و در طول آن از هر گرهی بیش از یکبار عبور نمی‌کنید



* y_1 گره ورودی است

* y_2 ، y_3 ، y_4 ، y_5 می‌توانند گره های خروجی باشند

مثال مسیرهای پیشرو : ① $y_2 \leftarrow y_1$

② $y_3 \leftarrow y_1$

- $y_3 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$
- $y_3 \xleftarrow{a_{34}} y_4 \xleftarrow{a_{24}} y_2 \leftarrow y_1$

③ $y_4 \leftarrow y_1$

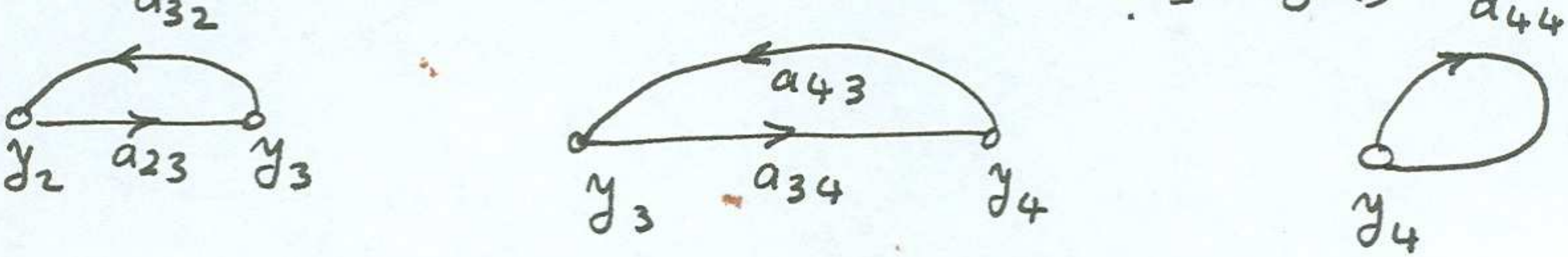
- $y_4 \leftarrow y_3 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$
- $y_4 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$

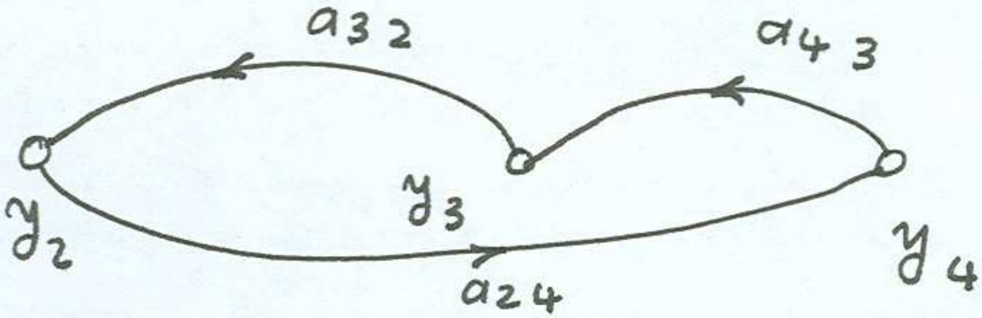
④ $y_5 \leftarrow y_1$

- $\leftarrow y_4 \leftarrow y_3 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$
- $y_5 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$
- $5 \leftarrow y_4 \leftarrow y_2 \leftarrow y_1$

۳ - حلقه   مسیری است که گره آغاز و پایان آن یکی است و در طول مسیر، هیچ گرهی برخورد ندارد

در شکل اسلاید قبل حلقه‌ها عبارتند از





۴ - بهره مسیر   حاصل ضرب بهره شاخه‌هایی که در طی مسیر با آنها مواجه می‌شویم

مثال: بهره مسیر : $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4$ عبارتست از :

$$a_{12}a_{23}a_{34}$$

۵ - بهره مسیر پیشرو   عبارتست از بهرهٔ مسیر پیشرو

۶ - بهره حلقه   بهرهٔ یک مسیر حلقه است   مثلاً بهره حلقه : $y_2 \leftarrow y_3 \leftarrow y_4 \leftarrow y_2$

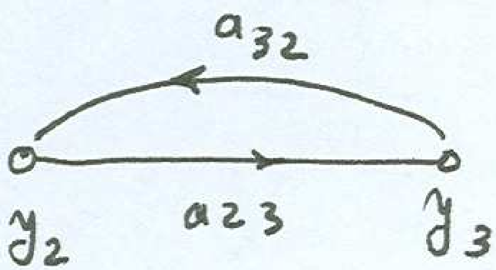
عبارتست از :

$$a_{24}\, a_{43}\, a_{32}$$

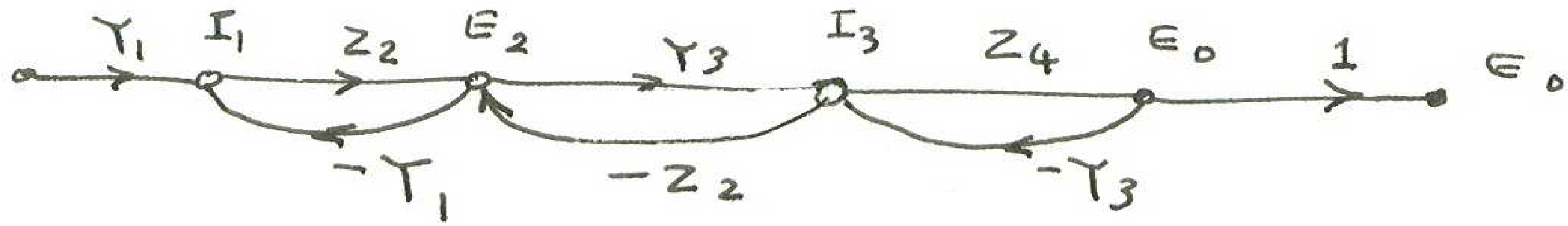
۷ - حلقه خودی   عبارتست از حلقه‌ای که تنها دارای یک شاخه می‌باشد. مثل a_{44}

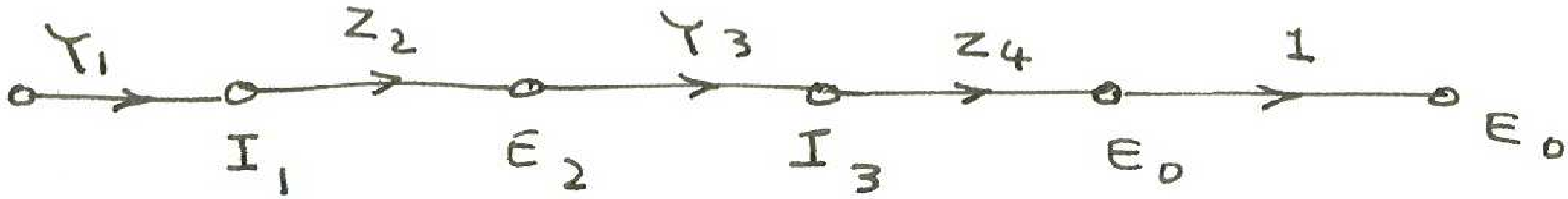
۸ - حلقه فیدبک یا مسیر فیدبک   مسیری است که از یک گره شروع و پس از طی مسیر به همان گره ختم میشود

مثل $y_2 \xleftarrow{a_{32}} y_3 \xleftarrow{a_{23}} y_2$



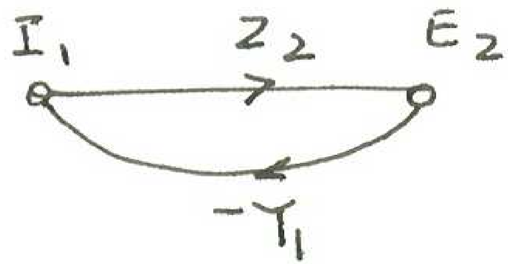
مسیر پیشرو در گراف زیر :

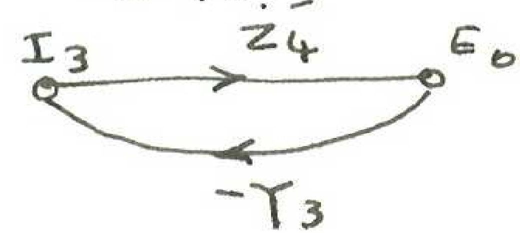




یادآوری تعریف مسیر پیش رو:

از یک گره ورودی آغاز و به یک گره خروجی وارد شده و در طول مسیر از هر گره بیش از یکبار عبور نمیکند

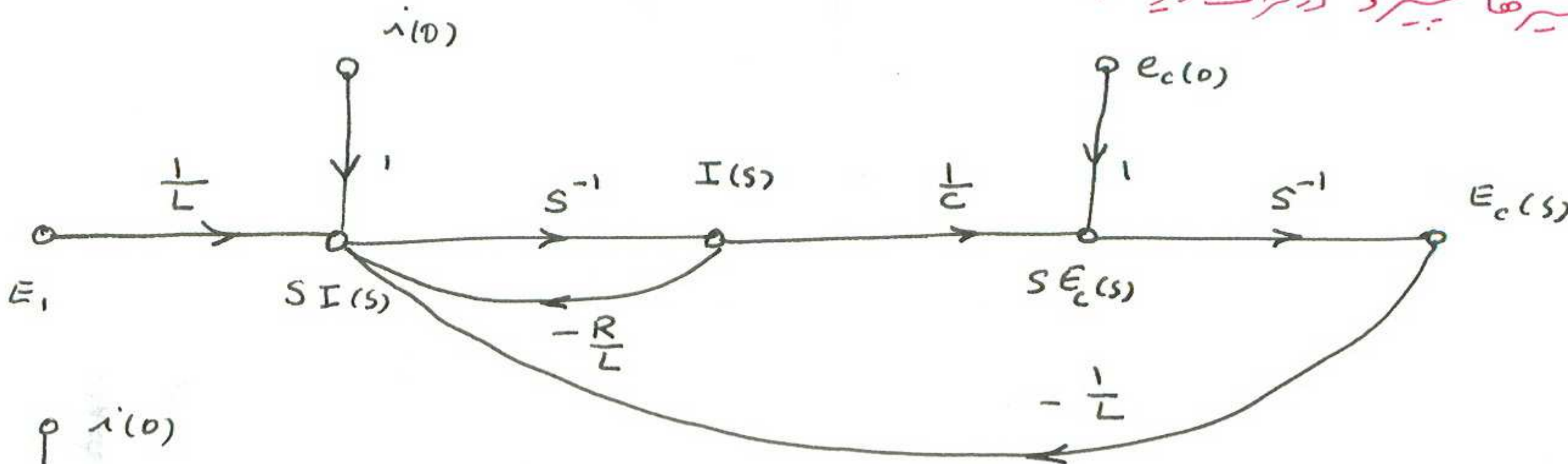




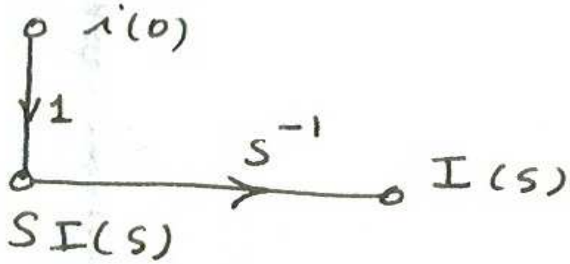
حلقه های مجزا در گراف فوق:

هیچ گره مشترکی ندارند

مسیرهای پیشرو در گراف زیر :



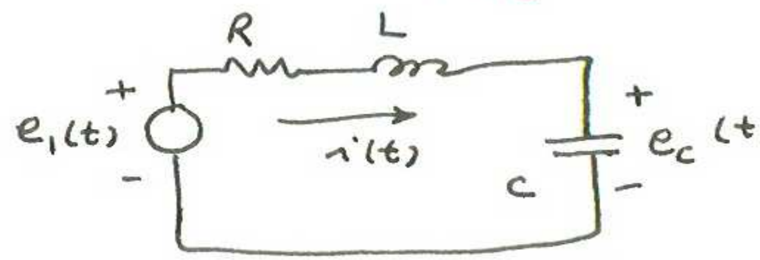
1)



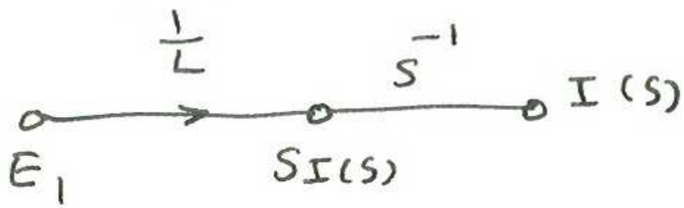
متغیر خروجی : $I(s)$

متغیرهای ورودی : E_1 , $i(0)$, $e_c(0)$

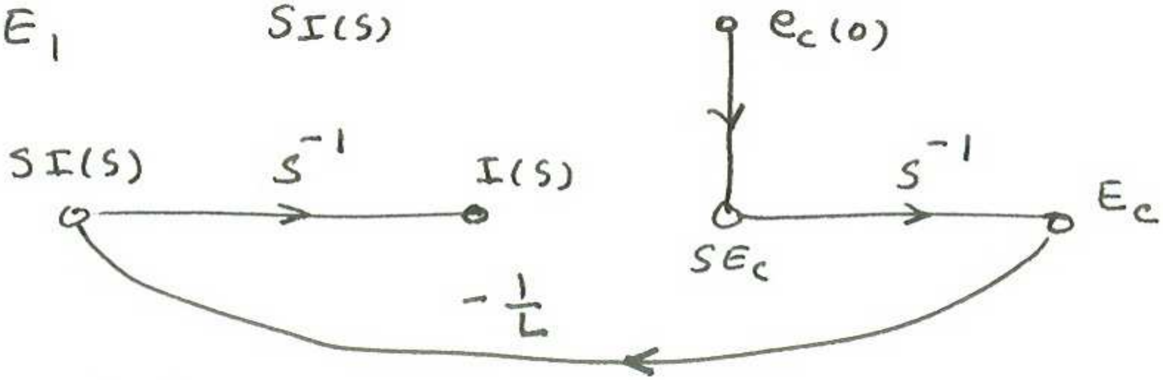
شکل مدار :



2)



3)

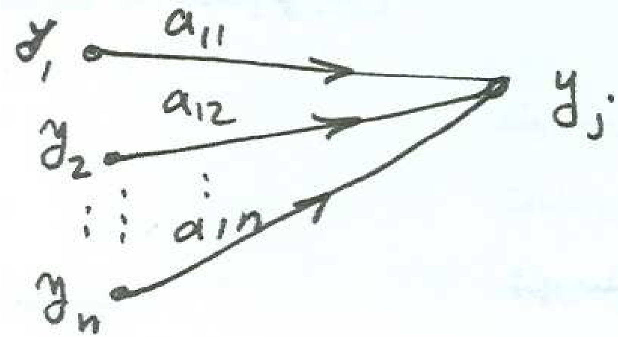


جبر گراف عبور سیگنال

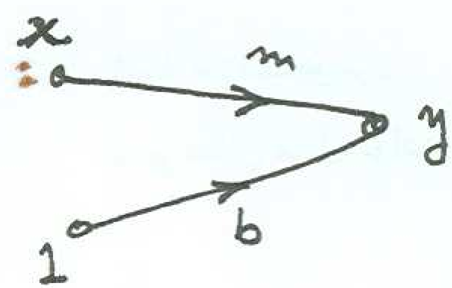
۱- مقدار متغیری که با یک گره مشخص میشود برابر است با مجموع همه سیگنالهایی که به گره وارد می شود

قانون جمع

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, y_j$$



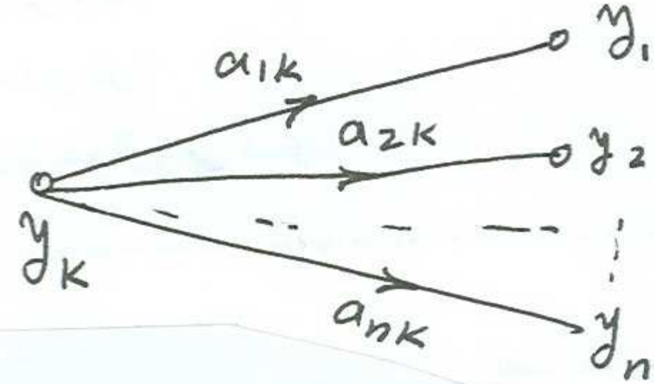
مثال:



$$y = mx + b$$

۲ - مقدار متغیری که با یک گره مشخص میشود در تمام شاخه هائی که از گره خارج میشوند وجود خواهد داشت

قانون انتقال



$$y_i = a_{ik} y_k$$

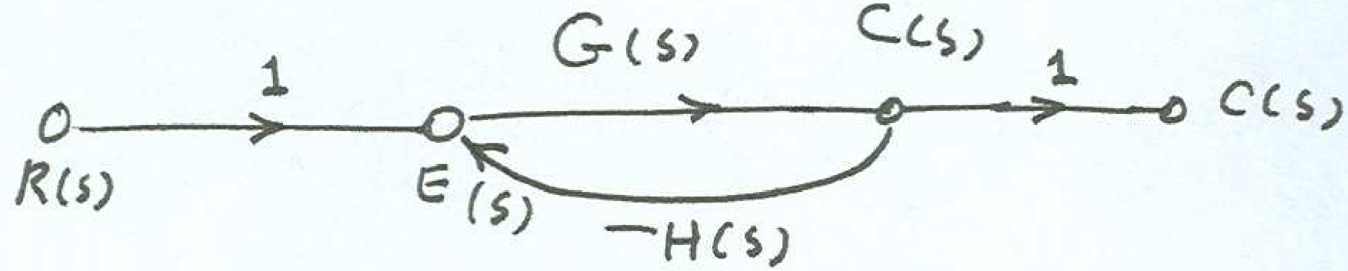
۳ - بجای چند شاخه متوالی و هم جهت میتوان یک شاخه با بهره ای برابر حاصل ضرب بهره های شاخه ها قرار داد.

قانون ضرب

$$y_n = A_{12} \cdot \cdots \cdots \; A_{(n-1)n}$$

۴- به جای شاخه های موازی و هم جهتی که دو گره را به هم متصل می نمایند میتوان یک شاخه با بهره ای برابر مجموع بهره های شاخه های موازی قرار داد.

۵- گراف عبور سیگنال و رابطه بین ورودی و خروجی برای یک سیستم فیدبک دار کانونیکال

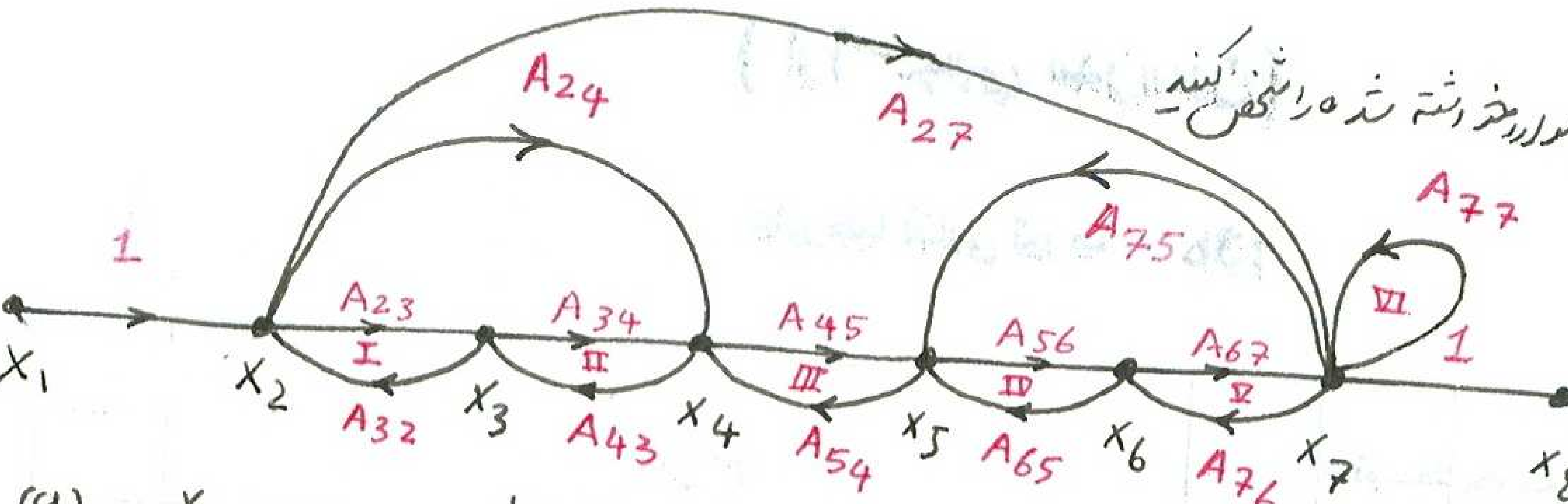


$$E(s) = R(s) - H(s)\,C(s)$$

$$C(s) = G(s)\,E(s)$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}}$$

c: در گراف عبور سیگنال زیر موارد خواسته شده را مشخص کنید



a) گره ورودی

b) " خروجی

c) مسیرهای پیشرو

d) مسیرهای پس خور

e) حلقه‌ی خودی

f) بهره حلقه فیدبک

g) بهره مسیرهای پیشرو

(a) X_1 (b) X_8

(c) 1) X_1 تا X_8 مستقیم 2) $X_1 \to X_2 \to X_7 \to X_8$

3) $X_1 \to X_2 \to X_4 \to X_5 \to X_6 \to X_7 \to X_8$

(d) I $\xrightarrow{\text{تا}}$ VI حمله شش حلقه و $X_2 \to X_4 \to X_3 \to X_2$ و $X_5 \to X_6 \to X_7 \xrightarrow{A_{75}} X_5$

$X_2 \to X_7 \to X_6 \to X_5 \to X_4 \to X_3 \to X_2$

e) X_7 به X_7

f) $A_{23} \cdot A_{32}$, ... A_{77}, $A_{56} \cdot A_{67} \cdot A_{75}$, $A_{23} \cdot A_{43} \cdot A_{24}$

$A_{27} \cdot A_{75} \cdot A_{45} \cdot A_{34} \cdot A_{23}$, $A_{27} \cdot A_{76} \cdot A_{65} \cdot A_{54} \cdot A_{43} \cdot A_{32}$

خلاصه روش ترسیم گراف عبور سیگنال

۱ـ معادلات کل سیستم را بصورت جبری زیر بنویسید. اگر x_1 ورودی است معادله لازم ندارد

$$X_1 = A_{11}X_1 + A_{21}X_2 + \cdots + A_{n1}X_n$$

$$X_2 = A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{n2}X_n$$

$$\cdots$$

$$X_m = A_{1m}X_1 + A_{2m}X_2 + \cdots + A_{nm}X_n$$

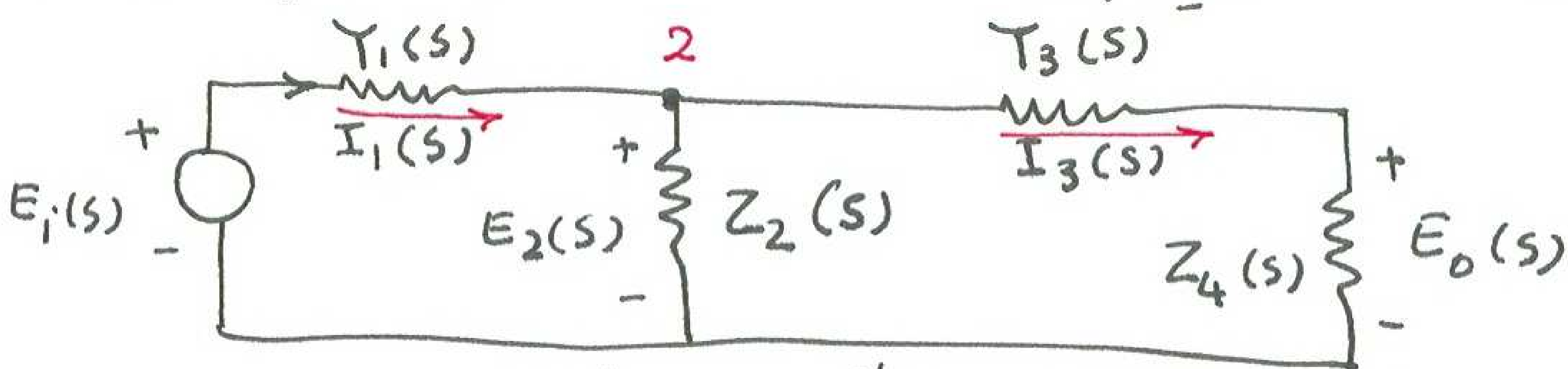
۲ـ از چپ به راست گره ها را بنویسید و آنها را مرتب کنید

۳ـ گره ها را با شاخه های متناسب خود به یکدیگر مربوط (وصل) کنید

۴ـ برای گره خروجی یک شاخه واحد درنظر بگیرید (تا تعریف گره خروجی نقض نشود)

۵ـ برای وضوح بیشتر درصورت لزوم گره ها و حلقه ها را دوباره مرتب کنید

مثال : گراف جریان سیگنال مدار زیر را ترسیم نمائید . در این مدار عناصر R ، L و C توسط توابع $Z(S)$ و $Y(S)$ نشان داده شده‌اند. تبدیل لاپلاس ولتاژ ورودی $E_i(S)$ و ولتاژ خروجی $E_0(S)$ میباشند.



حل : دسته‌ای از معادلات را که بیانگر جریان شاخه‌ها و ولتاژ گره‌ها می‌باشند به صورت زیر می‌نویسیم :

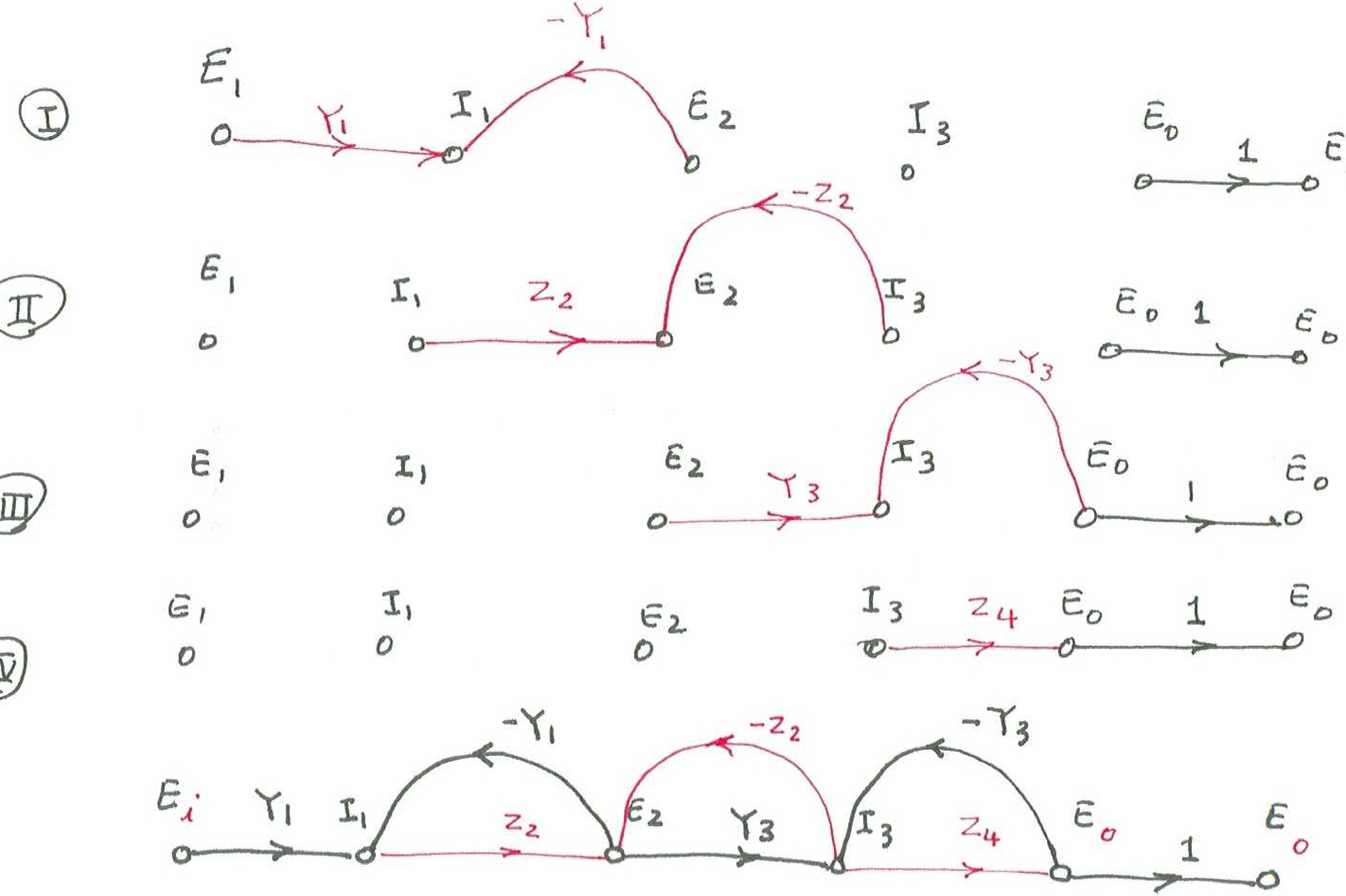
I $\quad I_1(S) = [E_i(S) - E_2(S)]\, Y_1(S)$ (در بعضی روابط از اندیس (S) صرف‌نظر شده است)

II $\quad E_2(S) = [I_1 - I_3]\, Z_2$

III $\quad I_3(S) = [E_2 - E_0]\, Y_3$

IV $\quad E_0(S) = Z_4 \cdot I_3(S)$

متغیرها را به صورت گره‌ها از چپ به راست می‌نویسیم :



I
E_1 Y_1 I_1 $-Y_1$ E_2 I_3 E_0 1
II
E_1 I_1 Z_2 E_2 $-Z_2$ I_3 E_0 1 E_0
III
E_1 I_1 E_2 Y_3 I_3 $-Y_3$ E_0 1 E_0
IV
E_1 I_1 E_2 I_3 Z_4 E_0 1 E_0
E_i Y_1 I_1 $-Y_1$ Z_2 E_2 $-Z_2$ Y_3 I_3 $-Y_3$ Z_4 E_0 1 E_0

رابطه بین ورودی و خروجی با استفاده از تحلیل مدار

$$E_i = [Z_1 + Z_2]\, I_1 - Z_2 I_3$$

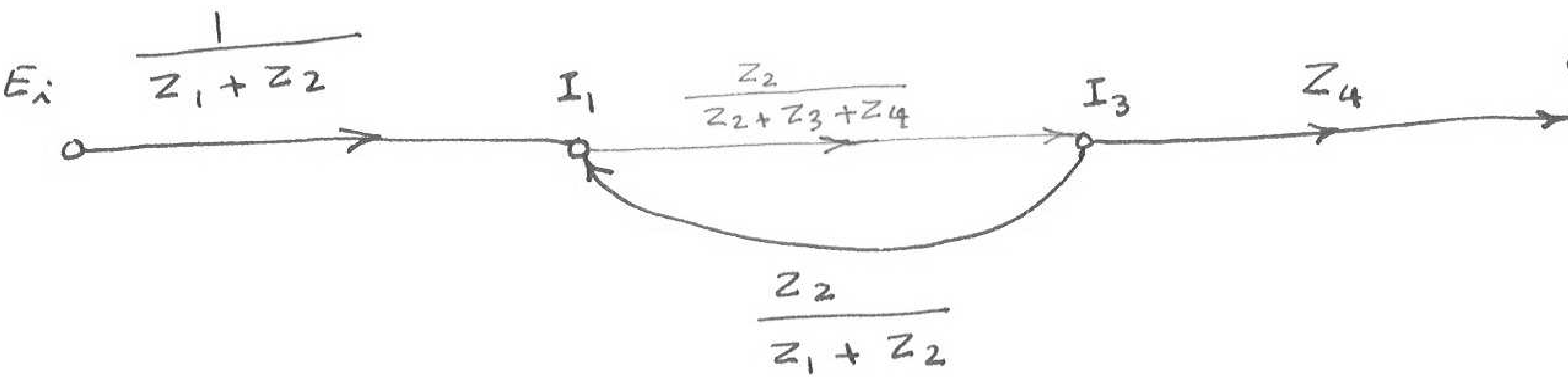
$$0 = -Z_2 I_1 + [Z_2 + Z_3 + Z_4]\, I_3$$

$$E_o = Z_4 I_3$$

از معادله اول I_1 و از معادله دوم I_3 را حساب می‌کنیم

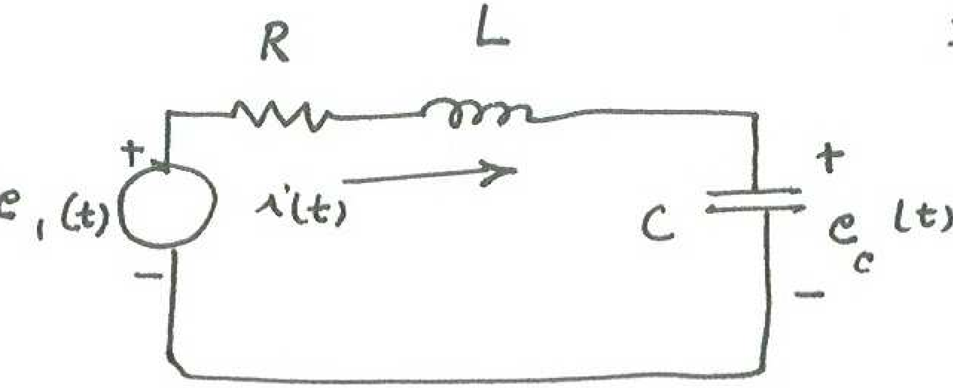
$$I_1 = \frac{1}{Z_1 + Z_2} E_i + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I_3$$

$$I_3 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I_1$$



گراف عبور سیگنال - معادلات دیفرانسیل

مثال: گراف عبور سیگنال مدار الکتریکی زیر را ترسیم نمائید



$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = e_1 - Ri - e_c \\ C\dfrac{de_c}{dt} = i \end{cases}$$

برای ترسیم گراف عبور سیگنال معادلات دیفرانسیل باید با استفاده از تبدیل لاپلاس آنها را به معادلات جبری تبدیل کنیم. (از اندیس‌های t و s صرفنظر شده است)

$$\frac{di}{dt} = \frac{e_1}{L} - \frac{Ri}{L} - \frac{e_c}{L}$$

$$sI = i(0) + \frac{1}{L}E_1 - \frac{R}{L}I - \frac{1}{L}E_c$$

$$sE_c = e_c(0) + \frac{1}{C}I(s)$$

متغیرهای ورودی عبارتند از:

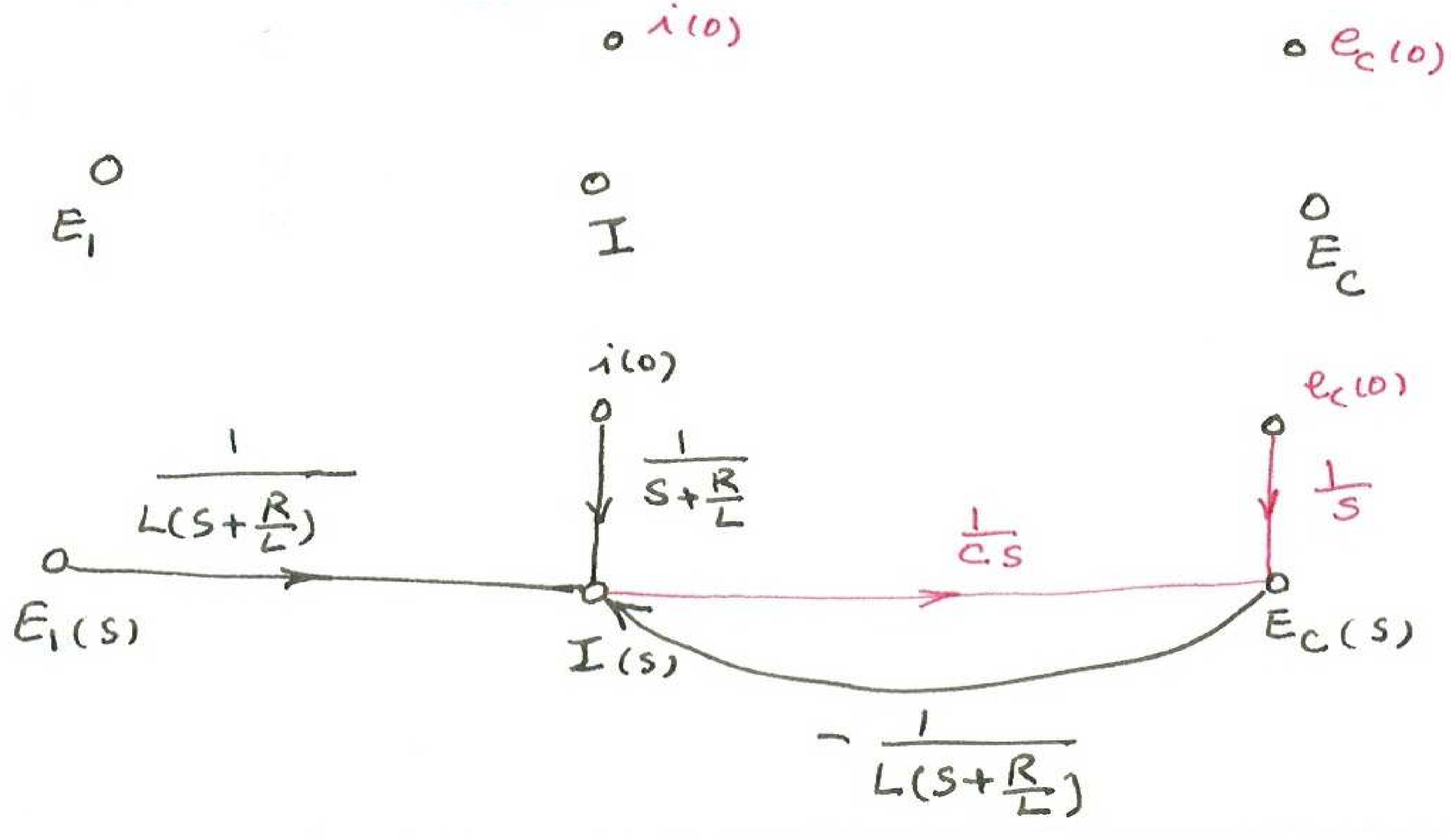
E_1 ، $i(0)$ ، $e_c(0)$

متغیرهای خروجی عبارتند از: E_c ، I

از معادله اول I و از معادله دوم E_c را بدست می آوریم

$$\underline{\underline{I}}(s) = \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\, i(0) + \frac{1}{L(s+\frac{R}{L})}\, \underline{\underline{E_1}} - \frac{1}{L(s+R/L)}\, \underline{\underline{E_c}}$$

$$\underline{\underline{E_c(s)}} = \frac{1}{s}\, e_c(0) + \frac{1}{Cs}\, \underline{\underline{I(s)}}$$



نمودارهای حالت

روش دوم :

تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل را به صورت زیر داشتیم :

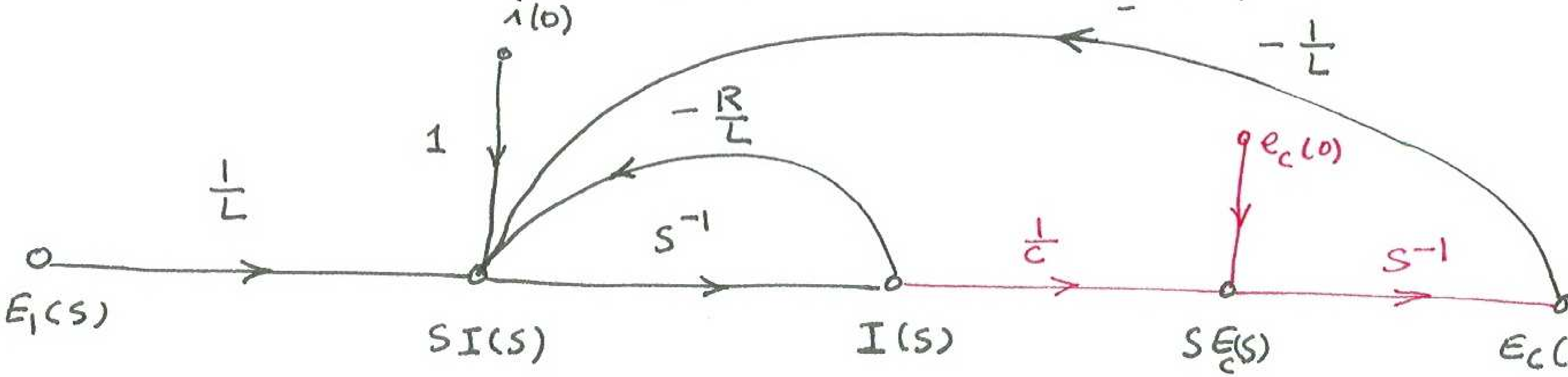
$$SI(S) = i(0) + \frac{1}{L}E_1 - \frac{R}{L}I - \frac{1}{L}E_c$$

$$SE_c(S) = e_c(0) + \frac{1}{C}I(S)$$

$$I(S) = S^{-1}(I(S))$$

$$E_c(S) = S^{-1}(E_c(S))$$

در این روش از متغیرهای $SI(S)$ و $SE_c(S)$ انتگرال میگیریم . آنها را در S^{-1} ضرب می‌کنیم .



علت اینکه نمودار حالت نامیده میشود این است که در آن از S^{-1} استفاده شده است و مستقیماً عمل انتگرال‌گیری صورت میگیرد. مثل معادلات حالت (state space equations)

بدست آوردن بهره کل سیستم در گراف عبور سیگنال

بدست آوردن بهره کل سیستم در گراف عبور سیگنال

مزیت این روش در این است که در دیاگرام های پیچیده ضرورتی ندارد که دیاگرام ها را ساده کنیم بلکه به سادگی رابطه بین خروجی و ورودی را بدست می آوریم.

$$M = \frac{y_{\text{خروجی}}}{y_{\text{ورودی}}} = \sum_{K=1}^{N} \frac{M_K \Delta_K}{\Delta}$$

$y_{\text{ورودی}}$: متغیر گره ورودی

$y_{\text{خروجی}}$: 〃 〃 خروجی

M : بهره بین گره ورودی و گره خروجی.

N : تعداد کل مسیرهای پیشرو بین $y_{\text{ورودی}}$ و $y_{\text{خروجی}}$

M_K : بهره مسیر پیشرو K ام بین $y_{\text{ورودی}}$ و $y_{\text{خروجی}}$

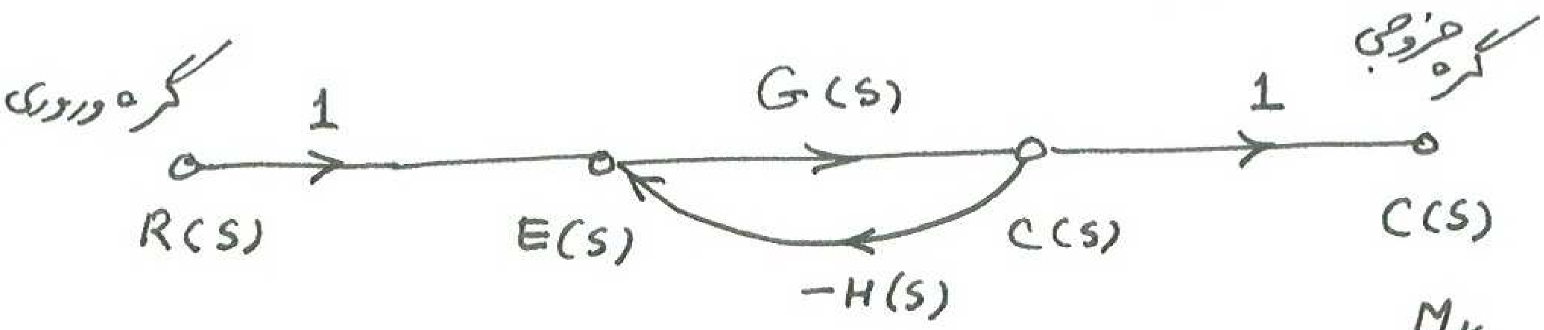
$$\Delta = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} + \cdots$$

P_{mr} حاصل ضرب بهره mامین ترکیب ممکن r حلقه مجزا است ($1 \leqslant r \leqslant N$) دو حلقه مجزا حلقه‌هایی که
نقطه مشترکی ندارند

$$\Delta = 1 - \begin{pmatrix}\text{مجموع بهره های}\\\text{تک‌تک حلقه ها}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{مجموع حاصل ضرب بهره های}\\\text{همه ترکیبات ممکن هر دو حلقه}\\\text{مجزا}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{مجموع حاصل ضرب بهره های}\\\text{همه ترکیبات ممکن هر سه حلقه}\\\text{مجزا}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{"}\quad\text{"}\\\text{چهار حلقه}\\\text{"}\quad\text{"}\\\text{"}\end{pmatrix} - \cdots$$

Δ_k : عبارتست از Δ ی قسمتی از گراف عبور سیگنال که از مسیر پیش رو kام
مجزا است.

: نسبت بین ورودی و خروجی را در گراف زیر بدست آورید



حل :

۱- محاسبه بهره مسیرها M_K

بین ورودی و خروجی ، R و C تنها یک مسیر پیش رو وجود دارد

مسیری است که از یک گره ورودی آغاز و به یک گره خروجی ختم شده و در طول مسیر از هر گره بیش یک بار عبور نمیکند

$$M_1 = G(s)$$

۲- محاسبه بهره حلقه ها :

تنها یک حلقه وجود دارد

$$P_{11} = -G(s)H(s)$$

۳- محاسبه Δ_K : تنها یک حلقه داریم - حلقه مجزا وجود ندارد بنابراین

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

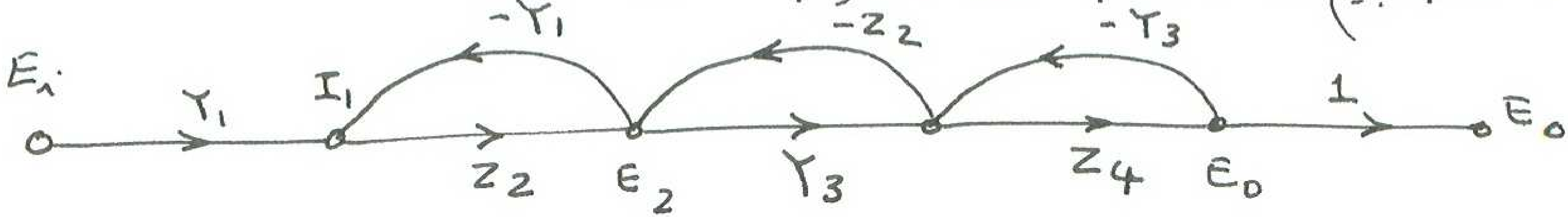
$$\Delta = 1 - \text{مجموع بهره های یکایک حلقه ها} + \text{مجموع حاصل ضرب بهره های هر ترکیب ممکن هر دو حلقه مجزا} - \cdots$$

$$\Delta = 1 - P_{11} = 1 - (-G(s)H(s) = 1 + G(s)H(s)$$

$$M = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s) \times 1}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

ل : رابطه بین ورودی و خروجی را در گراف زیر بدست آورید



حل :

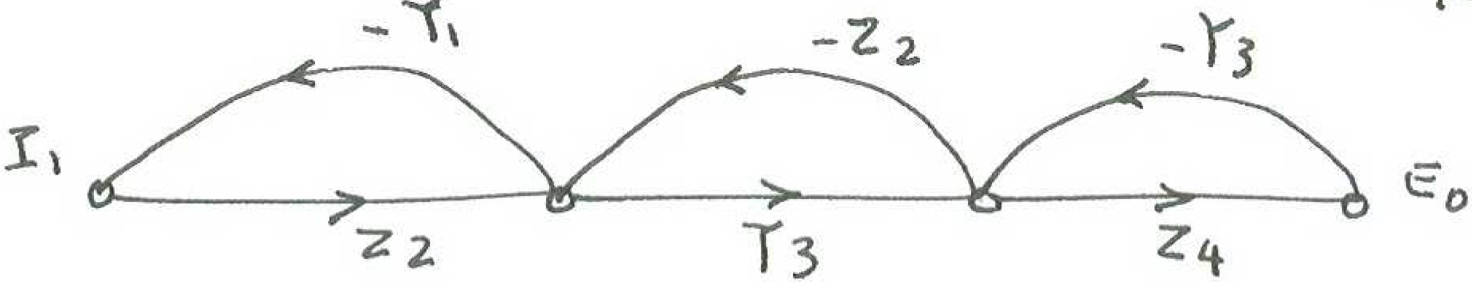
۱- محاسبه بهره مسیرهای پیشرو :

تنها یک مسیر پیشرو نیز وجود دارد

$$M_1 = Y_1 Z_2 Y_3 Z_4 \times 1$$

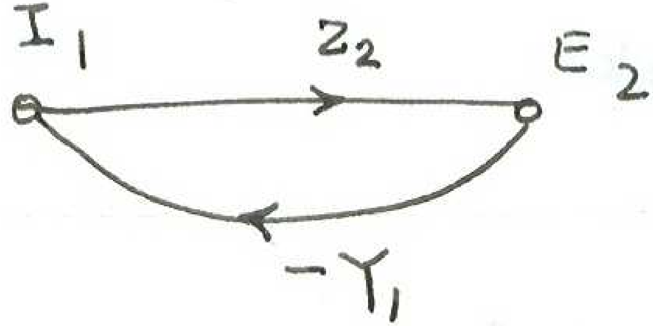
$$\boxed{M_1 = Y_1 Z_2 Y_3 Z_4}$$

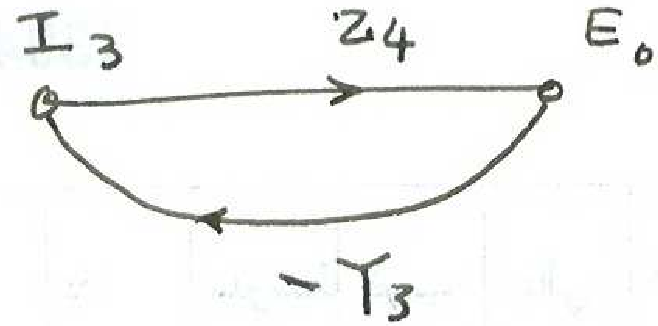
۲- محاسبه بهره حلقه ها



$P_{11} = -Z_2 Y_1$ $\quad P_{21} = -Z_2 Y_3$ $\quad P_{31} = -Z_4 Y_3$

۳- محاسبه Δ_k - دو حلقه مجزا وجود دارد





$-Z_2Y_1$ $\qquad$ $-Z_4Y_3$

$P_{12} =$ مجموع حاصل‌ضرب بهره‌های هر ترکیب ممکن هر دو حلقه مجزا $= -Z_2Y_1\,(-Z_4Y_3) = Z_2Z_4Y_1$

شماره ترکیب — تعداد حلقه های مجزا

* دو حلقه مجزا داریم $r=2$
* یک ترکیب بیشتر ندارد $m=1$

$P_{12} = Z_2Z_4Y_1Y_3$

$P_{22} = 0$

$P_{32} = 0$

$\vdots$

$$\Delta = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} + \cdots$$

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12}$$

$$= 1 - (Z_2 Y_1 - Z_2 Y_3 - Z_4 Y_3) + Z_2 Z_4 Y_1 Y_3$$

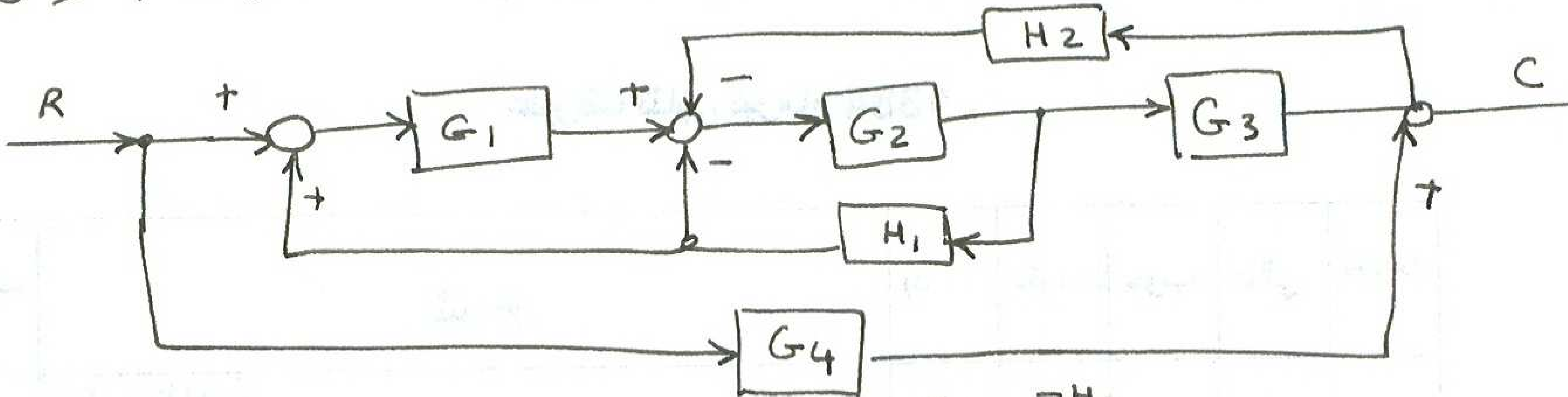
۴ - محاسبه Δ_K :

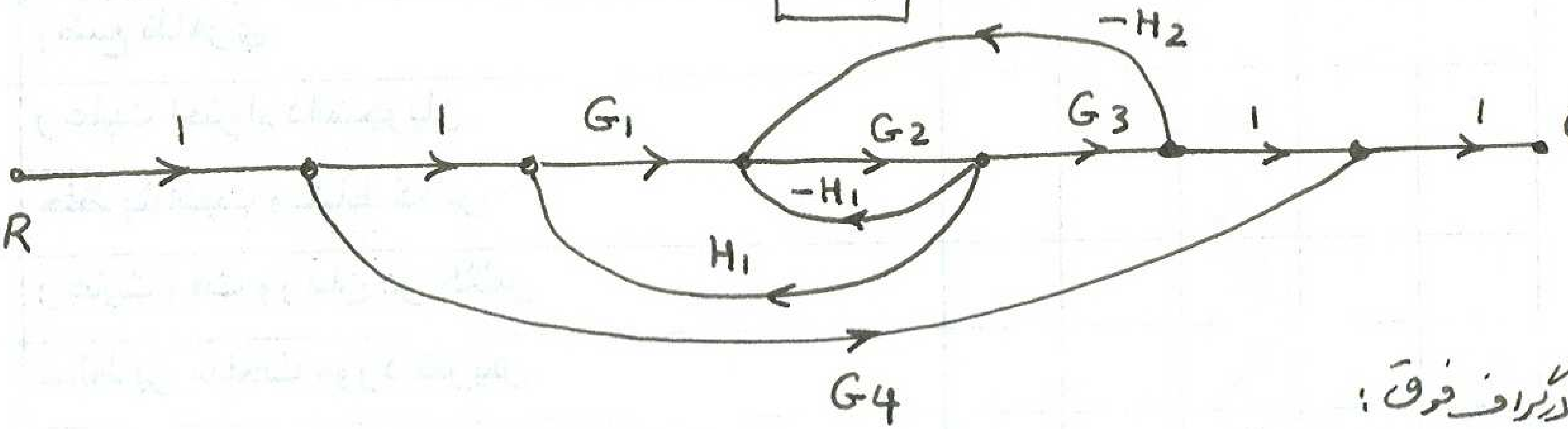
تمام حلقه‌ها با مسیر پیشرو فصل مشترک دارند بنابراین

$$\Delta_1 = 1$$

$$\boxed{\frac{E_0}{E_1} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{Y_1 Y_3 Z_2 Z_4}{1 + Z_2 Y_1 + Z_2 Y_3 + Z_4 Y_3 + Z_2 Z_4 Y_1 Y_3}}$$

: تابع تبدیل سیستمی را که دیاگرام بلوکی آن به صورت زیر داده شده است با استفاده از گراف عبور سیگنال بدست آو



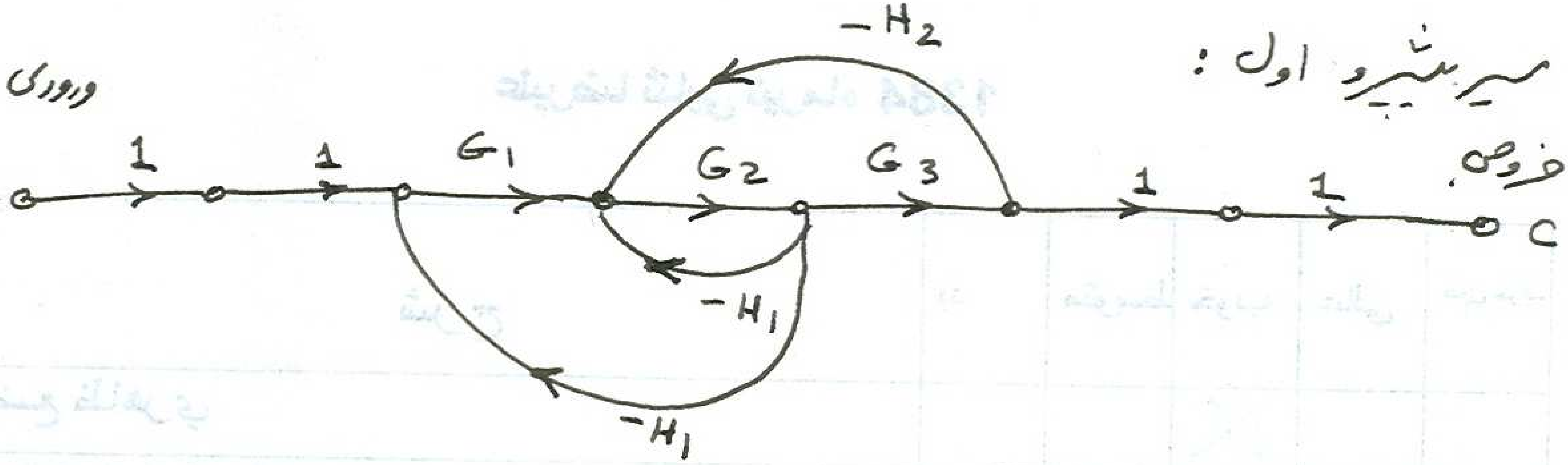


درگراف فوق :

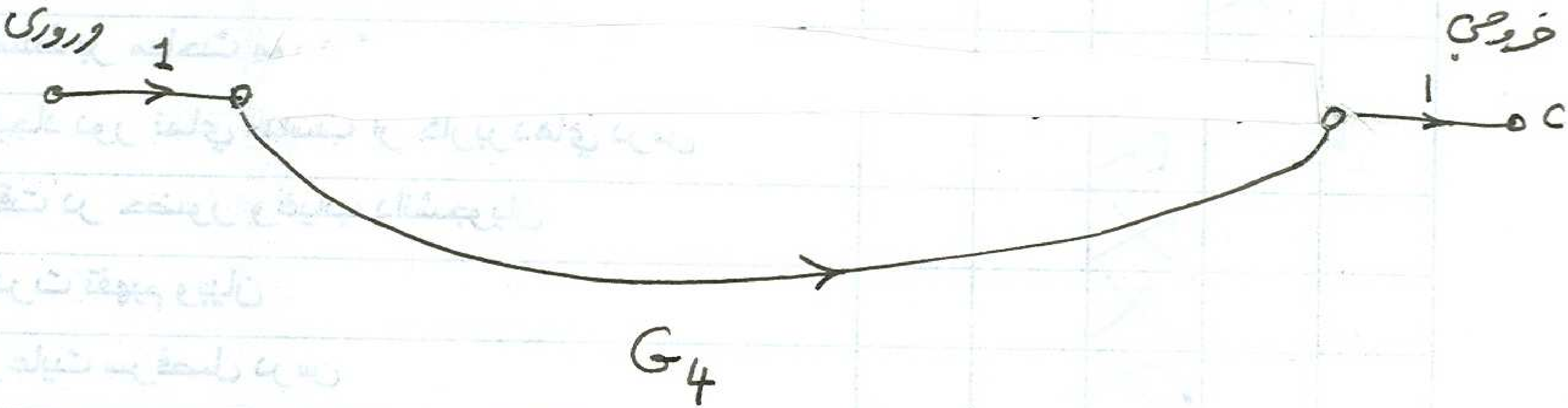
تعداد مسیرهای پیشرو = ۲

$$M = \sum_{K=1}^{N} \frac{M_K \Delta_K}{\Delta}$$

مسیر پیشرو اول :



مسیر پیشرو دوم :



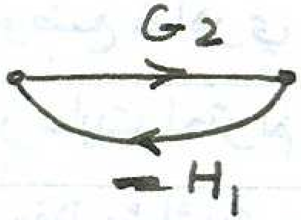
$$M = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} + \frac{M_2 \Delta_2}{\Delta}$$

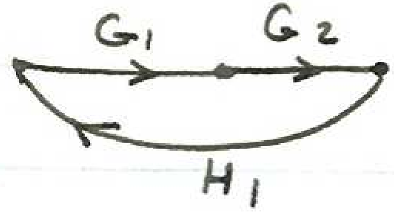
۱ـ محاسبه بهره مسیرهای پیشرو

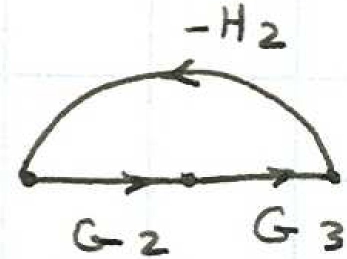
$$M_1 = G_1 G_2 G_3$$

$$M_2 = G_4$$

۲ـ محاسبه بهره حلقه‌ها







۳ـ محاسبه Δ_K:
حلقه یا حلقه‌ها مجزا وجود ندارند

$$\Delta_K = 1 - (0) = 1$$

$$\Delta = 1 - (\text{مجموع بهره‌های تک‌تک حلقه‌ها}) + \ldots$$

$$\Delta = 1 - (-G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2)$$

$$M = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} + \frac{M_2 \Delta_2}{\Delta}$$

یادآوری:

Δ_k : Δ ی قسمتی از گراف که از مسیر پیش رو K ام مجزا است

* در این شکل مسیر پیش رو دوم کاملاً از مسیر اول مجزا است. هیچ حلقه ای با گره های مسیر دوم تماس ندارد.
پس $\Delta_2 = \Delta$

* در مسیر اول همه حلقه ها با مسیر تماس دارند پس

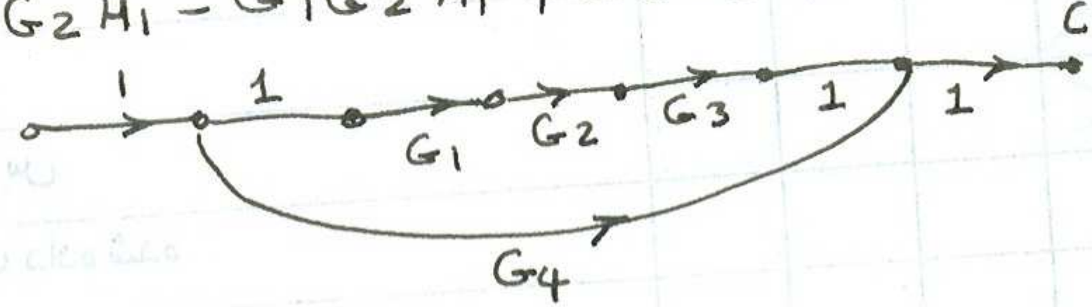
$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - (-G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2)$$

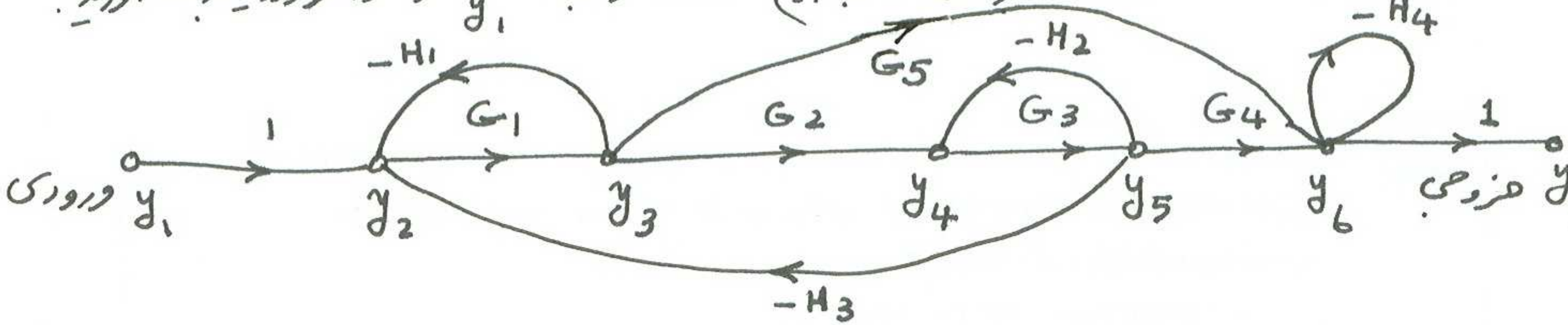
$M_1 = G_2 G_3 G_1$ بهره مسیر پیشرو اول

$M_2 = G_4$ بهره مسیر پیشرو دوم

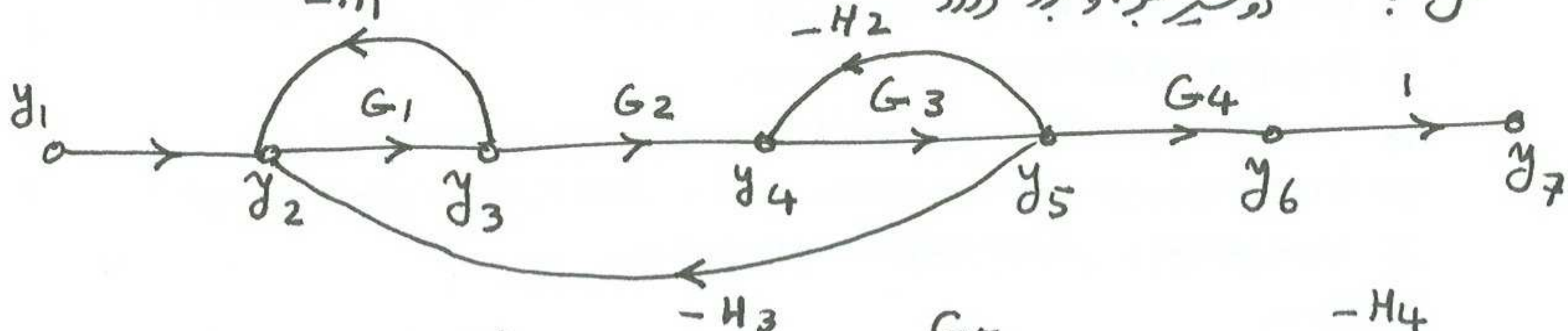
$$M = \frac{G_2 G_3 G_1 \times 1 + G_4 (1 + G_2 H_1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2)}{1 + G_2 H_1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$

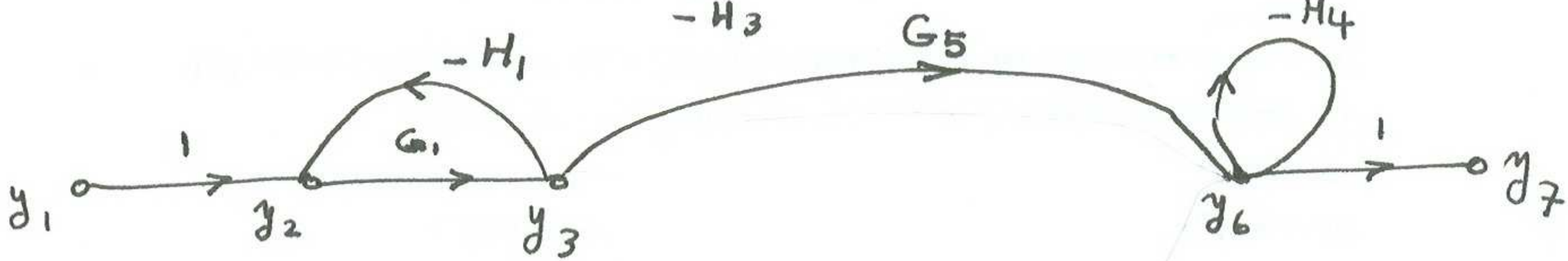


مثال : با استفاده از فرمول میسون کل رابطه بین ورودی و خروجی $\frac{y_6}{y_1}$ را در سیگنال فلو گراف زیر بدست آورید.



حل : دو مسیر مجزا وجود دارد





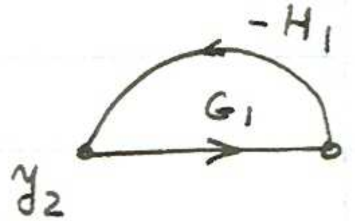
$$M = \sum_{K=1}^{N} \frac{M_K \Delta_K}{\Delta}$$ دو مسیر وجود دارد $N=2$ $$\Rightarrow M = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} + \frac{M_2\Delta_2}{\Delta}$$

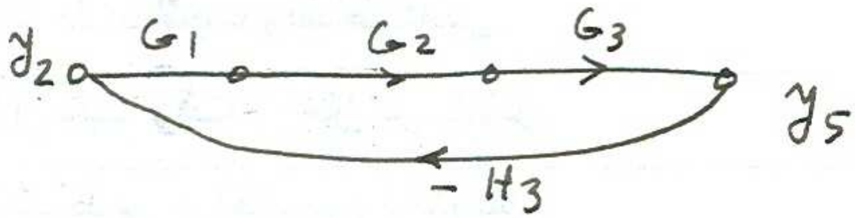
۱- محاسبه بهره در مسیرهای پیشرو

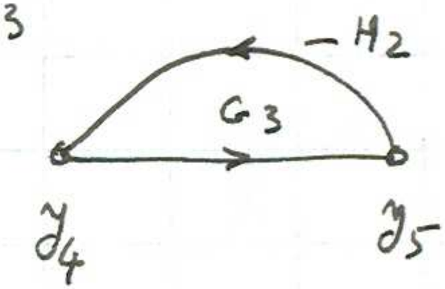
مسیر اول $M_1 = G_1G_2G_3G_4$

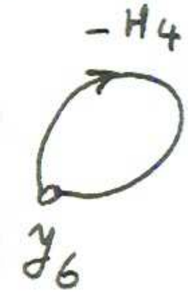
مسیر دوم $M_2 = G_1G_5$

۲- محاسبه بهره حلقه‌ها







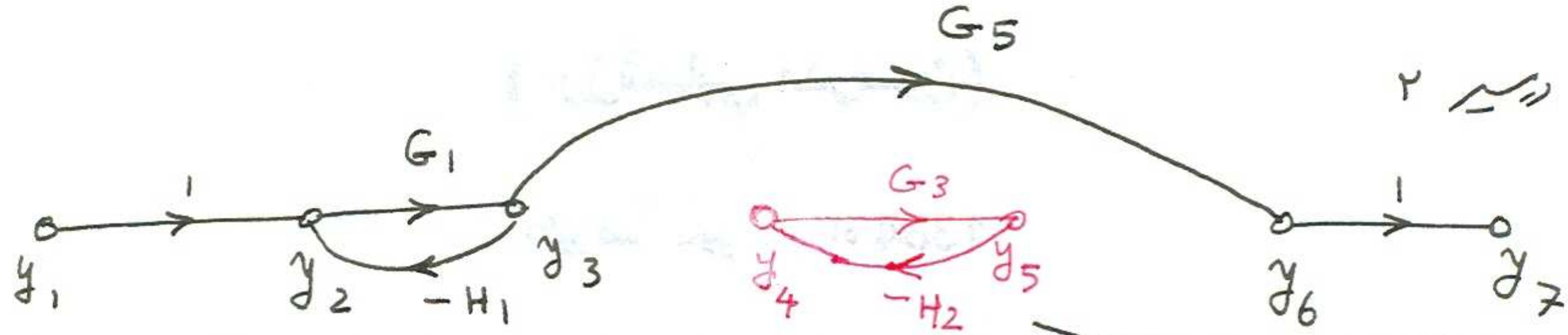


$-G_1H_1$, $-G_1G_2G_3H_3$, $-G_3H_2$, $-H_4$

۳- محاسبه Δ_K در مسیرها: در مسیر یک قسمتی از گراف وجود ندارد که از این مسیر (مسیر یک) مجزا باشد همه‌ی قسمت‌ها به مسیر یک اتصال دارند پس

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

محاسبه Δ_K: مسیر ۲



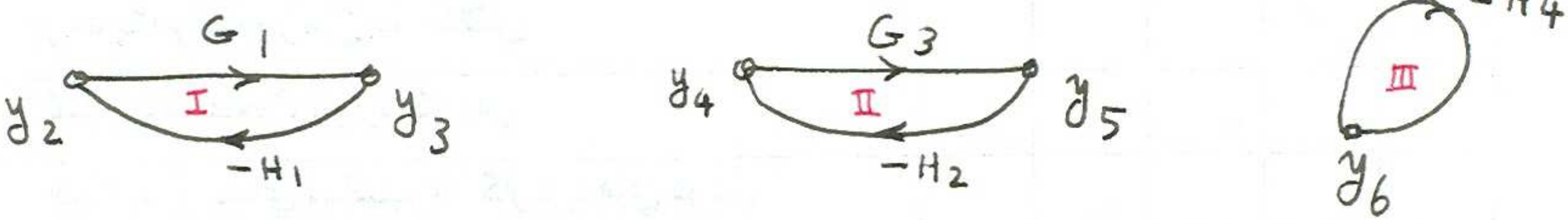
قسمتی از گراف کلی که از مسیر ۲ مجزا می‌باشد (با آن تماسی ندارد)

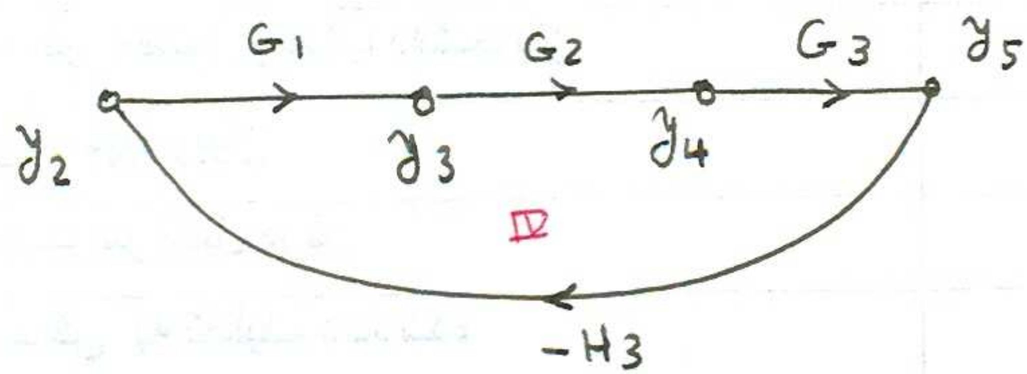
$$\Delta_2 = 1 - (\underline{-G_3H_2}) = 1 + G_3H_2$$

Δ قسمت مجزا شده از مسیر ۲ (قسمتی که با مسیر پیشرو ۲ تماس ندارد)

۴ - محاسبه Δ

برای محاسبه Δ ابتدا باید حلقه های مجزا را تشخیص دهیم





$$\Delta = 1 - \text{مجموع بهره های یکایک حلقه‌ها} + \text{مجموع حاصل‌ضرب بهره‌های همه ترکیبات ممکن هر دو حلقه مجزا} - \text{مجموع حاصل‌ضرب بهره های همه ترکیب های ممکن هر سه حلقه مجزا} + \cdots$$

$$\Delta = 1 - (-G_1H_1 - G_3H_2 - G_1G_2G_3H_3 - H_4) + [-G_1H_1 \times (-G_3H_2)$$

حاصل‌ضرب هر دو حلقه مجزا

I × II

$$+ (-G_1H_1 \times (-H_4)) + (-G_1G_2G_3(-H_3)) \times (-H_4)]$$

حاصل‌ضرب هر دو حلقه مجزا

I × III

II × III

$$-G_3H_2(-H_4) +$$

حاصل‌ضرب هر دو حلقه مجزا

III × IV

$$- [G_1(-H_1)G_3(-H_2)(-H_4)]$$

حاصل‌ضرب هر سه حلقه مجزا

I × II × III

$$\Delta = 1 + G_1H_1 + G_3H_2 - G_1G_2G_3H_3 + H_4 + G_3H_2H_4$$

$$G_1H_1G_3H_2 + G_1H_1H_4 + G_1G_2G_3H_3H_4$$

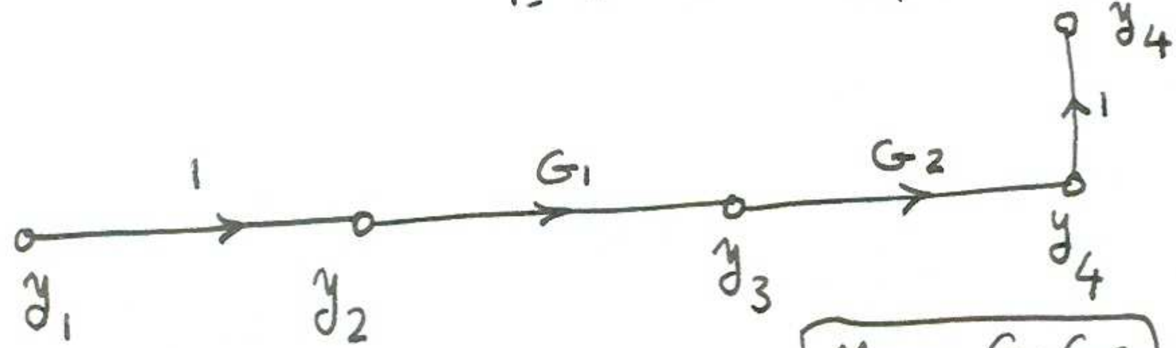
$$+ G_1G_3H_1H_2H_4$$

$$\frac{y_6}{y_1} = \frac{y_7}{y_1} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4 \times 1 + G_1G_5(1 + G_3H_2)}{1 + G_1H_1 + G_3H_2 - G_1G_2G_3H_3 + H_4 + G_1H_1G_3H_2 + G_3H_2 \; G_1H_1H_4 + G_1G_2G_3H_3H_4 + G_1G_3H_1H_2H_4}$$

در مثال قبل با استفاده از فرمول بهره کل رابطه بین ورودی و خروجی $\frac{y_4}{y_1}$ را بدست آورید.

حل: در صورتیکه y_4 خروجی باشد تنها یک مسیر پیشرو به صورت زیر داریم



$$M = \frac{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}{\Delta}$$

۱- بهره در مسیر پیشرو

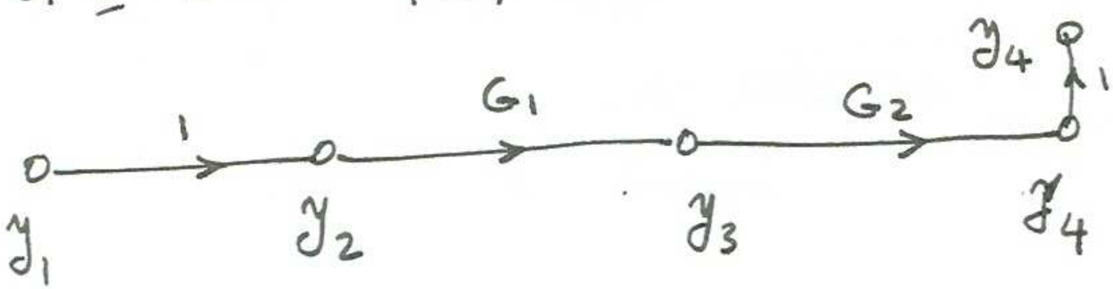
۲- محاسبه بهره حلقه‌ها

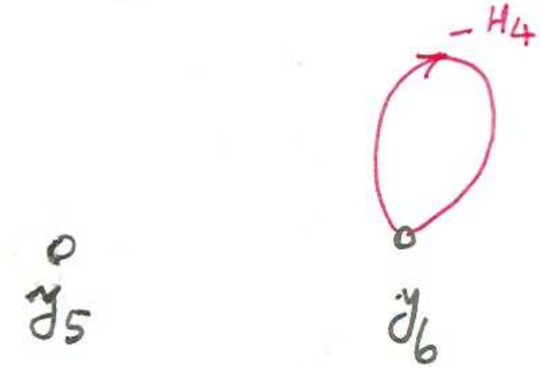
۳- محاسبه Δ_K

$$\boxed{M_1 = G_1 G_2}$$

در این حالت لازم نداریم چون قبلاً Δ محاسبه شده است

در اینجا چون یک مسیر داریم باید Δ_1 را محاسبه کنیم. باید ببینیم چه قسمتی از گراف اصلی را داریم که از این مسیر پیشرو مجزا است (با این مسیر ارتباطی ندارد)





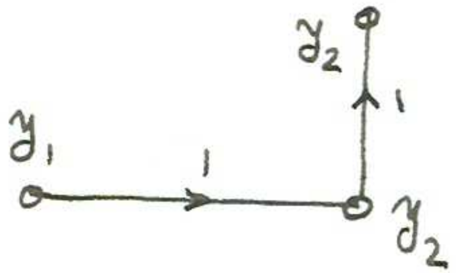
$$\Delta_1 = 1 - (-H4) = 1 + H4$$

۴- Δ در مثال قبل محاسبه شده است

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1 G_2 \times (1 + H4)}{\Delta}$$

در مثال قبل با استفاده از بهره کل (فرمول) رابطه بین ورودی و خروجی $\frac{y_2}{y_1}$ را بدست آورید.

حل: در صورتیکه y_2 را خروجی بگیریم تنها یک مسیر پیشرو و به صورت زیر داریم

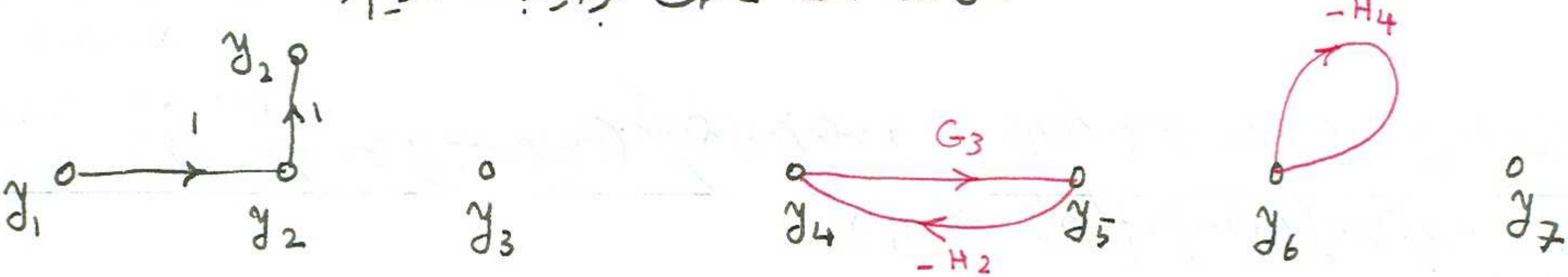


$$M = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_k \Delta_k}{\Delta} \qquad M_k = 1$$

۱- محاسبه بهره مسیر پیشرو $\qquad M_k = 1$

۲- محاسبه بهره حلقه $\qquad$ چون قبلاً Δ محاسبه شده است نیازی نداریم

۳- محاسبه Δ_k $\qquad$ در اینجا چون یک مسیر پیشرو داریم باید ببینیم چه قسمتی از گراف کلی با این مسیر تماسی ندارد آنگاه Δ قسمت مجزا را بدست آوریم.



$$\Delta_1 = 1 - \left(G_3(-H_2) + (-H_4) \right) + \left(G_3(-H_2) \times (-H_4) \right)$$

$$= 1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4 \quad \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1 \times (1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4)}{\Delta}$$

بدست آوردن نسبت گره خروجی به گره های غیر ورودی

در روشهای قبل گاهی رابطه خروجی با گره هائی که ورودی نیستند مورد نظر است در اینصورت. مثلاً اگر رابطه بین گره خروجی و گره ۲ را بخواهیم به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$\frac{y_{out}}{y_2} = ?$$

$$\frac{y_{out}}{y_2} = \frac{\dfrac{y_{out}}{y_{in}}}{\dfrac{y_2}{y_{in}}} = \frac{\dfrac{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}{\Delta}}{\dfrac{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}{\Delta}}$$

از گره y_{in} تا y_{out}

از y_{in} تا y_2

$$\frac{y_{out}}{y_2} = \frac{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}$$

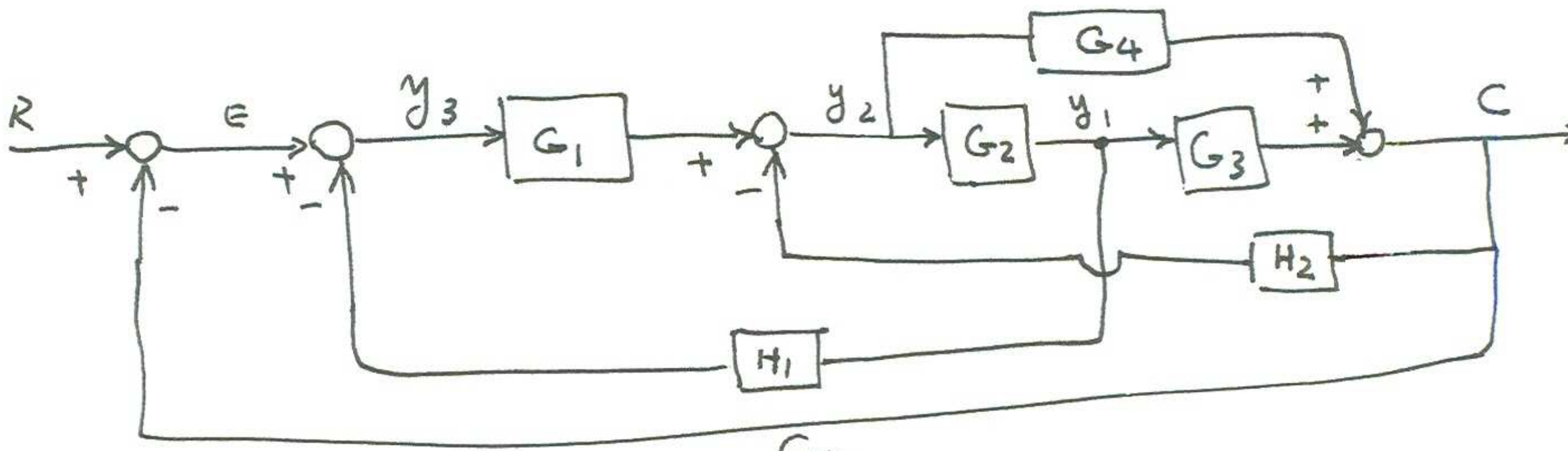
برای ورودی کل تا خروجی

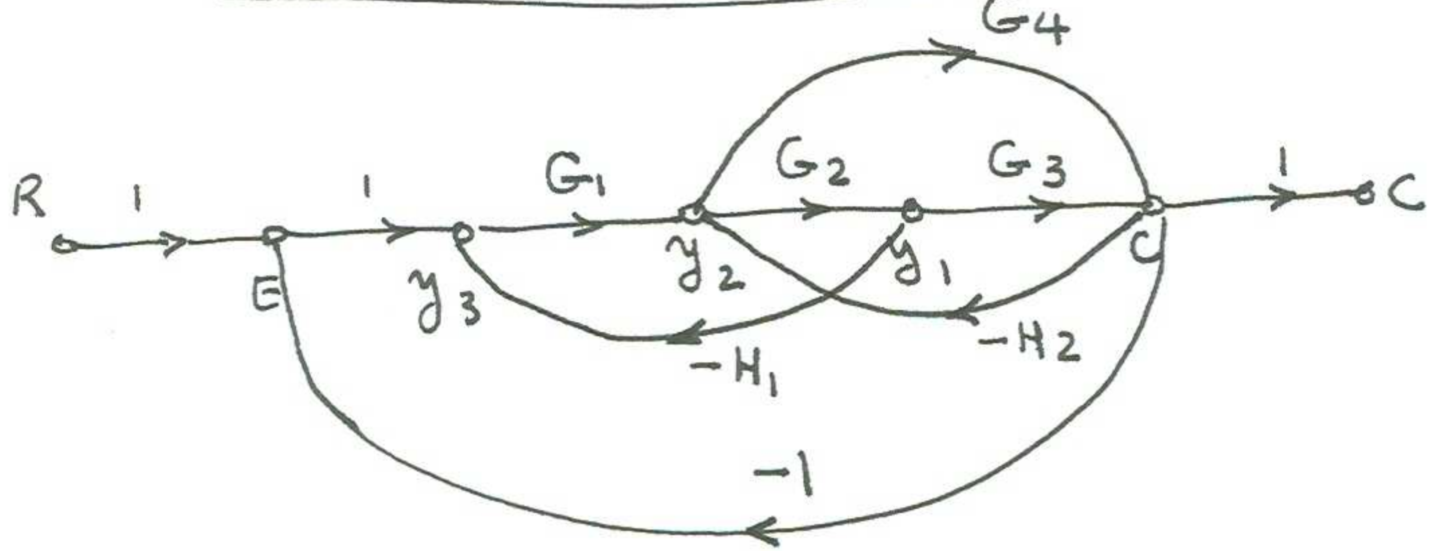
برای ورودی تا y_2

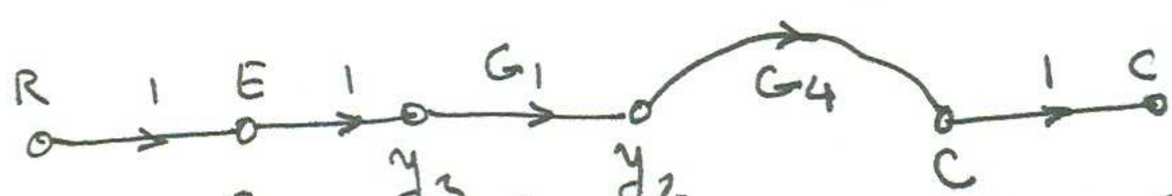
در مثال قبل اگر y_7/y_2 را بخواهیم

$$\frac{y_2}{y_7} = \frac{\dfrac{y_7}{y_1}}{\dfrac{y_2}{y_1}} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{1+G_3H_2+H_4+G_3H_2H_4}$$

مثال: گراف عبور سیگنال دیاگرام بلوکی زیر را ترسیم نموده رابطه بین ورودی و خروجی را بدست آورید







مسیر پیشرو ۲ :

" " : 1

حل :

$$M = \frac{\sum_{K=1}^{N} M_K \Delta_K}{\Delta}$$

در این شکل : $M = \frac{C}{R} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta}$

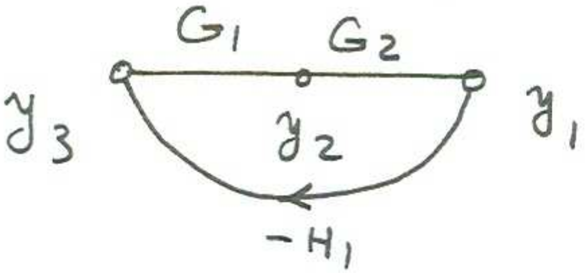
۱ - محاسبه بهره مسیرهای پیشرو

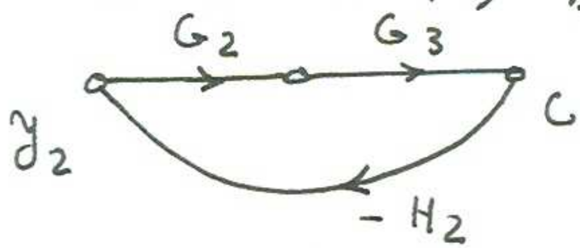
$M_1 = G_1G_2G_3$

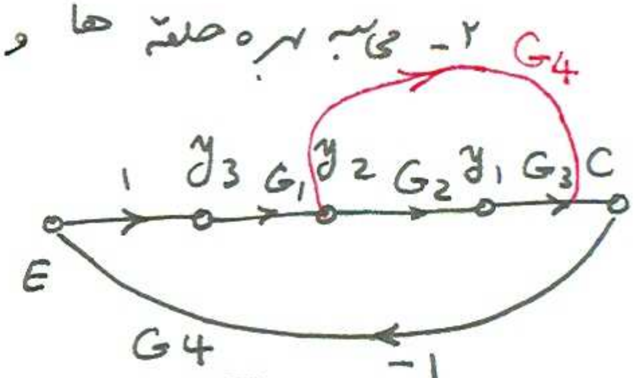
$M_2 = G_1G_4$

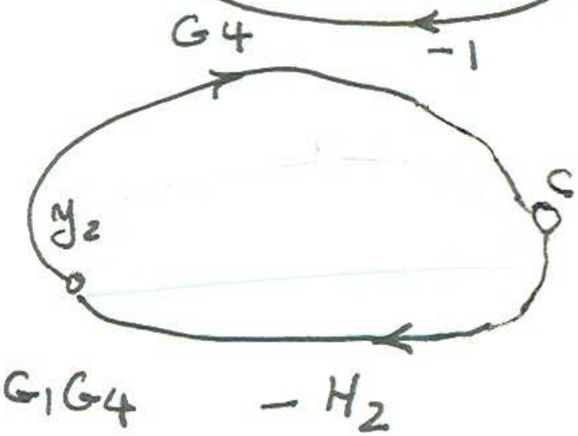
۲ - محاسبه بهره حلقه ها و Δ

(جمعاً ۵ حلقه وجود دارد)









$$\Delta = 1 - (-G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3 - G_4H_2 - G_1G_4H_1)$$

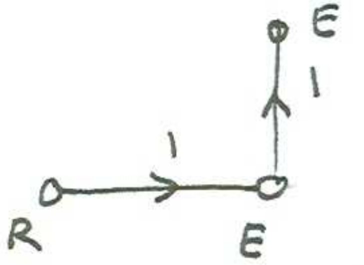
$$\Delta = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$$

۳- محاسبه Δ_K : هر دو Δ برابر 1 می باشند چون در هر دو مسیر حلقه مجزائی نداریم

$$\frac{C}{R} = M = \frac{G_1G_2G_3 \times 1 + G_1G_4 \times 1}{\Delta}$$

مثال: در مثال قبل با استفاده از فرمول بهره کلی در گراف عبور سیگنال نسبت $\frac{E}{R}$ را بدست آورید

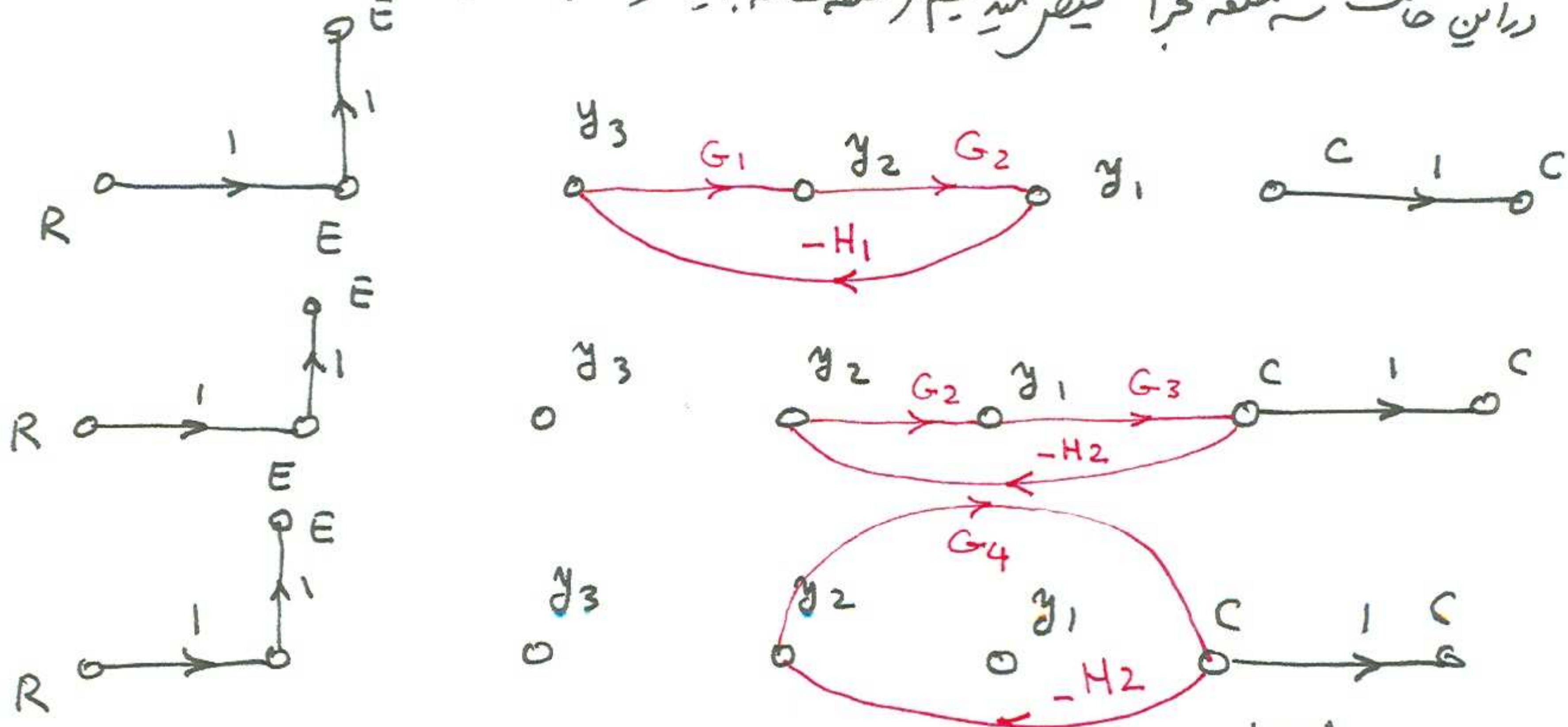
حل: درصورتیکه E را خروجی بگیریم تنها یک مسیر پیشرو به صورت زیر خواهیم داشت:



$$M = \frac{E}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} \qquad M_1 = 1$$

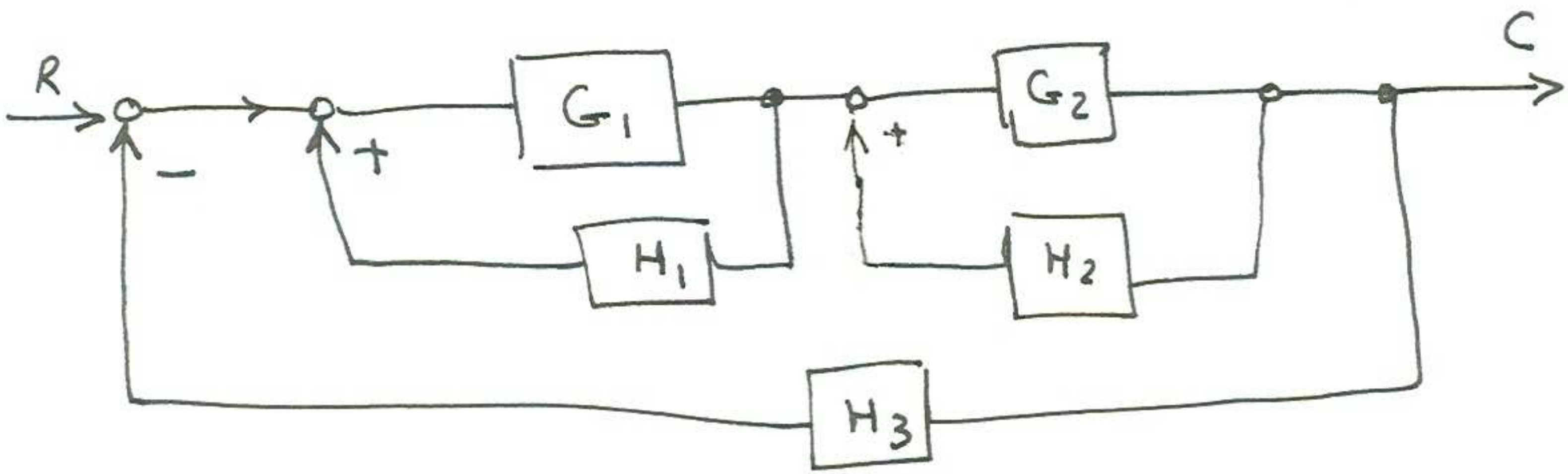
محاسبه Δ_1:

در این حالت سه حلقه مجزا تشخیص میدهیم (حلقه‌هائی که با این مسیر ارتباط ندارند)



$$\Delta_1 = 1 - (-G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_4H_2) \Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{1 \times \Delta_1}{\Delta}$$

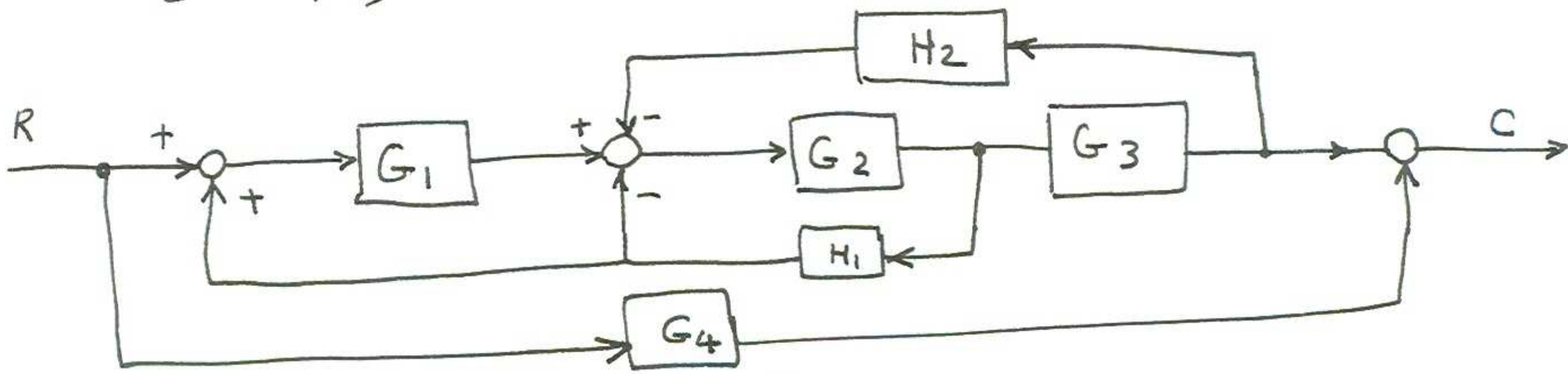
مثال: با استفاده از گراف عبور سیگنال و فرمول کلی بهره تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید



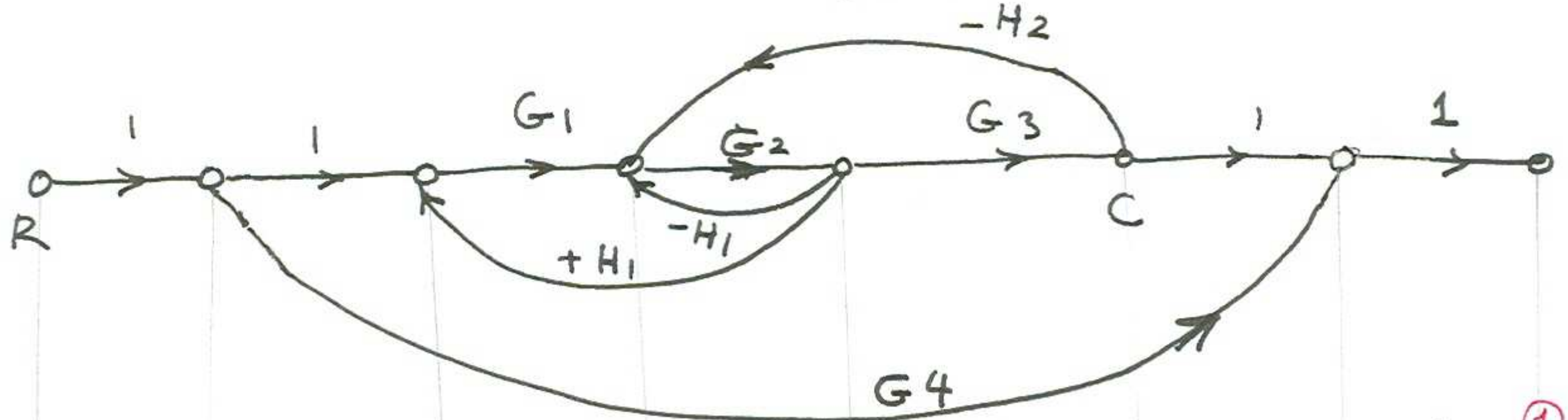
$$\frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 \times 1}{1-(G_1H_1+G_2H_2-G_1G_2H_3)+G_1H_1G_2H_2}$$

با استفاده از روش ساده کردن دیاگرام بلوکی هم میتوان به این نتیجه رسید.

مثال : با استفاده از فرمول کلی گراف عبور سیگنال تابع تبدیل حلقه باز سیستم زیر را بدست آورید



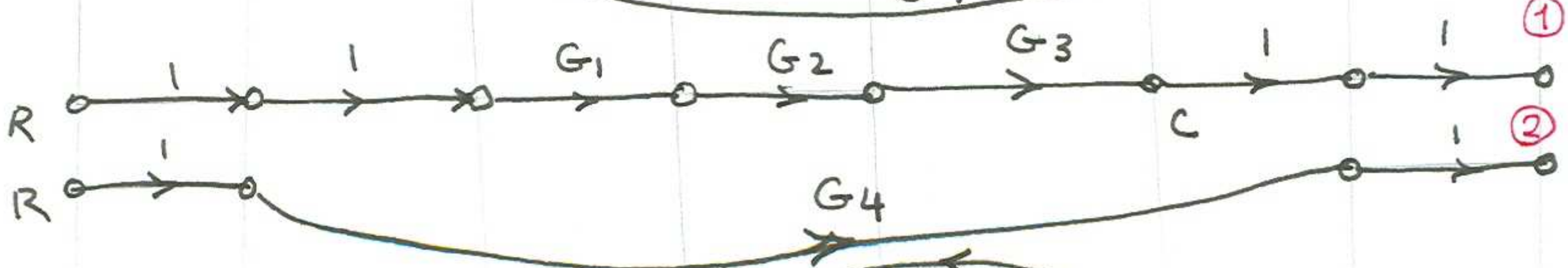
حل :



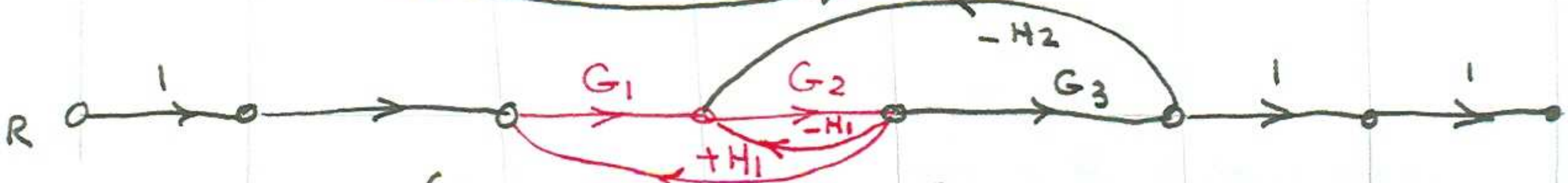
$M_1 = G_1G_2G_3$

$M_2 = G_4$

$\Delta_1 = 1$



① ② دو مسیر پیشرو



حلقه مجزا از مسیر پیشرو ②

$\Delta_2 = 1 - (G_1G_2H_1 - G_2H_1 - G_2G_3H_2) = \Delta$

$$\frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 \times 1 + G_4 (1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2)}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}}$$

یادآوری می‌شه Δ :

در کل گراف سه حلقه تشخیص داده می‌شود. حلقه‌ی مجزائی جز در مسیر پیشرو ۲ نداریم پس :

$$\Delta = 1 - (\text{مجموع حاصل‌ضرب بهره تک‌تک حلقه‌ها}) + \cdots$$

$$\Delta = 1 - (G_1 G_2 H_1 - G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2)$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که Δ_2 در این حالت ۰. Δ برابر است

نمودارهای حالت

نمودارهای حالت

* معادلات دیفرانسیل و معادلات حالت را میتوان به صورت نمودار گذر سیگنال نمایش داد و از این طریق رابطه بین معادله های حالت ، تابع تبدیل سیستم و شبیه سازی کامپیوتری برقرار میشود .

* برای رسم نمودارهای حالت تمام قواعد گراف عبور سیگنال بکار بسته میشود

* در خصوص انتگرال گیری در رسم گراف عبور سیگنال باید توجه داشت که اگر داشته باشیم

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau)\, d\tau + x_1(t_0)$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}\left[\int_{t_0}^{t} x_2(\tau)\, d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t x_2(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_0} x_2(\tau)\, d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} - \mathcal{L}\left[\int_0^{t_0} x_2(\tau)\,d\tau\right] + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

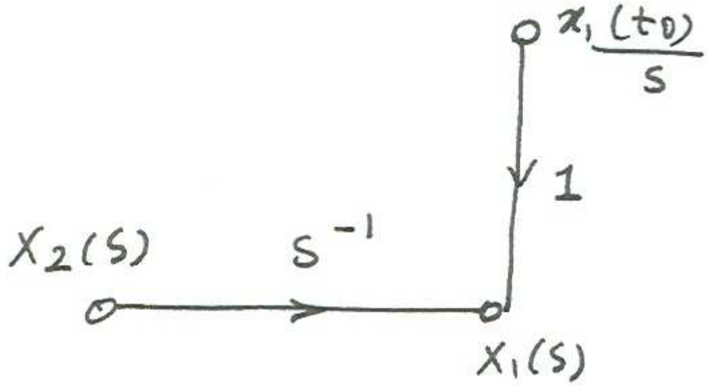
فرض می‌کنیم که در حالت از $t_0 = \tau$ آغاز گردیده باشد بنابراین $0 < \tau < t_0$ و چون سیستم علّی

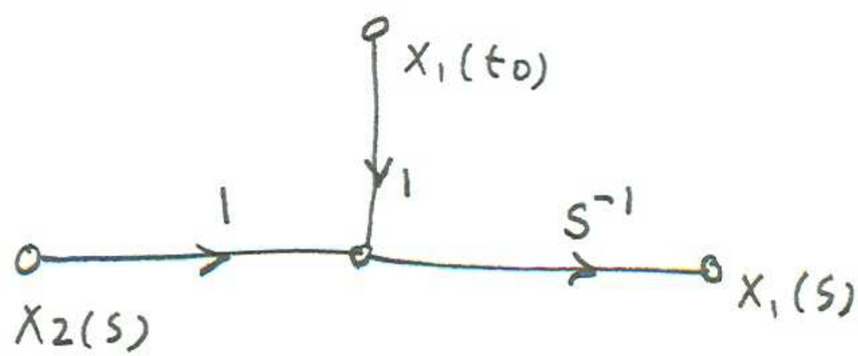
می‌باشد یعنی قبل از اعمال ورودی نمی‌تواند خروجی داشته باشد بنابراین (Casual)

$x_2(\tau) = 0$

$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

یعنی خروجی انتگرال‌گیر برابر است با حاصل‌ضرب ورودی در s^{-1} به علاوه شرایط اولیه $\frac{x_1(t_0)}{s}$.





مزایای رسم نمودارهای حالت

۱- مستقیماً از معادلات دیفرانسیل می‌توان نمودارهای حالت را رسم نموده معادلات حالت را بیان متغیرهای حالت بدست می‌گردد

۲- نمودار حالت را می‌توان به کمک تابع تبدیل سیستم ترسیم نمود

۳- با استفاده از نمودارهای حالت و با استفاده از کامپیوترهای آنالوگ سیستم را تجزیه و تحلیل نمود

۴- " " " " " سیستم را تجزیه و تحلیل عددی نمود

۵- معادله گذر حالت در حوزه تبدیل لاپلاس را می‌توان به کمک فرمول بهره کلی گذر سیگنال از نمودار حالت بدست آورد

۶- با استفاده از نمودار حالت می‌توان تابع تبدیل سیستم را بدست آورد

۷- معادله‌های حالت و معادله‌های خروجی را می‌توان از نمودار حالت بدست آورد

بدست آوردن نمودار حالت از معادله دیفرانسیل

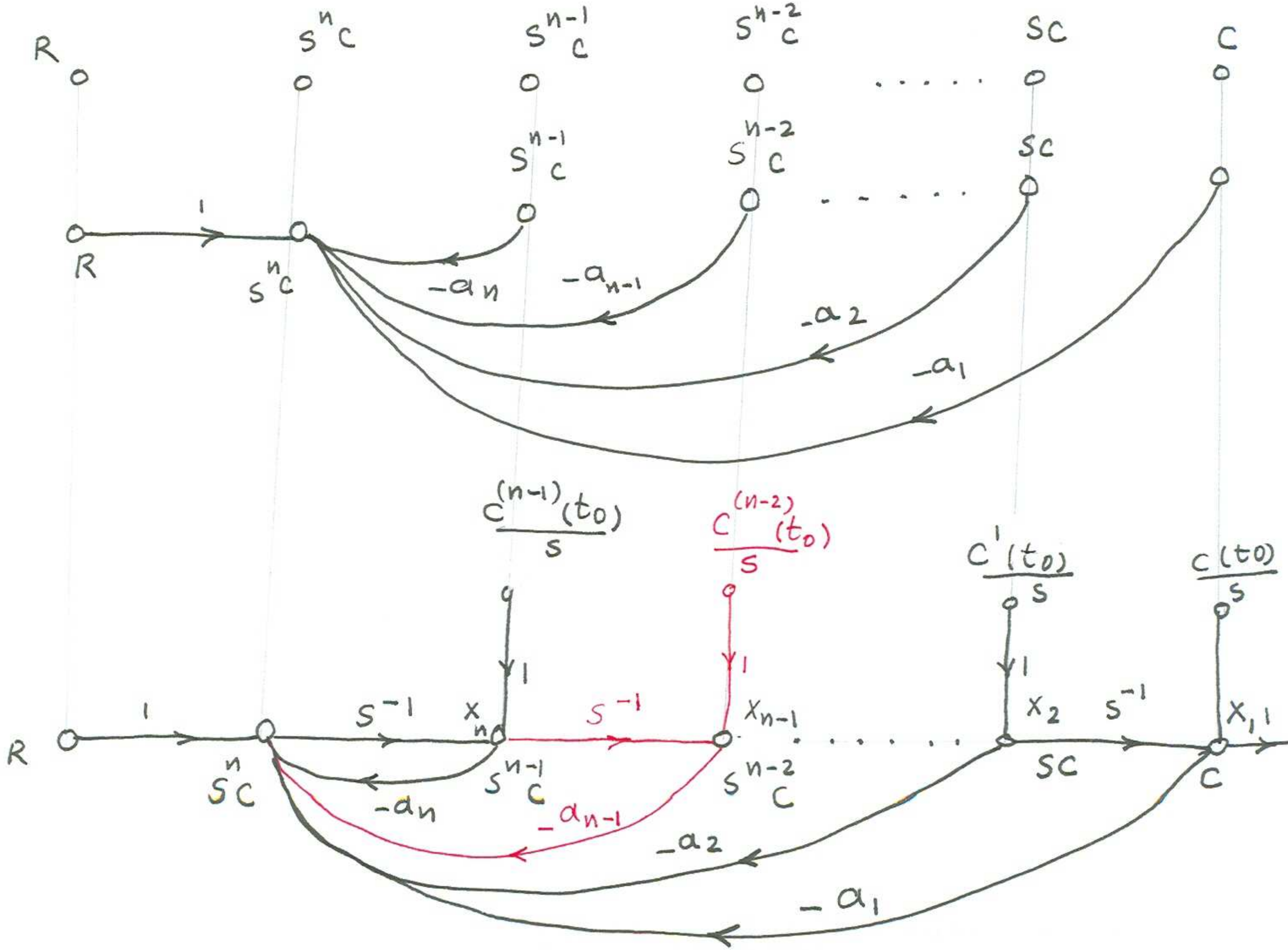
معادله دیفرانسیل خطی درجه n ام زیر را در نظر میگیریم :

$$\frac{d^n c}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_2 \frac{dc}{dt} + a_1 c = r(t)$$

$$\frac{d^n c}{dt^n} = -a_n \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} - \cdots\cdots - a_2 \frac{dc}{dt} - a_1 c + r(t)$$

برای رسم گراف عبور سیگنال این معادله دیفرانسیل ابتدا تبدیل لاپلاس طرفین را در نظر گرفته و گره ها را به صورت زیر از چپ به راست مشخص می کنیم .

$$\overset{\circ}{R} \qquad \overset{\circ}{s^n c} \qquad \overset{\circ}{s^{n-1} c} \qquad \overset{\circ}{s^{n-2} c} \quad \cdots\cdots \quad \overset{\circ}{sc} \qquad \overset{\circ}{c}$$



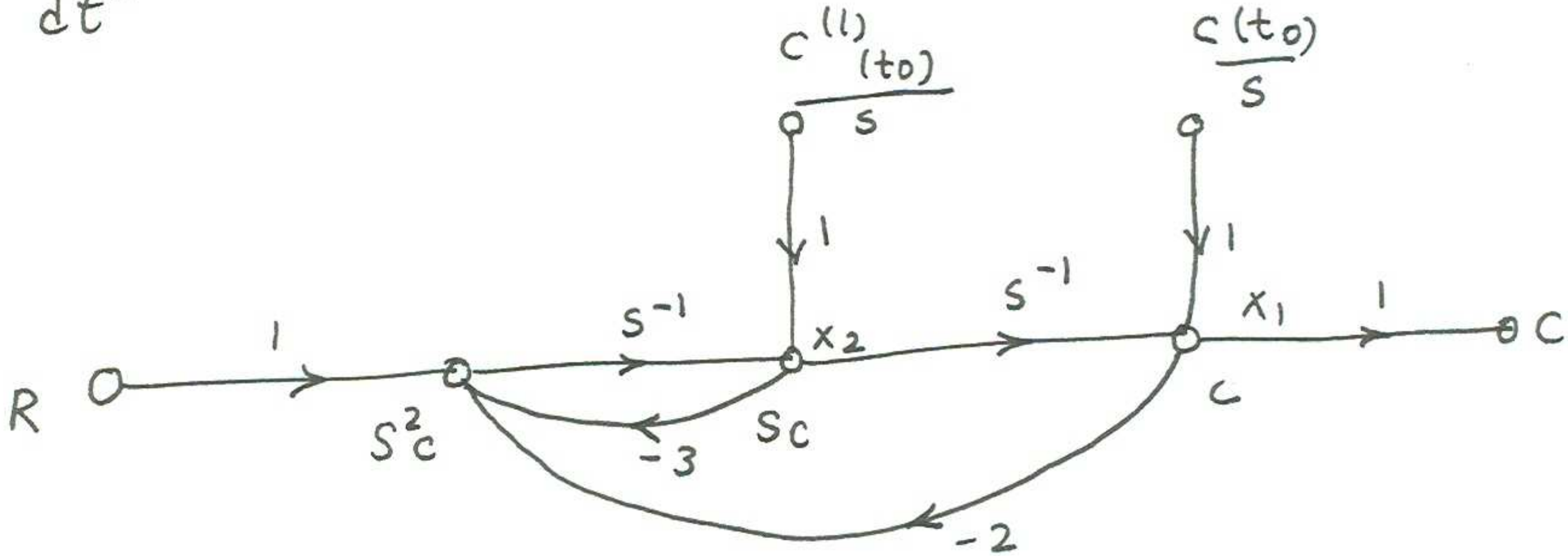
R
$s^n c$
$s^{n-1} c$
$s^{n-2} c$
sc
c
1
$-a_n$
$-a_{n-1}$
$-a_2$
$-a_1$
$\frac{c^{(n-1)}(t_0)}{s}$
$\frac{c^{(n-2)}(t_0)}{s}$
$\frac{c'(t_0)}{s}$
$\frac{c(t_0)}{s}$
s^{-1}
x_n
x_{n-1}
x_2
x_1

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با نمودار حالت نمایش دهید. سپس تابع تبدیل این سیستم را بدست آورید

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2C(t) = r(t)$$

* همه ورودیهای دیگر و شرائط اولیه را صفر قرار میدهیم

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = -3\frac{dc(t)}{dt} - 2C(t) + r(t)$$

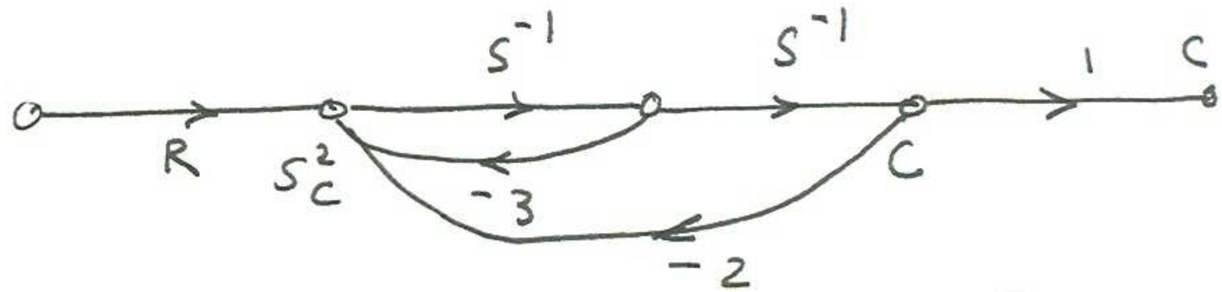


A1

بدست آوردن تابع تبدیل :

برای بدست آوردن تابع تبدیل تمام شرائط اولیه را برابر صفر میگیریم. سپس با استفاده از فرمول بهره کلی در گراف عبور سیگنال تابع تبدیل سیستم را که عبارتست از $\frac{C}{R}$ بدست می آوریم.

$$M = \frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$$



$$M_1 = 1/s^2$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{3}{s} - 2\,\frac{1}{s} \times \frac{1}{s}\right) = 1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2}$$

$$M = \frac{C}{R} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{s^2} \times 1}{\frac{s^2 + 3s + 2}{s^2}}$$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}}$$

Slide 131

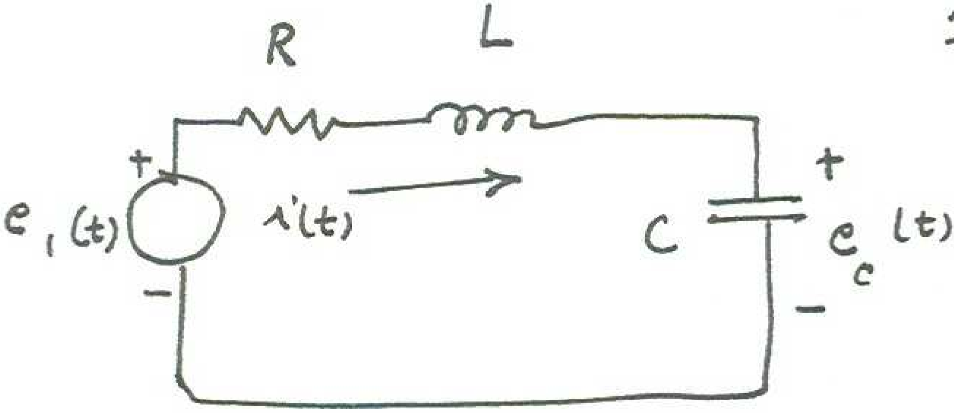
A1 Admin; 2008/04/26

گراف عبور سیگنال – معادلات دیفرانسیل

A2

گراف عبور سیگنال - معادلات دیفرانسیل

مثال: گراف عبور سیگنال مدار الکتریکی زیر را ترسیم نمایید



$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = e_1 - Ri - e_c \\ C\dfrac{de_c}{dt} = i \end{cases}$$

برای ترسیم گراف عبور سیگنال معادلات دیفرانسیل باید با استفاده از تبدیل لاپلاس آنها را به معادلات جبری تبدیل کنیم. (از اندیس‌های t و s صرفنظر شده است)

$$\frac{di}{dt} = \frac{e_1}{L} - \frac{Ri}{L} - \frac{e_c}{L}$$

$$SI = i(0) + \frac{1}{L}E_1 - \frac{R}{L}I - \frac{1}{L}E_c$$

$$SE_c = e_c(0) + \frac{1}{C}I(S)$$

متغیرهای ورودی عبارتند از:

$$E_1 \;,\; i(0) \;,\; e_c(0)$$

متغیرهای خروجی عبارتند از:

$$E_c \;,\; I$$

Slide 133

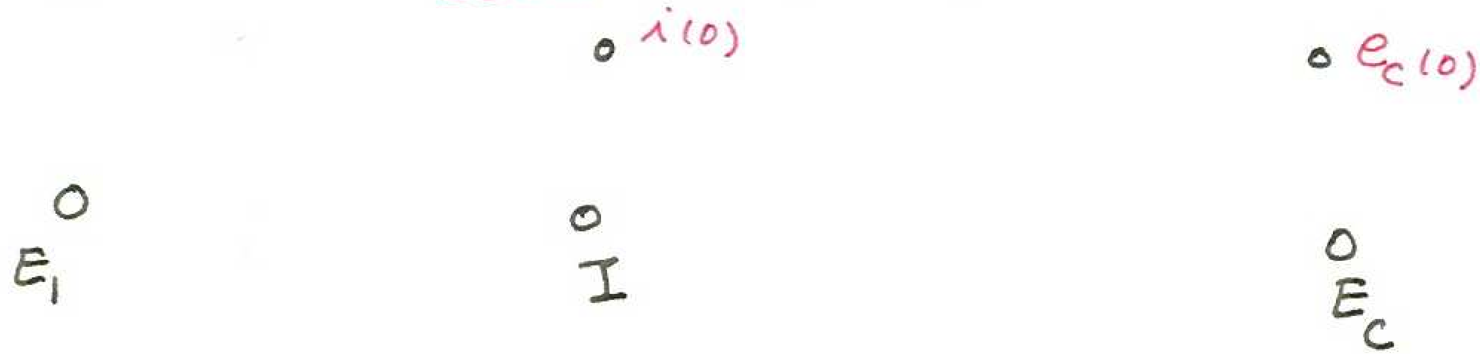
A2 Admin; 2008/04/26

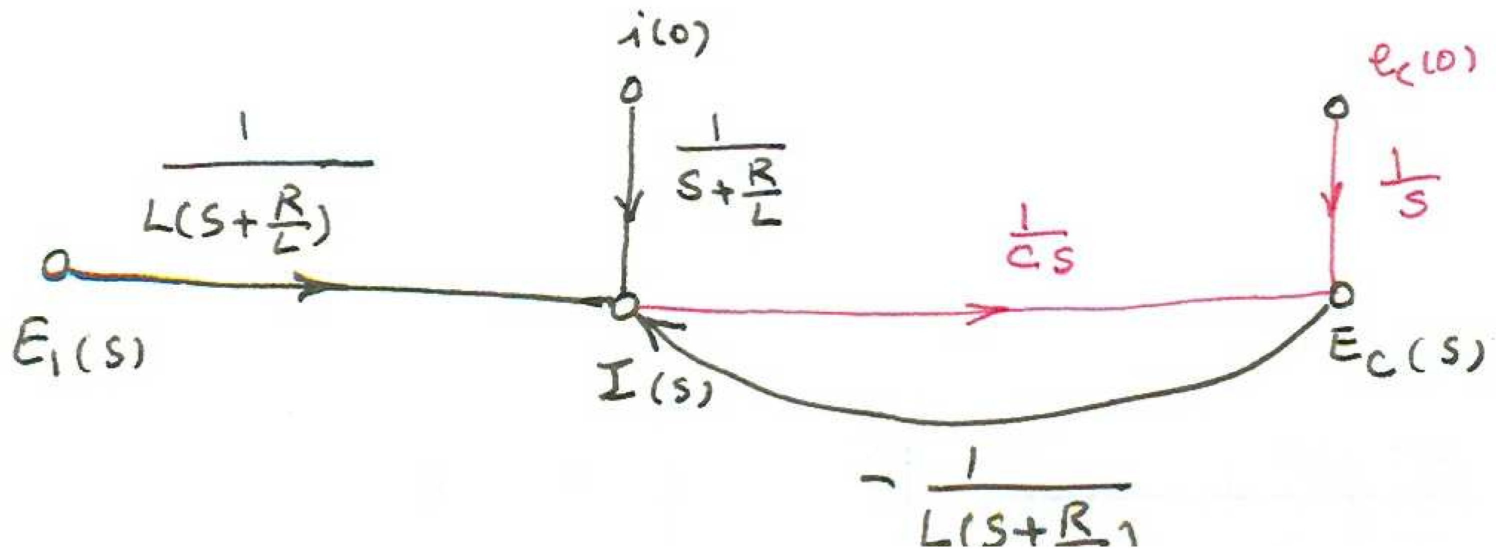
A3

از معادله اوّل I و از معادله دوم E_c را بدست می آوریم

$$I(s) = \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\, i(0) + \frac{1}{L(s+\frac{R}{L})}\, E_1 - \frac{1}{L(s+R/L)}\, E_c$$

$$E_c(s) = \frac{1}{s}\, e_c(0) + \frac{1}{Cs}\, I(s)$$





Slide 134

A3 Admin; 2008/04/26

روش دوم :   نمودارهای حالت

تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل را به صورت زیر داشتیم :

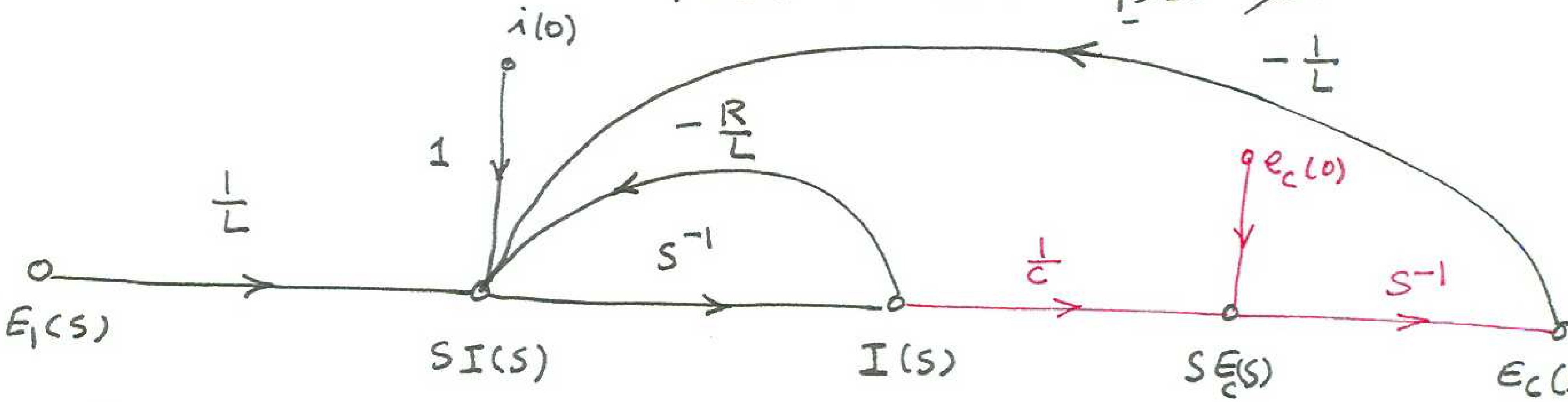
$$SI(s) = i(0) + \frac{1}{L}E_1 - \frac{R}{L}I - \frac{1}{L}E_c$$

$$SE_c(s) = e_c(0) + \frac{1}{C}I(s)$$

$$I(s) = S^{-1}(I(s))$$

$$E_c(s) = S^{-1}(E_c(s))$$

در این روش از متغیرهای $SI(s)$ و $SE_c(s)$ انتگرال میگیریم . آنها را در S^{-1} ضرب می کنیم .



علت اینکه نمودار حالت نامیده میشود این است که در آن از S^{-1} استفاده شده است و مستقیماً عمل انتگرالگیری صورت میگیرد.   مثل معادلات حالت (state space equations)

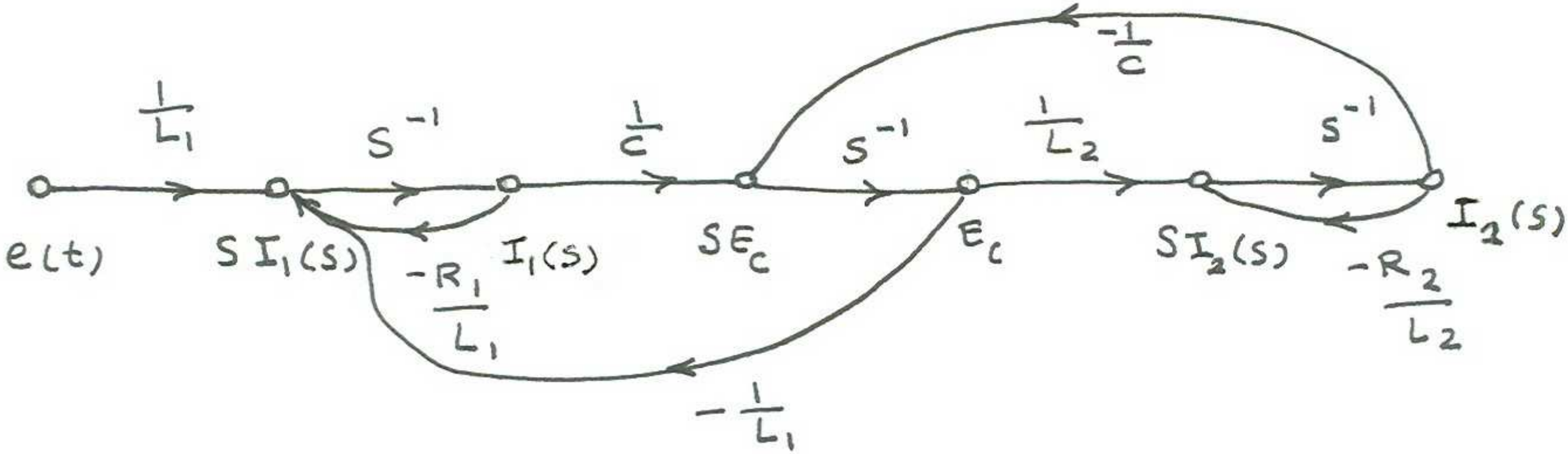
Slide 135

A4 Admin; 2008/04/26

A5

بدست آوردن تابع تبدیل‌های میان $I_1(s)$ ، $I_2(s)$ ، $E_c(s)$ و $E(s)$ با استفاده از نمودار حالت:

با استفاده از فرمول کلی بهره در گراف عبور سیگنال برای مثال قبل نسبت های زیر را پس از بدست آوردن تبدیل لاپلاس متغیرها به صورت زیر خواهیم داشت:



$$\frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{L_c C s^2 + R_2 C s + 1}{\Delta} \qquad \frac{I_2(s)}{E(s)} = \frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{L_2 s + R_2}{\Delta}$$

$$\Delta = L_1 L_2 C s^3 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) C s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) s + R_1 + R_2$$

Slide 136

A5 Admin; 2008/04/26

به دست آوردن معادلات حالت سیستم با استفاده از فلودار حالت

۱- تمام شرائط اولیه را حذف نموده شاخه های s^{-1} را از فلودار حالت حذف می کنیم. زیرا معادلات حالت شامل عملگر انتگرالگیری نمی باشند. ضمناً شامل شرائط اولیه نیز نمی باشد. کلیه از شرائط اولیه استفاده شده ماتریس ضرائب (A) می سازد. $\dot{x} = Ax + Bu$

۲- گره های خروجی عبارتند از گره هائی که مشتق های متغیرهای حالت را نشان میدهند

۳- ورودیها و متغیرهای حالت را به عنوان متغیرهای ورودی میگیریم.

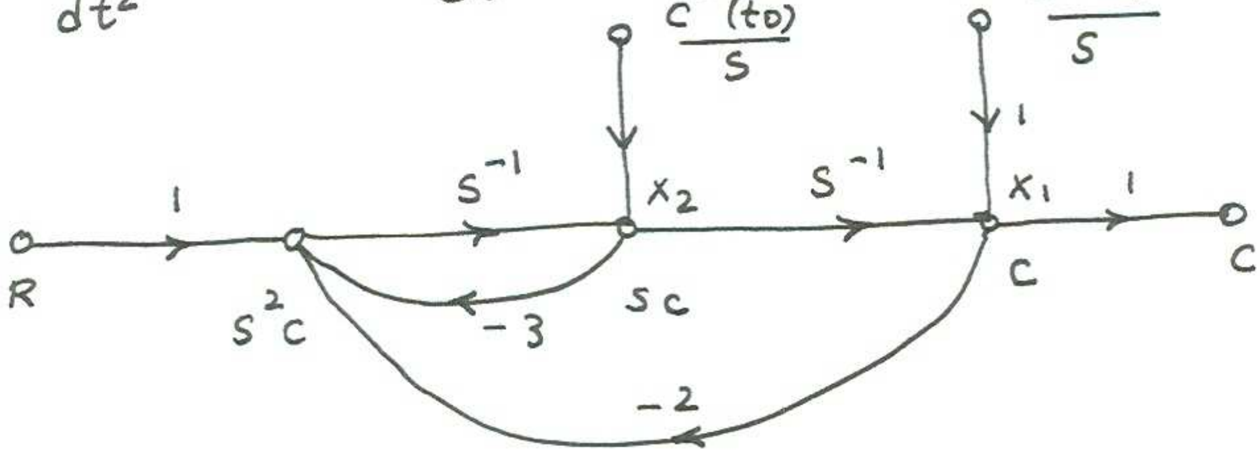
۴- از فرمول بهره کل در گراف عبور سیگنال نیز استفاده می کنیم

Slide 137

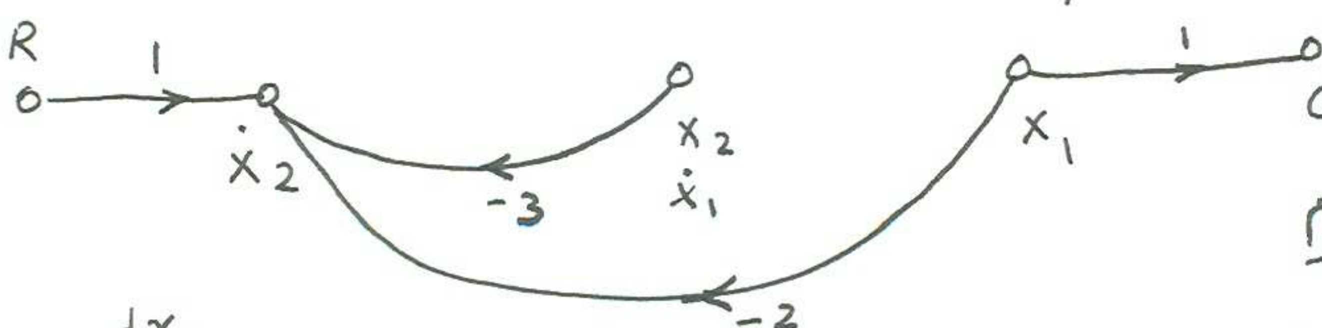
A6 Admin; 2008/04/26

مثال: برای بدست آوردن معادله های حالت معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از نمودار حالت آن بصورت زیر عمل می کنیم

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = -3\,\frac{dc(t)}{dt} - 2c(t) + r(t)$$



حل: ابتدا شاخه های مربوط به ورودی شرائط اولیه
و همچنین شاخه های s^{-1} را حذف می کنیم



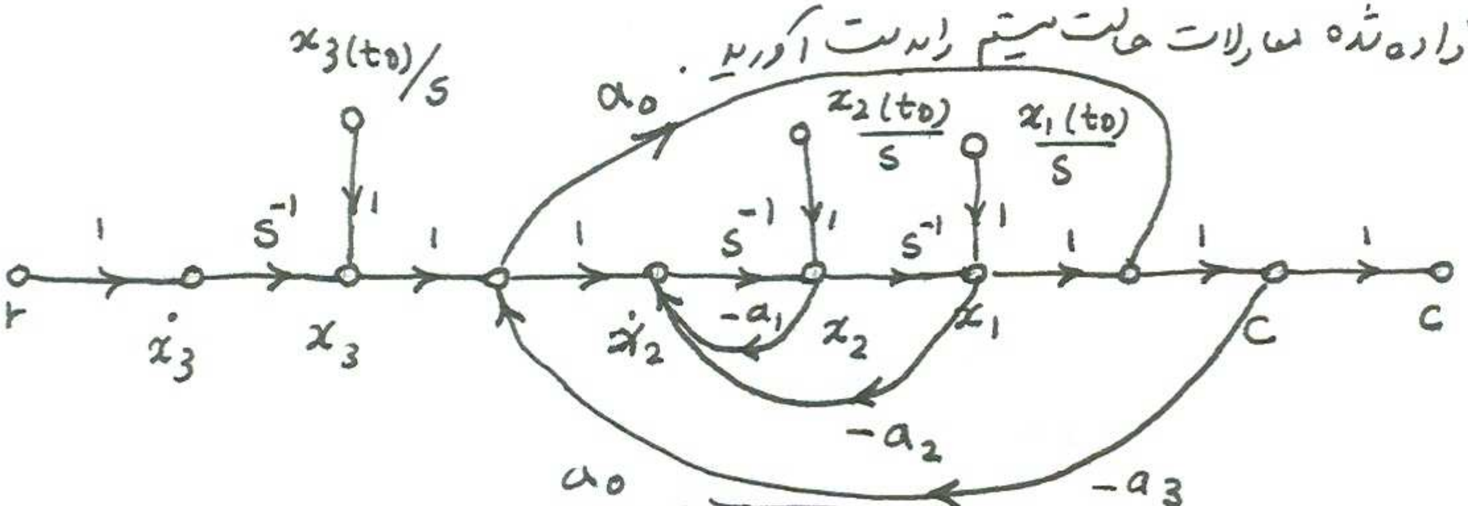
* گره های $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ خروجی
و r , x_1 و x_2 را ورودی میگیریم

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 + r(t)$$

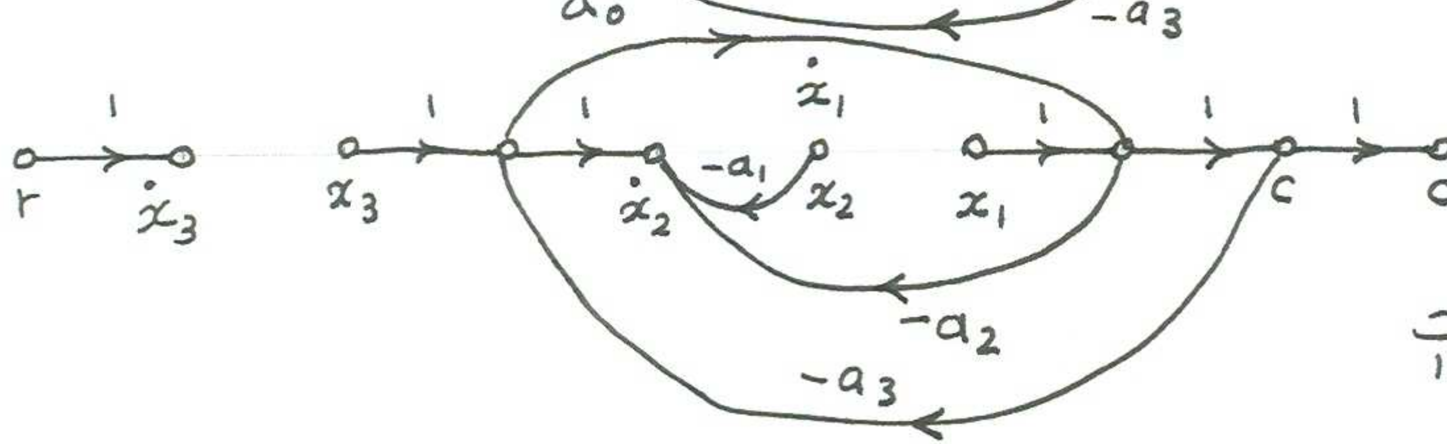
Slide 138

A7 Admin; 2008/04/26

مثال: با استفاده از نمودار حالت داده شده معادلات حالت سیستم را بدست آورید.



خروجی ها:



$\dot{x}_1$ هیچ ورودی ندارد پس

$\dot{x}_1 = 0$

$\dot{x}_3$ دارای یک ورودی است $1\,r(t)$

پس

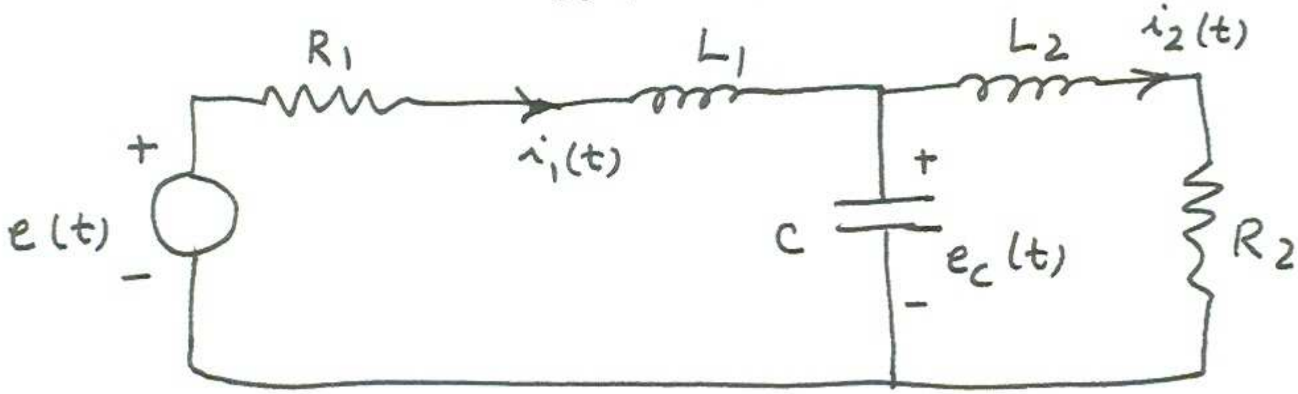
$\dot{x}_3 = r(t)$

$\dot{x}_2$ با استفاده از فرمول بهره کلی رابطه بین ورودی و خروجی محاسبه میشود

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(a_2+a_3)}{1+a_0a_3} & -a_1 & \frac{1-a_0a_2}{1+a_0a_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

A8 Admin; 2008/04/26

مثال : متغیرهای حالت و معادلات حالت را برای مدار الکتریکی زیر بنویسید



با نوشتن KVL و KCL روابط بین جریان‌ها و ولتاژها را داریم :

$$L_1 \frac{d i_1(t)}{dt} = -R_1 i_1(t) - e_c(t) + e(t)$$

$$L_2 \frac{d i_2(t)}{dt} = -R_2 i_2(t) + e_c(t)$$

$$C \frac{d e_c(t)}{dt} = i_1(t) - i_2(t)$$

Slide 140

A9 Admin; 2008/04/26

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{e_c}{L_1} + \frac{e}{L_1}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} + \frac{e_c}{L_2}$$

$$\frac{de_c}{dt} = \frac{i_1}{C} - \frac{i_2}{C}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{e}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ e_c \end{bmatrix}}_{\text{ورودی}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$\dot{X} = AX + BU$$

ماتریس ضرائب (پارامترهای سیستم)

متغیر حالت

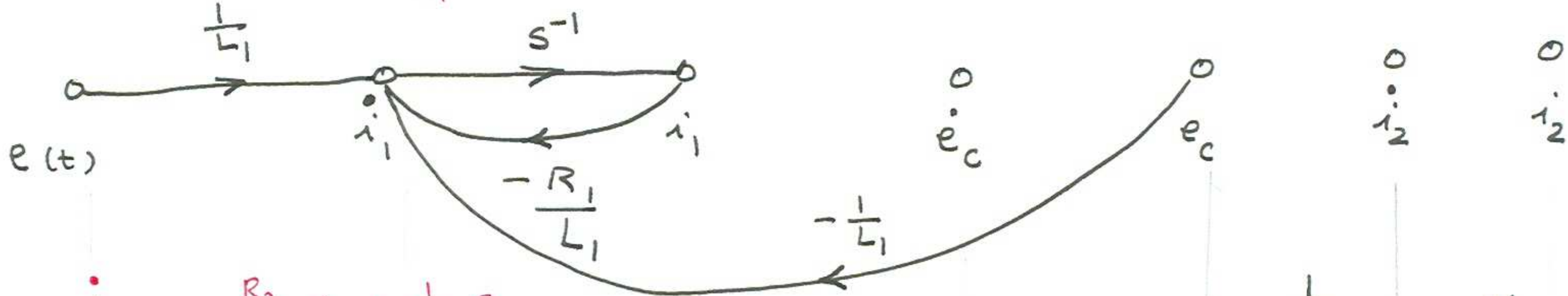
ماتریس ورودی

A10 Admin; 2008/04/26

A11

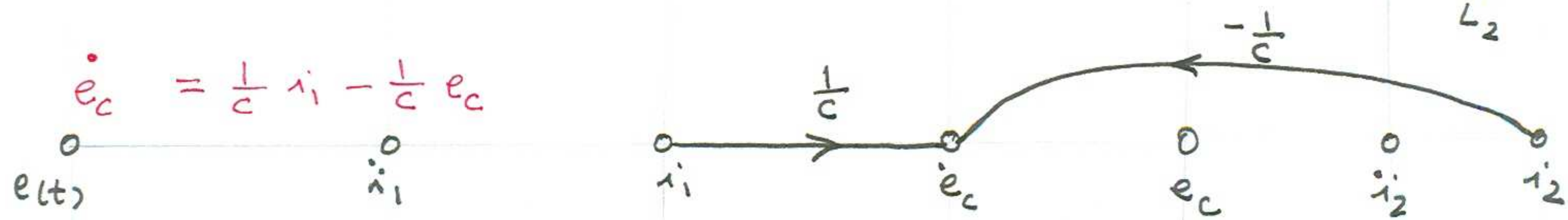
رسم نمودار حالت :   بدون در نظر گرفتن شرایط اولیه

$$\dot{i}_1 = -\frac{R}{L} i_1 - \frac{1}{L_1} e_c + \frac{1}{L_1} e$$



$$\dot{i}_2 = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} e_c$$

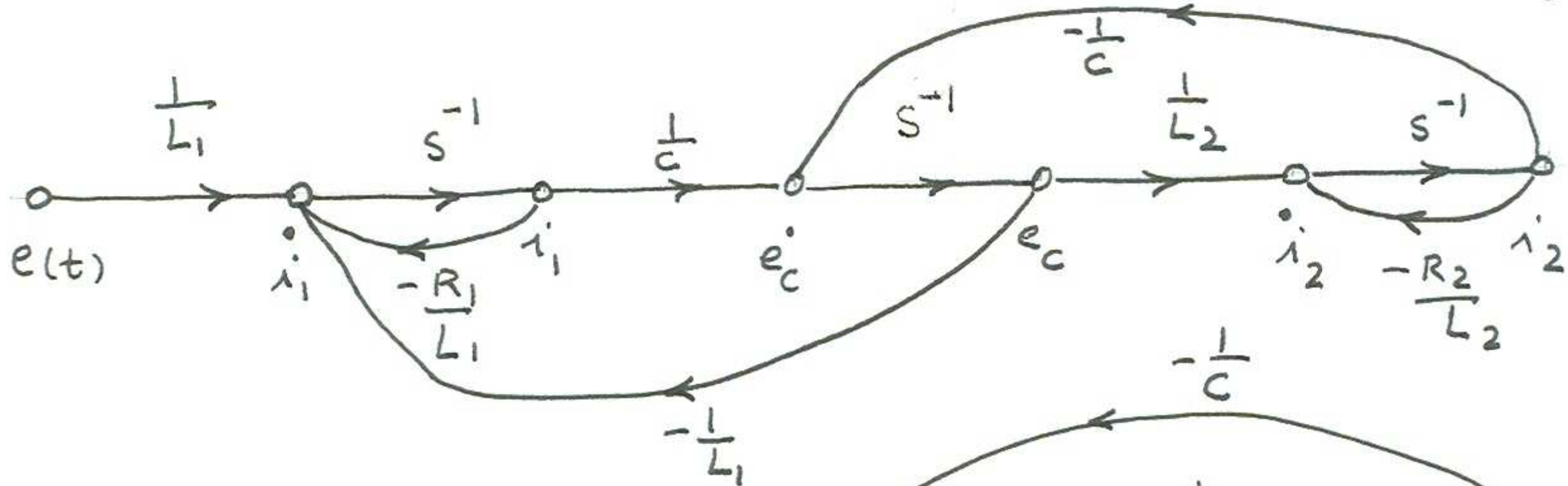
$$\dot{e}_c = \frac{1}{c} i_1 - \frac{1}{c} e_c$$

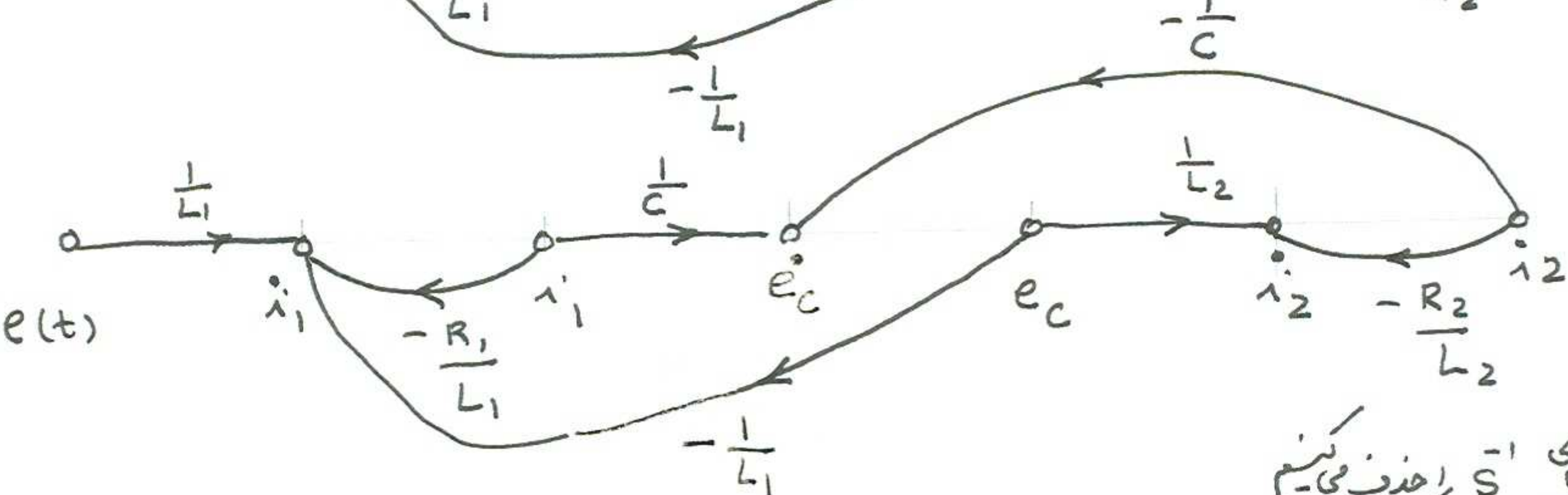


Slide 142

A11 Admin; 2008/04/26

بدست آوردن معادلات حالت با استفاده از نمودار حالت در مثال قبل





* شاخه های s^{-1} را حذف می کنیم
* $\dot i_1$ ، $\dot i_2$ ، $\dot e_c$ را خروجی بگیریم
* معادلات را می نویسیم
* درصورتیکه گراف پیچیده تر باشد از فرمول کلی بهره نیز باید استفاده کنیم.

$$\dot i_1 = \frac{1}{L_1} e(t) - \frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} e_c$$

$$\dot i_2 = \frac{1}{L_2} e_c - \frac{R_2}{L_2} i_2$$

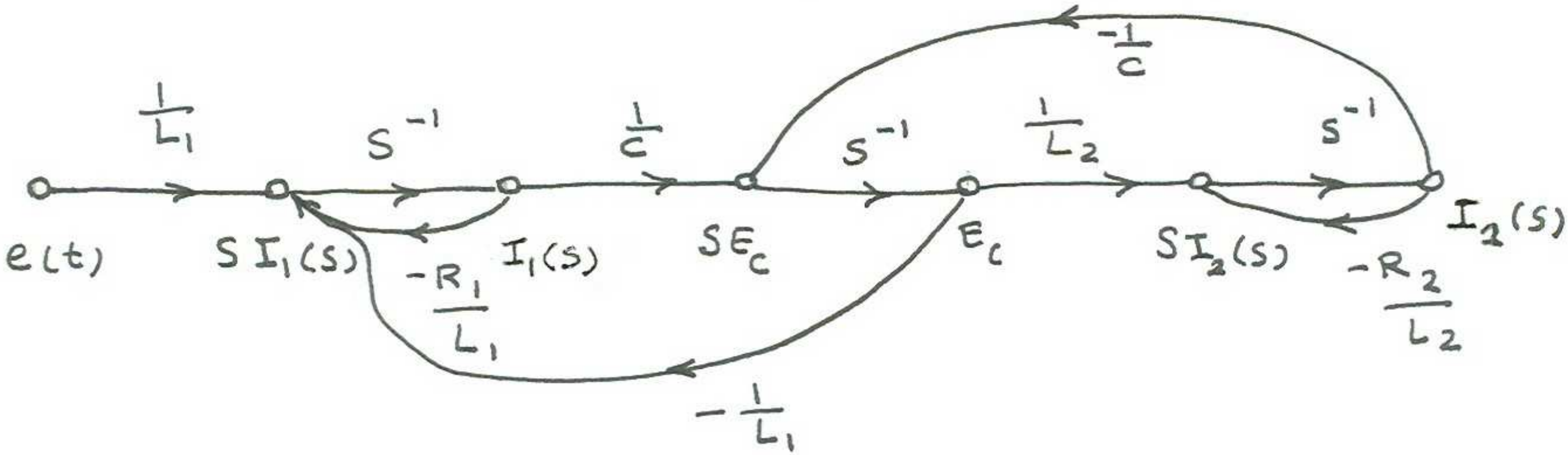
$$\dot e_c = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2$$

Slide 143

A12 Admin; 2008/04/26

بدست آوردن تابع تبدیل های میان $I_1(s)$ ، $I_2(s)$ ، $E_c(s)$ و $E(s)$ با استفاده از معادلات حالت :

با استفاده از فرمول کلی بهره در گراف عبور سیگنال برای مثال قبل نسبت های زیر را پس از بدست آوردن تبدیل لاپلاس متغیرها به صورت زیر خواهیم داشت :



$$\frac{I_1(s)}{E(s)} = \frac{L_c C s^2 + R_2 C s + 1}{\Delta} \qquad \frac{I_2(s)}{E(s)} = \frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{E_c(s)}{E(s)} = \frac{L_2 s + R_2}{\Delta}$$

$$\Delta = L_1 L_2 C s^3 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) C s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) s + R_1 + R_2$$

Slide 144

A13 Admin; 2008/04/26