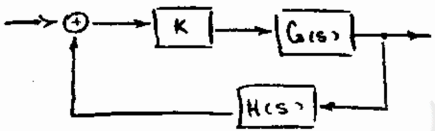
* مکان هندسی ریشه‌ها :   فصل ۷ :

هدف : بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه در اثر پارامتر خاص برای پایداری

بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (که لزوماً K نیست)



$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)}$$

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0 \longrightarrow KGH(s) = -1$$

$$\begin{cases} |KGH(s)| = 1 & \text{شرط اندازه} \\ \measuredangle GH(s) = \pm 180(2q+1) \quad \text{و} \quad q = 0,1,\dots & \text{شرط زاویه} \end{cases}$$

که مضارب فرد 180°

مکان هندسی یعنی تغییر ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات K

اگر نقطه s^* در $GH(s)$ قرار داده شود و فاز $\measuredangle GH(s^*)$ مضارب فرد 180 باشد

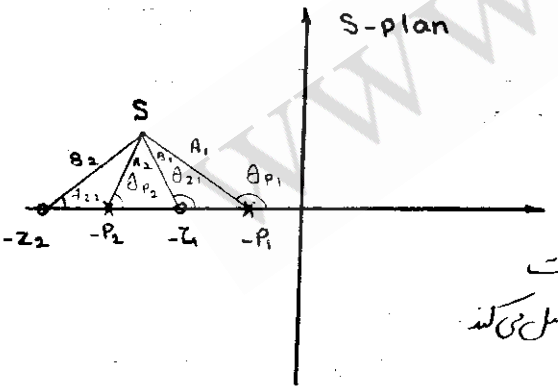
این به ازاء یک گین خاص جزو ریشه‌های معادله مشخصه خواهد بود. به ازای چه گینی؟ گینی که شرط اندازه را تحقق کند.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

برای سیستمهای فیزیکی $n \geq m$

برای حالت $m > n$ حداقل یک قطب در بینهایت خواهیم داشت.

- دیاگرام قطب × و صفر ○ در صفحه S:



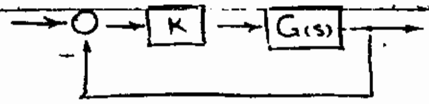
$$\begin{cases} S + z_i = (S - (-z_i)) \\ S + P_i \end{cases}$$

نشان‌دهنده بردارهایی است که z_i (یا P_i) را به S وصل می‌کند

$$\measuredangle GH(s) = \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s+P_i)$$

$$\begin{cases} \measuredangle GH(s) = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) \\ |GH(s)| = \dfrac{B_1 B_2}{A_1 A_2} \end{cases}$$

* مثال:



$A(s) = 1 + KG(s)$

$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

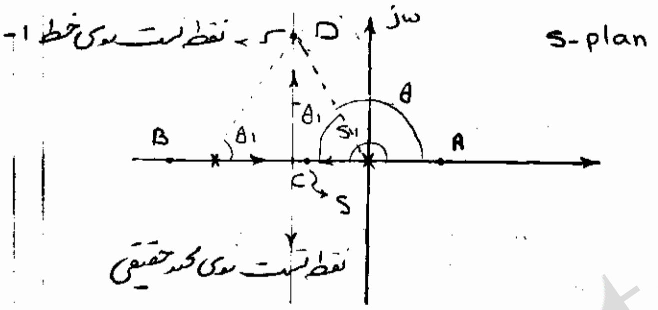
$A(s)=0 \to s(s+2)+K=0 \to s^2+2s+K=0 \to s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$

$\begin{cases} s_1 = -1+\sqrt{1-K} \\ s_2 = -1-\sqrt{1-K} \end{cases}$ $\qquad K=0 \to \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$

$0<K<1 \to$ { s_1 منفی تر ، s_2 مثبت تر

$K=1 \to s_1 = s_2 = -1$

$K>1 \to s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K-1} \to$ اندازه ثابت و فاز تغییر می‌کند



$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

نقاط حقیقی: نقاط روی محور حقیقی بین ۰ و ۲-

$\measuredangle S_1 = 180$, $\measuredangle S_2 = 0$ } نقطه C

$\measuredangle GH(s) = -(\measuredangle S_1 + \measuredangle S_2) = -180 \leftarrow$

که جزء مکان هست

نقطه D { $\theta = 180 - \theta_1$

$\measuredangle GH = -(180 - \theta_1 + \theta_1) = -180 \to$

شرط زاویه ارضا می‌شود ← جزء مکان هست.

نقطه A: $\measuredangle GH = 0$

نقطه B: $\measuredangle GH = -360$

} ← شرط زاویه ارضا نمی‌شود ← جزء مکان نیستند.

* مراحل یافتن (۱) تابع تبدیل حلقه باز را بصورت فاکتورگیری می‌نویسیم.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

(۲) دیاگرام قطب ، صفر تابع تبدیل حلقه باز را رسم می کنیم.

تعداد شاخه های مکان:

شاخه یعنی مسیری که یک قطب با تغییرات پارامتر طی می کند ($0 < K < \infty$) که برابر n می باشد،

(تعداد قطبهای سیستم حلقه باز)

(۳) تقارن نسبت به محور حقیقی:

مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

چون اگر ریشه مختلط ، زوج آن نیز جزء مکان است.

(۴) نقطه شروع و انتها:

ریشه های $\Delta(s)$ به ازاء $K=0$ کجا هستند؟ با قطبهای $GH(s)$ برابر هستند.

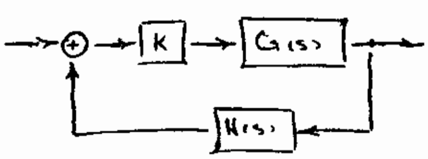
ریشه های $\Delta(s)$ به ازای $K=\infty$ کجا هستند؟ با صفرهای $GH(s)$ برابر هستند.

$$GH(s)=\frac{N_{gh}}{D_{gh}}$$

$$1+KGH(s)=0 \Rightarrow K=\frac{-1}{GH(s)} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow GH(s)=\infty \sim \text{قطبهای } GH(s) \\ K=\infty \Rightarrow GH(s)=0 \sim \text{صفرهای } GH(s) \end{cases}$$

اگر K به سمت صفر میل کند (بسیار کوچک باشد):

سیستم حلقه باز و حلقه بسته مانند هم عمل می کنند.



* جلسه شانزدهم :   سه‌شنبه : ۸۲,۲,۹

* مکان هندسی ریشه‌ها :

بررسی رفتار سیستم حلقه بسته با تغییرات یک یا چند پارامتر خاص

رفتار سیستم توسط قطبها مشخص می‌شود (قطبها ریشه‌های معادله مشخصه هستند.

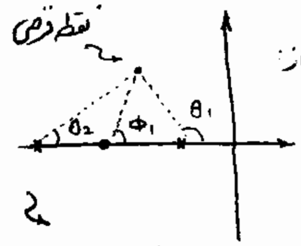
و هدف ما یافتن رفتار سیستم حلقه بسته از روی مشخصات سیستم حلقه باز است، بدون حل معادله مشخصه.

(← با داشتن تابع تبدیل سیستم حلقه باز (داشتن صفرها و قطبهای آن))

$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{a_{n-1}s^{n-1}}{s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$0 < K < \infty$ $KGH(s) = -1$ $\Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \quad q = 0, \pm1, \dots \end{cases}$



نمودار قطب صفر سیستم حلقه باز:

$GH(s)$

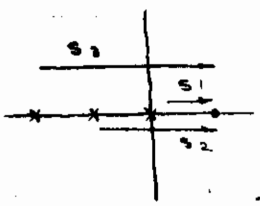
$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)}$$

$\angle GH(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$

- ترسیم دیاگرام صفر و قطب
- تعداد شاخه‌ها : n
- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها : $K=0$ $K=\infty$

. نقاط روی محور حقیقی عضو مکان :

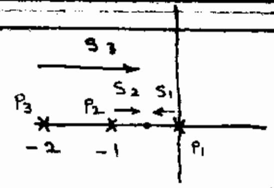
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$\angle s_1 = \angle s_2 + \angle s_3 = 0 \rightarrow$

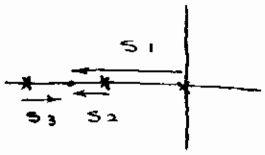
$\angle GH(s) = 0 \Rightarrow$ شرط زاویه ارضا نمی‌شود

→ نقاط سمت راست همگی حذف می‌شوند (جزء مکان نیستند)



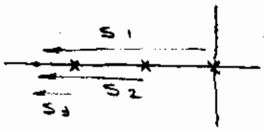
$$\angle s_1 = 180 \qquad \angle s_2 = \angle s_3 = 0 \quad \rightarrow \angle GH(s) = -180 \rightarrow OK \rightarrow$$

نقاط میان P_1 و P_2 عضو مکان هستند.



$$\angle GH(s) = -(180 + 180 + 0) = -360^\circ \rightarrow \text{Cancel} \rightarrow$$

نقاط میان P_2 و P_3 عضو مکان نیستند.

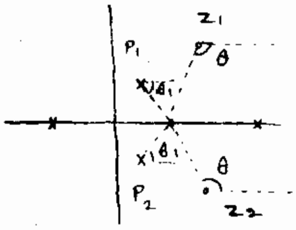


$$\angle GH(s) = -(3\times 180) = -540^\circ \rightarrow OK \rightarrow$$

نقاط سمت چپ P_3 جزء مکان هستند.

نتیجه گیری: نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی جزء مکان هستند.

اکنون قطبهای مختلط را بررسی کنیم:



$$\angle Z_1 = 360 - \theta \qquad \angle Z_2 = \theta \quad \rightarrow \angle Z_1 + \angle Z_2 = 360^\circ \rightarrow$$ تأثیری روی فاز ندارد.

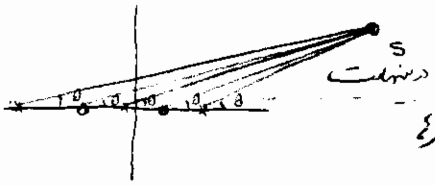
$$\angle P_1 = 360 - \theta_1 \qquad \angle P_2 = \theta_1 \quad \rightarrow \angle P_1 + \angle P_2 = 360^\circ \rightarrow$$ تأثیری در فاز ندارد

→ قطب و صفرهای مختلط تأثیری در قانون اخیر ندارند.

رفتار در بینهایت: (مجانبها):

مکان از قطبهای سیستم حلقه باز شروع می‌شود و به صفرهای سیستم حلقه باز ختم می‌شود.

$$GH(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \longrightarrow s \rightarrow \infty \rightarrow GH(s) \simeq \frac{1}{s^3}$$



$$(m-n)\theta = (2q+1)180^\circ \rightarrow \theta = \frac{2q+1}{m-n} \cdot 180^\circ$$

که تعداد صفرها (m)

تعداد قطبها (n)

اکنون به دنبال خطوطی هستیم که ریشه‌ها در $s \rightarrow \infty$ روی این خط قرار می‌گیرند. (خطوط مجانب)

$$GH(s)=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0}$$

$$\Delta(s)=1+K\cdot\frac{s^m+\dots+b_0}{s^n+\dots+a_0}\ (\mathrm{I})\ \Rightarrow$$ تقریب در نهایت : $$\Delta(s)\cong 1+K\cdot\frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}}$$

$$\Delta(s)=1+\frac{K}{(s-\sigma)^{n-m}}=0\ \Rightarrow\ (\mathrm{II})$$

(۱) نشان می‌دهیم، s هایی که رابطهٔ (II) را ارضاء می‌کنند روی یک خط قرار دارند.

(۲) نشان می‌دهیم چگونه در $s\to\infty$ ، رابطه II از رابطه I بدست می‌آید.

بررسی (۱) :

$$1+\frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=0\ \Leftarrow\ n-m=N$$

$$\Rightarrow\ \frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=-1\ \Rightarrow\ (s-\sigma_0)^N=-K\ \Rightarrow\ s-\sigma=(-K)^{1/N}$$

$$-1=e^{j\pi}\ \Rightarrow\ (-1)^N=e^{j\pi N}\qquad\Rightarrow\ s-\sigma_0=(+K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$s=\sigma+j\omega\ \Rightarrow\qquad \sigma+j\omega-\sigma_0=(K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma-\sigma_0=|K|^{1/N}\cos\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (\mathrm{III})\\ \omega=|K|^{1/N}\cdot\sin\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (\mathrm{IV})\end{cases}$$

الان رابطهٔ III را بر IV تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{\omega}{\sigma-\sigma_0}=\underbrace{tg\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right)}_{m}$$

$$\Rightarrow\ \omega=m(\sigma-\sigma_0)$$

⇐ قسمت حقیقی و موهومی همهٔ s هایی که رابطه II را ارضاء می‌کنند، روی خط با شیب m و در σ_0 قرار می‌گیرند.

$$\Rightarrow\begin{cases}\phi=\frac{(2q+1)\pi}{n-m}\ ,\ q=0,1,\dots\\ \sigma_0=?\end{cases}$$

بررسی (۲) :

الان می‌خواهیم σ_0 را بیابیم :

می‌دانیم: $b_{n-1} = \sum$ همهٔ صفرها . $a_{n-1} = \sum$ همهٔ قطبها

صورت و مخرج رابطه (I) را بر $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow$

$$\Delta = 1 + \frac{K}{\dfrac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}} \xrightarrow{\text{با در نظر گرفتن دو جمله نخست}} \Delta = 1 + \frac{K}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (V)$$

اکنون تقسیم معادله II را نیز با در نظر گرفتن دو جمله انجام می‌دهیم:

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} = 0 \rightarrow 1 + \frac{K}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (VI)$$

با مساوی قرار دادن روابط V و VI داریم:

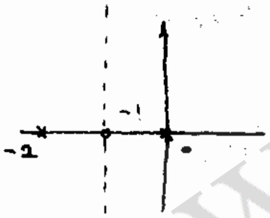
$$-(n-m)\sigma_0 = a_{n-1} - b_{m-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

زاویه مجانب‌ها $\leftarrow$ $\phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \quad ; q = 0, 1, 2 \dots$

مرکز مجانب‌ها $\leftarrow$ $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$

* مثال:



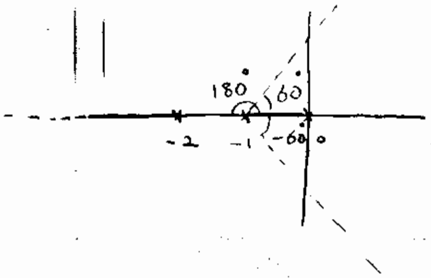
$$\sigma_A = -2 - 0 - (-1) = -1$$

$n = 2$

$m = 1 \rightarrow n - m = 1$

* مثال:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$n = 3$

$m = 0 \rightarrow n - m = 3 \Rightarrow \phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \times 180^\circ \Rightarrow \phi_A = \begin{cases} 60 & : q = 0 \\ 180 & : q = 1 \\ -60 & : q = 2 \end{cases}$

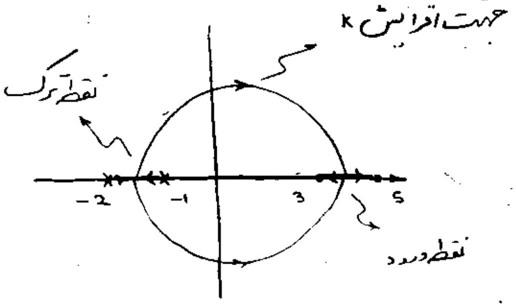
$$\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(-1-2-0) - 0}{3} = -1$$

. نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

مثال:

$$GH(s) = \frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم می گردد.



مجانب نداریم $\quad n=2,\ m=2 \rightarrow n-m=0 \rightarrow$

سپس نقاط روی محور حقیقی را مشخص می کنیم

الان می خواهیم نقاط ترک و ورود را بیابیم:

تذکر: در نقاط ترک یا ورود، ریشه های مکرر داریم، بسته به اینکه چند شاخه به هم رسیده باشد.

$\Rightarrow$ میان نقاط ۱- و ۲-، در نقطه ترک σ_1، K بیشترین مقدار خود را دارد.

مکان در نهایت به سمت صفرها می رود، و در صفر از قطبها شروع می شود

بین نقاط 3 و 5، K مقدار مینیمم خود را دارد.

به کمک مفاهیم فوق: $\quad \left.\frac{dK}{ds}\right| = 0$ نقاط ترک یا ورود

راه نخست: روش عددی: ارزیابی K در نقاط مختلف.

راه دوم: مشتق گیری: $\quad \Delta = 1 + KGH(s) = 0 \rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$

$$\rightarrow S_{B.in}, S_{B.away} : OK$$

اگر این نقاط یافته شده روی مکان بودند ← نقاط ترک و ورود هستند.

برای مختلط ها: $K = \frac{-1}{GH(s)}$ قرار می دهیم. اگر حقیقی بود حتما ترک یا ورود است.

راه سوم : از اینکه ریشه در نقاط ترک یا ورود تکراری است ، کمک می‌گیریم :

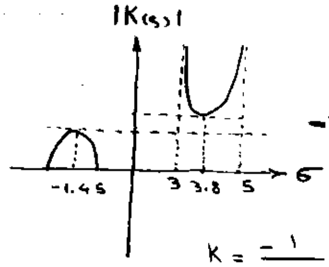
ریشه تکراری یعنی : $\Delta(s_0)=0$ و $\frac{d\Delta(s_0)}{ds}=0$

اثبات : در نقاط ترک یا ورود :

$$\frac{dKGH(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds}=\frac{\frac{dGH(s)}{ds}}{(GH(s))^2}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

بازمی‌گردیم به حل مثال :



$\rightarrow$ تذکر: مینیمم سمت راست از ماکسیمم سمت چپ باید بیشتر باشد.

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \qquad s\in[-2\ -1] \rightarrow$$

• روش نخست : عددی

σ	K		σ	K
-1.41	0.008557			
-1.42	0.008585		3.3	44.686
			3.4	37.125
-1.45	0.008623 $\rightarrow$ Max		3.8	29 $\rightarrow$ Min
-1.46	0.008622		3.9	2.200

• روش دوم :

$$K=\frac{-1}{GH(s)}=\frac{-(s+2)(s+1)}{(s-3)(s-5)}$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+2}{s^2-8s+15}\right)=0 \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} s_1=-1.45 \\ s_2=3.82 \end{cases}$$

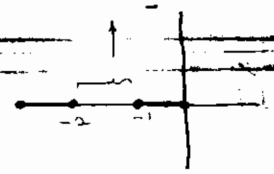
• مثال :

$$K=-(s^3+3s^2+2s)$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow 3s^2+6s+2=0 \rightarrow s_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تذکر مهم ، $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان نیست . چون :

این ناحیه جزو مکان نیست



$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان نیست ← نقطه ترک هم نیست

ولی نقطه $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان می باشد. $\sigma_b = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

• نقطه قطع محور jω :

چرا باید بدانیم که مکان محور jω را قطع می کند یا خیر؟

پاسخ: چون محور jω مرز پایداری است و باید بدانیم مکان به ازای چه K هایی ناپایدار است.

برای تشخیص آنکه مکان چه زمانی محور jω را قطع می کند، یک راه است که بجای s ، مقدار jω قرار دهیم:

$$\Delta(s)\Big|_{s=j\omega} = Re(\omega)+j\,Im(\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} Re(\omega)=0 \\ Im(\omega)=0 \end{cases}$$

روش دیگر: معیار راث: اگر سطر صفر داشت، احتمال قطع می باشد. که هم ω و هم K داده می شود.

* جلسه هفدهم: یکشنبه: ۸۲/۲/۱۴

... ادامه مباحث مکان هندسی ریشه ها:

• تغییرات قطبهای سیستم حلقه بسته نسبت به یک پارامتر $(K>0)$:

- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها
- رفتار در بینهایت
- نقاط ترک و ورود
- نقطه قطع محور jω
- نقاط روی محور حقیقی روی مکان

$$\Delta(s) = 1+KGH(s) = 0$$

$$\begin{cases} \text{شرط اندازه}: |KGH(s)|=1 \\ \text{شرط زاویه}: \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \end{cases}$$

$q=0,\pm1,\pm2,\dots$

برای نقطه قطع روی محور $j\omega$:

دو راه داریم: (۱) $s=j\omega \rightarrow \Delta(j\omega)=0 \rightarrow$

$$\Delta(j\omega)=Real(\omega)+j\,Im(\omega)$$

$$Re(\omega)=0$$

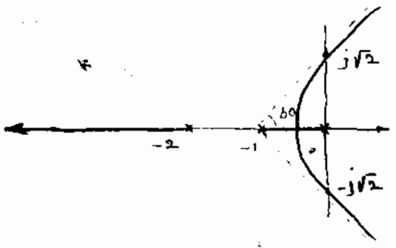
(۲) معیار راث :

یک سطر صفر (نشان‌دهنده دو ریشه قرینه) ← احتمال اینکه ریشه روی $j\omega$ باشد وجود دارد

*مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

اولین گام: رسم دیاگرام صفر و قطب:



$$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ m=0 \end{array}\right\} \rightarrow \phi_A=\frac{2q+1}{n-m}\cdot 180 \rightarrow \begin{cases} 60 \\ -60 \\ 180 \end{cases}$$

$$\sigma_A=\frac{\text{مجموع قطبها} - \text{مجموع صفرها}}{n-m}=-1$$

$$\frac{dGH(s)}{ds}=0 \quad \frac{dK}{ds}=0 \rightarrow s=\begin{cases} -0.57 & ;\ OK \\ \cancel{-1.57} & \text{چون جزو مکان نمی‌باشد} \end{cases}$$

$$\Delta(s)=1+KGH(s)=0 \rightarrow$$

$$s(s+1)(s+2)+K=0 \rightarrow s^3+3s^2+2s+K=0 \rightarrow$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	

$\rightarrow$ تنها سطری که ممکن است صفر شود

برای $K=6$ صفر می‌شود: ← معادله کمکی $3s^2+6=0 \rightarrow$

$3(s^2+2)=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{2} \rightarrow$ محل قطع مکان با محور j

روش دوم:

$$\Delta(s)\Big|_{s=j\omega}=0 \qquad Re(\omega)+j\,Im(\omega)=0$$

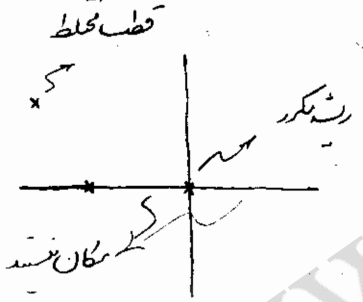
$$\rightarrow (j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \rightarrow$$

$$-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K=0 \rightarrow$$

$$\underbrace{(K-3\omega^2)}_{Re(\omega)}+j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im(\omega)}=0 \rightarrow Im(\omega)=0 \rightarrow 2\omega-\omega^3=0 \rightarrow \begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Re(\omega)=0 \rightarrow K-3\omega^2 \rightarrow K=3\omega^2 \\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{array}\right\} \rightarrow K=6$$

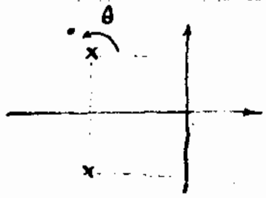
* زاویه خروج از قطب (مختلط) یا زاویه ورود به صفر (مختلط):



مثال: $G(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

- یک نقطه در همسایگی قطب مورد نظر انتخاب می‌کنیم.

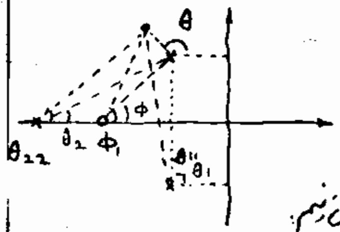
- زاویه این نقطه با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم (θ مجهول است)



- این نقطه اگر جزء مکان باشد باید شرط زاویه برای آن محقق شود

خلاصه مبحث هشتم: سه‌شنبه: ۸۲/۲/۱۶

... زاویه خروج (ورود) از (به) قطب (صفر):



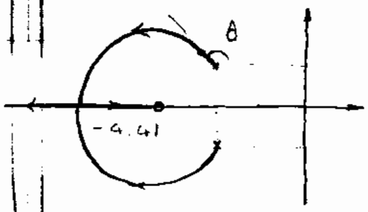
زاویه تست با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم مجهول فرض می‌کنیم:

زاویه بقیه صفر و قطبهای $GH(s)$ با نقطه تست را با زاویه قطب و صفر همسایه تقریب می‌زنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1-\theta_{11}-\theta_{22}-\theta=180\\ \phi_1\simeq\phi \quad \theta_{11}\simeq\theta_1 \quad \theta_{22}\simeq\theta_2\end{array}\right\}\rightarrow$$ θ بدست می‌آید

مثال:

$$GH(s)=\frac{s+3}{s^2+4s+5} \rightarrow \begin{cases} z=-3\\ p_1,p_2=-2\pm j1\end{cases}$$



گام (۱): رسم دیاگرام صفر و قطب

گام (۲): یافتن نقاط حقیقی روی محور

گام (۳): مجانبها (تعداد، زاویه و مرکز شان):

- تعداد: $n-m=1$

- زاویه: $\phi_A=\frac{2q+1}{n-m}\cdot\pi \;,\; q=0,1,2,\dots \quad \rightarrow \phi_A=+180^\circ$

- مرکز: $\sigma_A=\dfrac{\sum \text{قطب} - \sum \text{صفر}}{n-m}=1$

گام (۴): نقطه ترک و ورود به محور حقیقی:

$$\frac{dk}{ds}=0 \;,\; \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=-\frac{1}{GH(s)}=-\left[\frac{s^2+4s+5}{s+3}\right]$$

$$\frac{dk}{ds}=0 \rightarrow \frac{(2s+4)(s+3)-(s^2+4s+5)(1)}{(s+3)^2}=0$$

$$\Rightarrow (2s^2+10s+12)-(s^2+4s+5)=0 \Rightarrow s^2+6s+7=0 \Rightarrow s=-3\pm\sqrt{9-7} \Rightarrow$$

$$s=-3\pm\sqrt{2} \Rightarrow s=\begin{cases} -3-\sqrt{2} \leftarrow \text{جزو مکان است} \\ -3+\sqrt{2} \leftarrow \text{جزو مکان نیست} \end{cases} \qquad -3-\sqrt{2}=-4.41$$

$$K=\frac{-1}{GH(-4.41)}=4.84$$

گام نهایی: یافتن زاویه خروج:

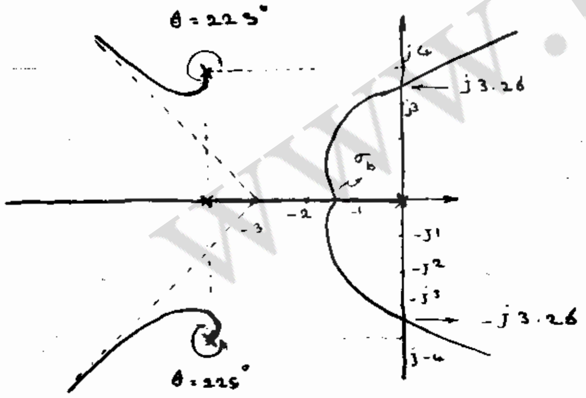
$$\phi-\theta_1-\theta=180 \Rightarrow \underbrace{-90}_{\theta_1}+\underbrace{45}_{\phi}-\theta=180 \Rightarrow \theta=-225^\circ=135^\circ$$

یادآوری: مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

* مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$$

رسم دیاگرام صفر و قطب:



$P_1=0$

$P_2=-4$

$P_3=-4+j4$

$P_4=-4-j4$

نقاط روی محور حقیقی OK

مجانب ها:

(۱) تعداد:

تعداد مجانبها برای اختلاف درجه صورت و مخرج است ← ۴ مجانب دارد.

توضیح دیگر: این سیستم ۴ صفر در بینهایت دارد. مکان از قطبها شروع شده و در صفرها ختم میشود ← ۴ مجانب دارد.

- زوایا :

$$\phi_A=\frac{2q+1}{n-m}\pi \rightarrow \phi_A=\frac{2q+1}{4}\cdot 180 \rightarrow \phi_A=\begin{cases}45\\-45\\135\\-135\end{cases}$$

$$q=0,1,2,\dots$$

- مرکز مجانب:

$$\sigma_A=\frac{\sum P-\sum Z}{n-m}=\frac{(0-4-4-4)-0}{4}=-3$$

تذکر: برای آنکه بفهمیم مکان از پایین به مجانب نزدیک می‌شود یا از بالا، باید نقطه قطع محور ها را بیابیم.

- نقطه ترک محور حقیقی :

$$\frac{dGH(s)}{ds}=0 \quad \text{or} \quad \frac{dK}{ds}=0 \qquad K=\frac{-1}{GH(s)}$$

$$\frac{dK}{ds}=-(4s^3+36s^2+128s+128)=0$$

چون ماشین حساب نداریم (!) ⟸ باید از روش عددی کمک بگیریم :

می‌خواهیم $\frac{dK}{ds}=0$ باشد ← $K(s)$ باید ماکسیمم باشد : ← به تابع $K(s)=\frac{-1}{GH(s)}$ عددی دهیم

s	0	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-4
K	-	75	85	80	68.5	51	0

Max

$$\rightarrow \begin{cases}\sigma_b=-1.5\\ K_b=85\end{cases} \Rightarrow \quad b:\ \text{Brake Away}\ (!?)$$

- نقطه قطع محور ها :

(۱) معیار راث

(۲) از رابطه $\Delta(s)$ در $s=j\omega$

$$\Delta(s)=s^4+12s^3+64s^2+128s+K$$

s^4	1	64	K
s^3	12	128	0
s^2	b_1	K	
s^1	c_1	0	
s^0	K		

$$b_1=\frac{12\times 64-128}{12}=53.33$$

$$c_1=\frac{128b_1-12K}{b_1}$$

(سطر فرد، باید صفر باشد) :

$$c_1=0\rightarrow K=\frac{53.33\times 128}{12}=568.85$$

برای K به دست آمده اخیر، سیستم در مرز پایداری خواهد بود.

معادله کمکی

$$\to A(s) = 53.33\, s^2 + 568.85 = 0$$

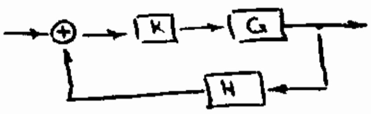
$$\to s = \pm j\sqrt{\frac{568.85}{53.33}} \to s_{1,2} = \pm j\,3.26$$ نقاط تقاطع با محور ها

- زاویه خروج از قطب مختلط:

$$-135 - 90 - 90 - \theta = 180 \to$$

$$\theta = -135^\circ - 360^\circ = -135^\circ \to 225^\circ$$

کوییز: برای فیدبک مثبت، قوانین مکان چگونه اصلاح می‌شود؟



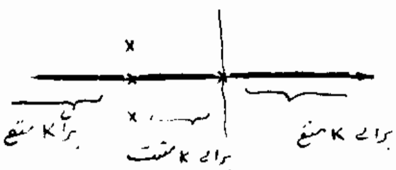
تذکر: فیدبک مثبت با گین مثبت = فیدبک منفی با گین منفی

- قوانین اصلاح شده برای فیدبک مثبت:

$$KGH(s) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

(۱) تقارن نسبت به محور حقیقی برقرار است

(۲) نقاط روی محور حقیقی: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب



نتیجه: اگر K را در بازه $(-\infty, +\infty)$ در نظر بگیریم ← کل محور حقیقی جزء مکان خواهد بود.

۳) نقطه ترک محور حقیقی، تفاوتی نمی‌کند (چون ارتباطی با زاویه ندارد)

۴) مجانبها: - تعداد: قانون آن تفاوتی نمی‌کند.

- مرکز: عوض نمی‌شود.

- زاویه: عوض می‌شود: $\phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}$, $q=0,1,\dots$

۵) زاویه ورود و خروج: تغییر می‌کند: برای مضارب زوج $180°$ نوشته می‌شود: $2q\pi$

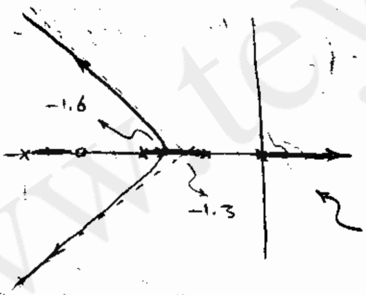
۶) نقطه قطع محورها: قانون تغییر نمی‌کند: معیار راث یا برش $\Delta(s)$ به ازای $s=j\omega$

* مثال: با فرض فیدبک مثبت:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{cases} Z=-3 \\ P_1=0 \\ P_2=-1 \\ P_3=-2 \\ P_4=-4 \end{cases}$$

- رسم دیاگرام مکان قطب:



فیدبک مثبت، ذاتاً ناپایدار است

مجانبها: - اختلاف درجه صورت و مخرج: ۳

$$\phi_A = \frac{2K}{3}\cdot 180 \Rightarrow 0, 120, -120$$

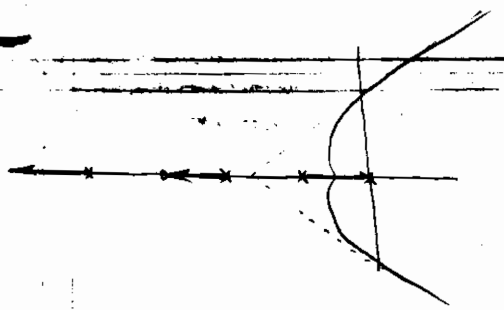
$$\sigma_A = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n-m} = \frac{-4}{3} = -1.3$$

- تذکر: در سیستم‌های ارضایابی عموماً، مجانبها وسط مکان قطع نمی‌شوند.

- نقطه ترک:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \sigma_b = -1.6$$

* تذکر: اگر فیدبک منفی (و تیر $K<0$) باشد، مکان به صورت زیر در می‌آید:



Matlab Code: Rlocus(n,d)

* تأثیر اضافه کردن قطب و صفر روی مکان:

اگر تنها هدف رسم مکان بود، از PC کمک می گرفتیم. اما مکان هندسی ریشه ها برای طراحی و تنظیم پارامترهای سیستم برای دستیابی به پاسخ مطلوب کاربرد دارد.

طراحی: تنظیم پاسخ به صورت پاسخ مطلوب، کمک تغییر پارامترهای سیستم.
- آیا میتوان پاسخ مطلوب را گرفت؟
- اگر نمی توان، چگونه عمل کنیم؟

همین مثال اخیر را بررسی می کنیم: (شمای مکان هندسی ریشه های آن در بالای صفحه رسم شده است)

- شاخه های مسلط، شاخه های نزدیک محور هستند.

فرضاً: $\left\{\begin{array}{l} T_s < 4(s) \\ P.O < 10\% \end{array}\right. \rightarrow \}$? $\rightarrow$ $s_{1,2} = \underbrace{0.5 \pm j1}_{S_d}$

S_d : ریشه مطلوب.

الان باید ببینیم این ریشه جزء مکان هست یا خیر؟

اگر هست $\rightarrow$ $K = \frac{-1}{GH(S_d)}$

اگر نیست $\rightarrow$ باید شکل مکان را به گونه ای تغییر دهیم که از نقطه مطلوب عبور کند.

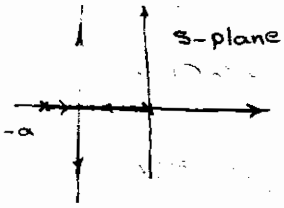
... بس از این نقطه در جلسه آینده این بحث دنبال خواهد شد...

* جلسهٔ نوزدهم :   یکشنبه : ۸۲,۲,۲۱

... در واقع ، هدف ، شکل دهی مکان برای عبور از یک نقطه (نقاط) خاص است.

* مثال : تأثیر قطب :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)} \quad , a>0$$

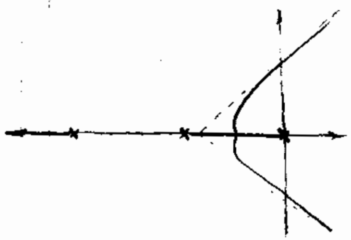


$\Rightarrow$ پایدار

$\Phi_A = \pm 90$

$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.5 \pm j\omega_1 \\ s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \ (s) \end{cases}$$

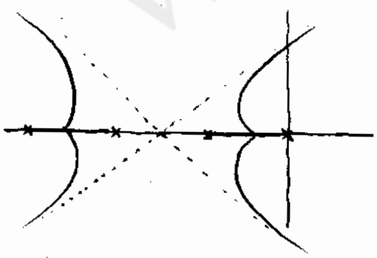
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \quad , \quad |a|<|b| \quad a>0 \quad b>0$$



$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{3} \cdot 180 = 60 , -60 , 180 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b)}{3} \end{cases}$$

اثر: ناپایداری ـ خم شدن مکان بسمت راست.

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$$



$n-m=4$

$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{4} \times 180 = \pm 45 , \pm 135 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b+c)}{4} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ مکان بیشتر به سمت راست می رود $\Leftarrow$

« قطب به پایداری کمک نمی کند و سیستم را به سمت ناپایداری می برد. »

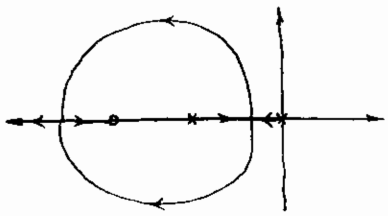
* مثال: تاثیر صفر:

$$GH(s)=\frac{1}{s(s+a)}$$

$$\to GH(s)=\frac{(s+b)}{s(s+a)}$$

$n-m=1$

$$\Phi_A=\frac{2q+1}{1}\cdot 180=180$$



مکان به سمت چپ منحرف می شود.

صفر اثر پایدار کننده (پایدارسازی) دارد.

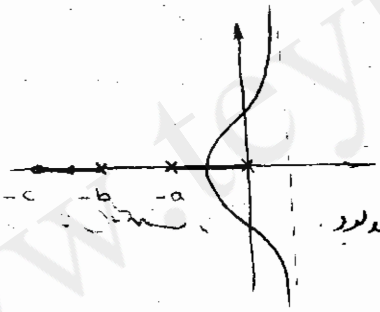
تذکر: صفر راست باعث ناپایداری می شود.

* مثال:

$$GH(s)=\frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$$

$n-m=2$

$$\begin{cases}\Phi_A=\dfrac{2q+1}{2}\cdot 180=\pm 90\\[2mm] \sigma_A=\dfrac{c-(a+b)}{2}\end{cases}$$



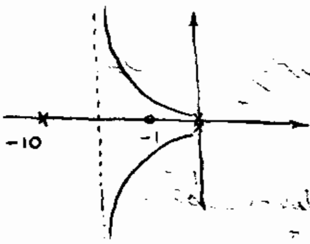
به ازای $c<a+b$ سیستم همواره پایدار خواهد بود.

تاثیر موقعیت قطب روی مکان ریشه ها:

$$GH(s)=\frac{s+1}{s^2(s+a)}$$

$$\begin{cases}\Phi_A=\pm 90\\[2mm] \sigma_A=\dfrac{-a+1}{2}\end{cases}$$

فرض: $a=10$



شکل را نمی توانیم بطور دقیق رسم کنیم مگر اینکه نقطه تقاطع محور حقیقی را پیدا کنیم.

$$\frac{dGH(s)}{ds}=\frac{(3s^2+2as)(s-1)-s^3-as^2}{(s^2(s+a))^2}=0$$

$$\Rightarrow 2s^3+(a+3)s^2+2as=0 \rightarrow s(2s^2+(a+3)s+2a)=0$$

که همواره $s=0$ یک نقطه ترک است.

$$s=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a+3)^2-16a}}{4}$$

زیرا رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، چون سیستم درجهٔ ۳ است. در سیستم درجهٔ ۴ می‌تواند.

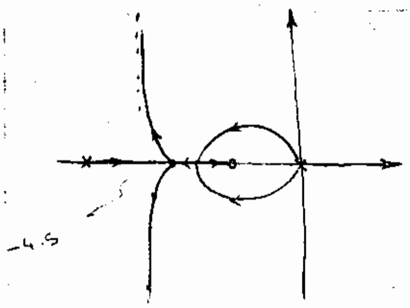
$$\left.\begin{array}{l}(a+3)^2-16a>0\\ a^2-10a+9=0\\ (a-1)(a-9)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\geq 9\\ \text{or}\\ a\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\geq 0$$

$a=10 \Rightarrow s=-4\,,\,-2.5$

به ازای $a=1$ و $a=9$ نقطه ترک مکرر داریم.

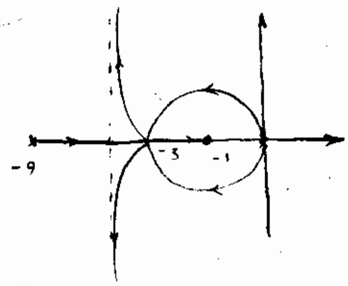
به ازای $a<1$ و $a>9$ نقطه قطع و ورود داریم.

به ازای $1<a<9$ نقطه قطع و ورود نداریم.

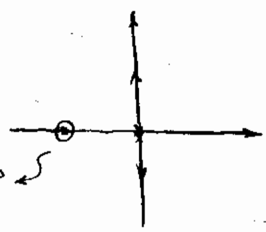


$a=9 \Rightarrow s_{2,3}=-3$

نقطه قطع مکرر (هم ترک هم ورود)

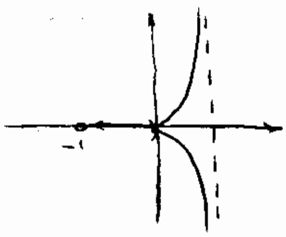


$$a=1 \Rightarrow GH(s)=\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}$$



که هم قطب و هم صفر (از -1 خارج شده و بر آن وارد می‌شود)

$a<1 \Rightarrow$



*** تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها:**

$$1+KGH(s)=0$$

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

تغییرات ریشه‌های $\Delta(s)$ مثلاً با تغییرات a_1:

مثلاً به شکل $1+a_1GH(s)$ درمیاوریم

بر جملات فاقد a_1 تقسیم می‌کنیم:

$$1+\frac{a_1s}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_2s^2+a_0}$$

*** مثال:**

$K=10 \qquad G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+P)}$

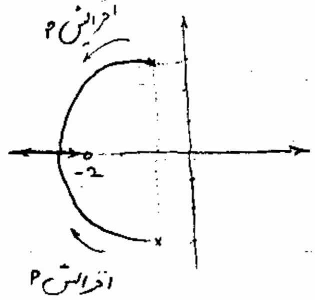
$$\text{input} \xrightarrow{+} \bigcirc \rightarrow \boxed{K} \rightarrow \boxed{GH(s)} \rightarrow \text{(feedback)}$$

$$\Delta(s)=1+KGH(s)=1+\frac{K}{(s+2)(s+P)}=0$$

$$\Rightarrow (s+2)(s+P)+K=0 \rightarrow s^2+(P+2)s+2P+10=0 \rightarrow s^2+2s+P(s+2)+10=0$$

$$\rightarrow \quad 1+\frac{P(s+2)}{s^2+2s+10}=0$$

$$\text{جدید } GH(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+10} \quad \rightarrow$$



$n-m=1 \qquad \phi_A=180$

اینکه در P خیلی بزرگ به سمت 2- می‌رود اگر G(s) هم می‌توانستیم بیابیم: با بزرگ شدن P می‌توان از ترم $(s+P)$ در مقابل $(s+2)$ صرف نظر کرد.

سطوح ریشه:

$$K_1K_2=K$$

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

ابتدا K_2 را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)$$

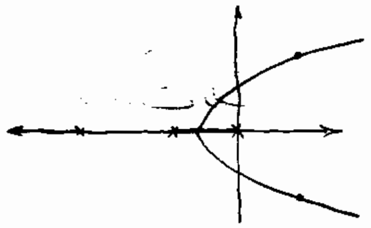
مکان را برای K_1 رسم می کنیم:

بر P تقسیم می کنیم:

$$1+K_1\cdot\frac{Q_1(s)}{P(s)}=0$$

$$\Rightarrow 1+K_1\,\overbrace{G_1H_1(s)}=0$$

K_1 را Fix می کنیم:



معادله مشخصه را می نویسیم:

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

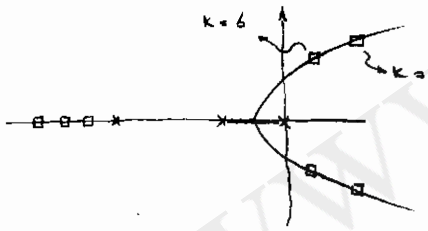
- مکان را نسبت به K_2 رسم می کنیم:

- $\Delta(s)$ را بر $P(s)+K_1Q_1(s)$ تقسیم می کنیم:

قطبهای GH_2 همان ریشه‌های $P(s)+K_1Q_1(s)$

$GH_2(s)$

$$\Delta(s)=1+\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}=1+K_2G_2H_2(s)$$



نمایانگر یک سطح

مثال:

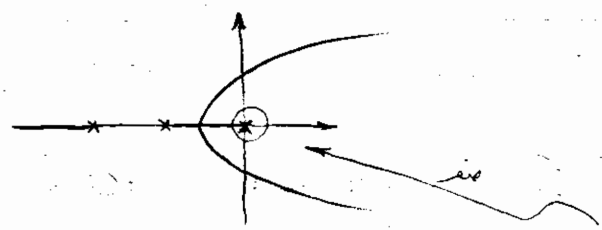
$$GH(s)=\frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}\qquad K_1=K,\quad K_2=KT$$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K(1+Ts)$$

$$T=0\Rightarrow \Delta(s)=\underbrace{s^3+3s^2+2s}_{P(s)}+K\ \rightarrow\ \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- K را Fix می کنیم.

- مکان را برحسب T می نویسیم:

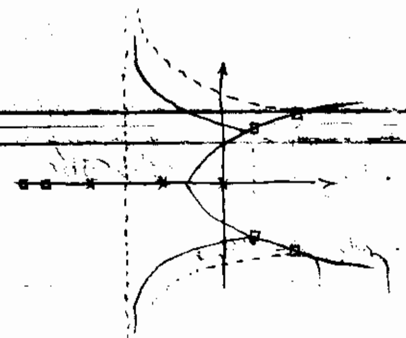


$n-m=2$

$\phi_A=\pm 90$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K+KTs\ \rightarrow\ \Delta(s)=1+\frac{KTs}{s(s+1)(s+2)+K}$$

مجموع قطبها = مجموع ریشه‌ها $=-3\ \rightarrow\ \sigma_A=\frac{-3}{2}$



* جلسه بیستم ، سه شنبه : ۸۲،۲،۲۳

حساسیت ریشه‌ها: (هرچقدر کمتر باشد بهتر است)

$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}$ ، قبلاً داشتیم

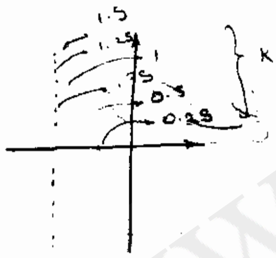
اکنون: $S_K^s = \frac{\partial s}{\partial K}\cdot\frac{K}{s}$

نقاط تقاطع محور حقیقی:

$$\frac{\partial K}{\partial s}=0 \to \frac{\partial s}{\partial K}=\infty \Rightarrow S_K^s \to \infty$$

* مثال:

$$\Delta(s) = s(s+1)+K=0$$



تغییرات K از ۰ تا 20 با گام 0.25 (Matlab)

حل تحلیلی:

$$\Delta(s)= s^2+s+K=0 \Rightarrow K=-s(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s\cdot\frac{\partial s}{\partial K}+\frac{\partial s}{\partial K}+1=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K}\cdot(2s+1)=-1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial K}=\frac{-1}{2s+1} \Rightarrow S_K^s=\frac{-1}{2s+1}\cdot\frac{K}{s}$$

$$S_K^s=\frac{s+1}{2s+1}$$

$2s+1=0 \to s=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ در $s=-0.5$ حساسیت بی‌نهایت است.

* تمرین: با Matlab گام K را چنان بیابید که سیستم پایدار باشد. $\Delta(s)=s^2(s+1)^2+K(s+2)=0$

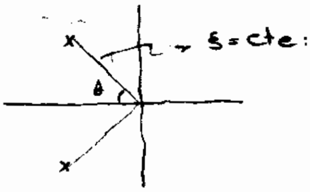
Rlocus (num, den, K)

ضرایب صورت ، ضرایب مخرج

* یافتن تقاطع خط $\xi = cte$ با مکان هندسی ریشه‌های سیستم :

$$\begin{cases} S_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \beta \\ \theta = \cos^{-1}\xi \end{cases}$$

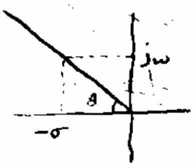
For Example: $\begin{cases} \xi = .707 \\ \theta = \cos^{-1}.707 = 45^\circ \end{cases}$



اهمیت مطلب در اینجاست که overshoot را فقط ξ تعیین می کند.

For example: $P.O < 10\% \Rightarrow \xi > 0.45$

Matlab: ginput



$$\begin{cases} \text{خط } \xi = \cos\theta = \text{ است} \\ \Delta(s) = s^n + \dots + a_1 s + a_0 \end{cases}$$

$$s = -\sigma + jw$$

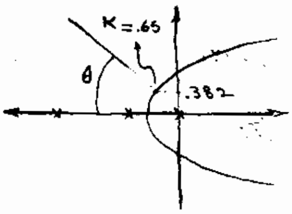
$$tg\,\theta = \frac{w}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{w}{tg\,\theta} \Rightarrow s = -\frac{w}{tg\,\theta} + jw \Rightarrow s = w\left(\frac{-1}{tg\,\theta} + j1\right)$$

$\theta = 45^\circ$ مثلا: $\Rightarrow s = w(-1+j)$

* مثال: تقاطع خط $\xi = 0.707$ را با مکان هندسی ریشه‌های سیستم پیدا کنید.

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$



$$\theta = \cos^{-1}\xi = 45^\circ \Rightarrow tg\,\theta = 1$$

$$\Rightarrow s = w(-1+j)$$

در $\Delta(s)$ جایگزین می کنیم :

$$s^2 = w^2(-1+j)^2 = -2jw^2$$

$$s^3 = -2jw(-1+j) = 2w^3(1+j)$$

$$\Rightarrow 2w^3(1+j) - 6jw^2 + 2w(-1+j) + K = 0$$

$$\text{Re}: \quad K - 2\omega^2 + 2\omega^3 = 0$$

$$\text{Im}: \quad 2\omega^3 - 6\omega^2 + 2\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0.382 \end{cases}$$

به کمک Re : $K = 0.65$

ریشه دیگر به ازای K منفی رخ می دهد.

* **راه حل سعی و خطا (گرافیکی) :** (چندان مطلوب نیست فقط به درد امتحان می خورد)

یک نقطه به طول σ روی خط $\zeta = cte$ انتخاب می کنیم (از روی شکل کیفی مکان)

سپس شرط مکان را تست می کنیم. اگر ارضا شد، یعنی همان نقطه جزء مکان هست.

اگر نه طول σ را بسته به نوع جواب زاویه کم یا زیاد می کنیم :