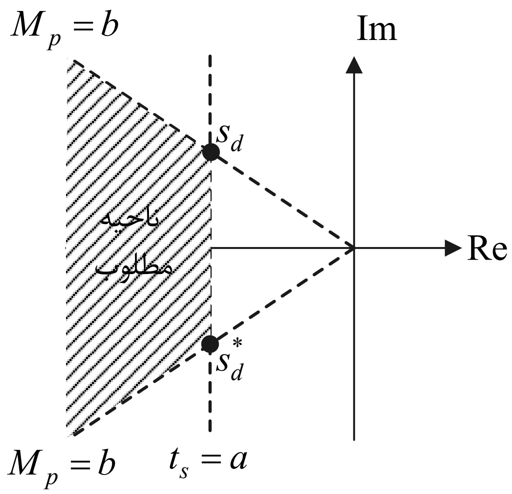
طراحی جبران ساز Lead براساس روش مکان هندسی ریشه ها

معمولاً مشخصات گذرای مطلوب در قالب زمان نشست (استقرار) و ماکزیمم فراجهش (بالازدگی) به صورت زیر بیان می شود:

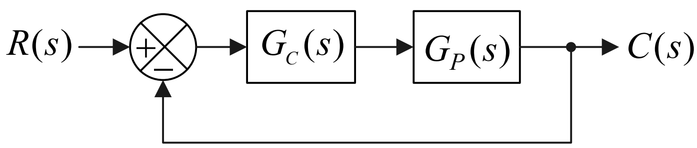
$$\begin{cases} t_s \le a \\ M_p \le b \end{cases}$$ مشخصات گذاری مطلوب

بر اساس این مشخصات گذرای مطلوب می توان محل مناسب برای قرار گرفتن قطبهای سیستم حلقه بسته را به صورت زیر به دست آورد:



معمولاً در حل مسائل عددی برای پوشش حداقل خواسته های گذرای مطلوب، با در نظر گرفتن حالت تساوی، قطبهای مطلوب (غالب) سیستم حلقه بسته مورد محاسبه قرار می گیرد:

$$s_d, s^*_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



به این ترتیب در راستای تحقق مشخصات گذرای مطلوب برای یک سیستم پس از تعیین ناحیه مطلوب برای قرار گرفتن قطبهای عالب سیستم و همچنین محاسبه قطبهای مطلوب غالب سیستم به طریق زیر عمل می کنیم:

الف) قطبهای غالب سیستم حلقه باز را محاسبه می کنیم اگر این قطبها در ناحیه مطلوب قرار بگیرند نیازی به طراحی جبران ساز نیست.

در حالتی که قطبهای غالب سیستم حلقه باز در ناحیه مطلوب قرار نداشته باشند لازم خواهد بود که جبران ساز طراحی کرد. برای این کار ابتدا بررسی می کنیم که آیا کنترل کننده تناسبی ($K > 0$) می تواند جوابگو باشد یا نه؟ این بدان معناست که بررسی شود آیا قطبهای مطلوب s_d, s_d^* به صورت غالب در روی مکان هندسی قطبهای حلقه بسته $G(s)$ قرار می گیرد.برای این منظور ابتدا بررسی می شود که آیا s_d, s_d^* در شرط زاویه مکان هندسی $G(s)$ به ازای $K > 0$ صدق می کند:

$$\angle G(s)\big|_{s=sd} = (2M+1)\pi$$

در صورت برآورده شدن شرط زاویه، مقدار منتاظر K با آن از شرط دامنه محاسبه می شود:

$$K = \frac{1}{\left|G(s)\right|_{s=sd}}$$

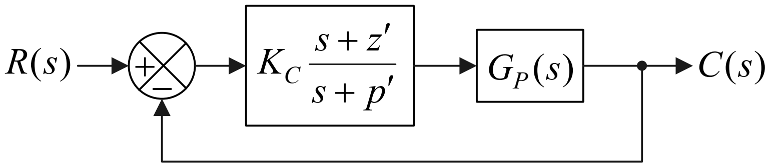
در صورتی به ازای $K > 0$ محاسبه شده s_d, s_d^* قطبهای غالب حلقه بسته باشند، کنترل کننده تناسبی محاسبه شده مشخصات گذرای مطلوب را برای سیستم برآورده می سازد

در حالتی که قطبهای مطلوب در شرط زاویه مکان هندسی $G(s)$ به ازای $K > 0$ صدق نکند و یا علیرغم برآورده ساختن شرط زاویه، قطبهای غالب حلقه بسته نباشند آنگاه حتماً باید جبرانساز طراحی کرد. برای این منظور باید حداقل زاویه مثبت φ لازم برای آنکه قطبهای مطلوب s_d, s_d^* شرط زاویه را برآورده سازند، محاسبه کرد:

$$\angle G(s)\big|_{s=sd} + \varphi = (2M+1)\pi$$

برای جبران φ مورد نظر از یک جبران ساز Lead با تابع تبدیل زیر استفاده می کنیم:

$$G_c(s) = \underset{\substack{K_c>0 \;\; z,p<0 \\ p<z}}{K_c \frac{s-z}{s-p}} = \underset{\substack{K_c, z', p'>0 \\ z'<p'}}{K_C \frac{s+z'}{s+p'}}$$



بنابراین باید جبران ساز $G_C(s)$ را به نحوی طراحی کنیم که:

شرط زاویه

$$\angle\left(K_C \frac{s+z'}{s+p'} G_C(s)\right)\Bigg|_{s=sd} = (2M+1)\pi \Rightarrow \angle\left(K_C \frac{s+z'}{s+p'}\right)\Bigg|_{s=sd} = \varphi$$

$$\xrightarrow{K_C>0} \angle\left(\frac{s+z'}{s+p'}\right)\Bigg|_{s=s_d} = \varphi$$

همانطور که ملاحظه می شود معادله به دست آمده یک معادله و دو مجهول است که بیانگر این مطلب است که در حالت کلی مسأله دارای بی نهایت جواب می باشد. به این ترتیب برای طراحی جبرانساز ابتدا باید

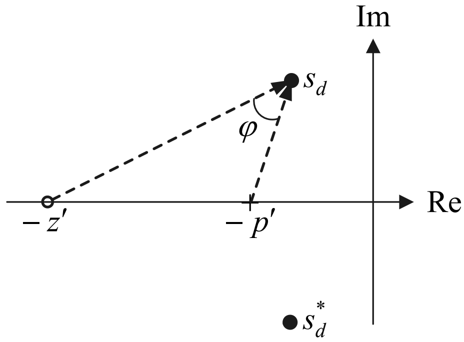
محل صفر و قطب را به نحوی تعیین کرد که شرط زاویه برآورده شود سپس از روی شرط دامنه مقدار K_C محاسبه خواهد شد.

شرط دامنه

$$\left|\left(K_C\frac{s+z'}{s+p'}G_C(s)\right)\bigg|_{s=s_d}\right|=1$$

بنابراین برای طراحی جبران ساز Lead ابتدا باید محل صفر و قطب را مشخص کرد. برای این منظور ابتدا Z' را یک عدد مثبت دلخواه مناسب اختیار کرده و سپس بر اساس شرط زاویه مقدار P' را به دست می آوریم.

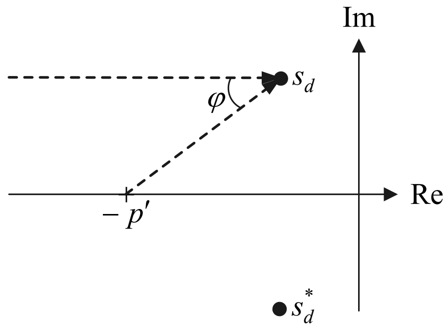
$$\angle\left(\frac{s+z'}{s+p'}\right)\bigg|_{s=s_d}=\varphi\Rightarrow\angle(s_d+z')-\angle(s_d+p')=\varphi$$



محاسبه سمت چپ ترین صفر ممکن برای جبران ساز Lead

هرچه $z=-z'$ به سمت چپ حرکت کند به تبع آن $p=-p'$ نیز به سمت چپ منتقل خواهد شد. حالت حدی این پدیده وقتی است که هرچه $z=-z'$ آنقدر به سمت چپ حرکت کند که $p=-p'$ به منتقل $-\infty$ شود. این مقدار از $z=-z'$ را می توان سمت چپ ترین صفر ممکن برای جبرانساز به حساب آورد. در واقع جبرانساز Lead در این حالت نقش یک کنترل کننده PD را ایفا خواهد کرد. امتیاز دیگری که محاسبه سمت چپ ترین صفر ممک دارد این است که به ما این امکان را می دهد که در مرحله طراحی جبرانساز Lead، $z=-z'$ را بیش از حد به سمت چپ منتقل نکرد. برای محاسبه سمت چپ ترین صفر ممکن به صورت زیر می توان عمل کرد:

$$\angle(s+z')\big|_{s=s_d}=\varphi$$



مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad s_d=-1\pm j$$

با توجه به این که $s_d=-1\pm j$ جزء قطبهای حلقه باز سیستم به صورت غالب نیست از طرفی مکان هندسی قطبهای حلقه بسته $G(s)$ به ازای $K>0$ نیز از s_d نمی گذرد (s_d در شرط زاویه $G(s)$ صدق نمی کند) پس باید جبران ساز *Lead* طراحی کرد.

$$\angle G(s)\Big|_{s=s_d}=\angle\frac{1}{s(s+1)}\Big|_{s=-1+j}=\angle\frac{1}{(-1+j+1)(-1+j)}=\angle\frac{1}{j(-1+j)}$$

$$\varphi=(2M+1)\pi+(\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{4})= \;\; M=-1\rightarrow\; -\pi+(\pi+\frac{\pi}{4})\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$

ابتدا سمت چپ ترین صفر ممکن را محاسبه میکنیم

$$\angle(s+z')\Big|_{-1+j}=\frac{\pi}{4}\rightarrow\angle(-1+j+z')=\frac{\pi}{4}\rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{1}{z'-1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z'-1}=1\rightarrow z'=2$$

برای ادامه ی مسئله $z'=\frac{3}{2}$ انتخاب میکنیم برای محاسبه ی p' داریم

$$\angle\left(\frac{s+\frac{3}{2}}{s+p'}\right)\Bigg|_{s_d=-1+j}=\frac{\pi}{4}\rightarrow\angle\left(\frac{(-1+j)+\frac{3}{2}}{(-1+j)+p'}\right)=\frac{\pi}{4}\rightarrow\angle\left(\frac{\frac{1}{2}+j}{(p'-1)+j}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}(\frac{1}{0.5})-\tan^{-1}(\frac{1}{p'-1})=\frac{\pi}{4}$$

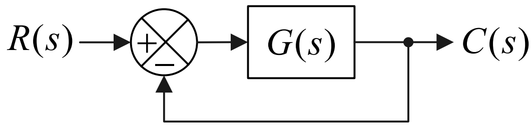
با استفاده از رابطه $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ داریم:

$$\Rightarrow \frac{2-\frac{1}{p'-1}}{1+\frac{2}{(p'-1)}}=1 \rightarrow 2-\frac{1}{p'-1}=1+\frac{2}{(p'-1)} \Rightarrow p'=4$$

$$\left| K_C\left(\frac{s+\frac{3}{2}}{s+4}\right)\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) \right|_{s=-1+j} =1 \rightarrow K_C=4$$

طراحی جبران ساز lag

فرض کنید که سیستم $G(s)$ به تنهایی یا به کمک یک جبران ساز $Lead$ مشخصات گذرای مطلوب را داشته باشد:



این بدان معناست که قطبهای مطلوب s_d^*, s_d هم زمان شرط زاویـه و شـرط دامنـه قطبهـای حلقـه بـسته $G(s)$ را برآورده می سازند:

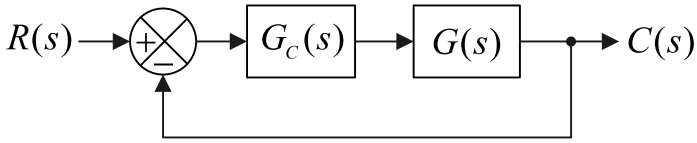
شرط زاویه: $\angle G(s)|_{s=sd}=(2M+1)\pi$

شرط دامنه: $|G(s)|_{s=sd}=1$

حال می خواهیم مشخصات ماندگار سیستم را بهبود ببخشیم. معمولاً مشخصات ماندگار مطلوب در قالب ثابت خطای استاتیکی داده می شود.

$$\begin{cases} P=0 & K_p \geq \\ P=1 & K_v \geq \\ P=2 & K_a \geq \end{cases}$$

ثابت خواهد شد که برای بهبود مشخصات ماندگار حتماً باید از یک جبران ساز lag استفاده کرد. ولی لازم است جبران ساز lag به نحوی طراحی شود که مشخصات گذرای مطلوب $G(s)$ که قبلاً برآورده شده بود، چندان تغییرنکند. به عبارت دیگر باید جبران سازی طراحی کرد که بدون آن که مشخصات گذرای سیستم فعلی را چندان تغییر دهد مشخصات ماندگار را بهبود بخشد.



بنابر این برای آنکه مشخصات گذرای مطلوب $G(s)$ با حضور جبرانساز lag به هم نخورد باید این جبرانساز به نحوی طراحی شود که:

$$\angle G(s)_c G(s) = (2M+1)\pi \Rightarrow \angle G(s)_c\Big|_{s=s_d} + G(s)\Big|_{s=s_d} = (2M+1)\pi \rightarrow \angle G(s)_c\Big|_{s=s_d} \approx 0$$

باید صفر قطب $G(s)$ حتی المقدور به هم نزدیک باشند

$$\left|\angle G_c(s)\big|_{s=s_d}\right| \le 5^\circ$$

$$\angle G(s)_c G(s)\Big|_{S=S_d} = (2M+1)\pi \Rightarrow \angle G(s)_c\Big|_{s=s_d} + \angle G(s)\Big|_{s=s_d} = (2M+1)\pi$$

$$\xrightarrow{\angle G(s)\big|_{S=S_d}=(2M+1)\pi} \angle G_C(s)\Big|_{s=s_d} = 0$$

این بدان معناست که باید صفر و قطب $G_C(s)$ حتی المقدور به هم نزدیک باشند

$$\left|G(s)_c G(s)\right|\Big|_{S=S_d} = 1 \Rightarrow \left|G(s)_c\right|\Big|_{s=s_d} \left|G(s)\right|\Big|_{s=s_d} = 1$$

$$\xrightarrow{|G(s)|\big|_{S=S_d}=1} \left|G_C(s)\right|\Big|_{s=s_d} = 1$$

بنابراین برای آنکه جبران ساز مورد نظر مشخصات گذرای $G_C(s)$ سیستم فعلی را چندان تغییر دهد باید دو خصوصیت زیر را داشته باشد:

$$\begin{cases} \angle G_C(s)\Big|_{s=s_d} = 0 \\ \left|G_C(s)\right|\Big|_{s=s_d} = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرایط عملی}} \begin{cases} \left|\angle G_C(s)\big|_{s=s_d}\right| < 5^\circ \\ \left|G_C(s)\right|\Big|_{s=s_d} \approx 1 \end{cases}$$

از طرف دیگر برای برآورده شدن مشخصات ماندگار مطلوب باید، جبران ساز به نحوی طراحی گردد که:

$$\lim_{s\to 0} s^p G_C(s)\ G(s) \ge \text{ثابت خطای مطلوب}$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{s\to 0} s^p G(s)\right)\left(\lim_{s\to 0} G_C(s)\right) \ge \text{ثابت خطای مطلوب}$$

$$\Rightarrow \left(\text{ثابت خطای فعلی}\right)\left(\lim_{s\to 0} G_C(s)\right) \ge \text{ثابت خطای مطلوب}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} G_C(s) \ge \frac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}}$$

بنابراین جبران ساز lag باید همزمان در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{cases} \begin{cases} \left| \angle G_C(s)\big|_{s=s_d} \right| < 5^\circ \\ \left| G_C(s) \right|\big|_{s=s_d} \approx 1 \end{cases} \\ \lim\limits_{s\to 0} G_C(s) \geq \dfrac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}} \end{cases}$$

$$G_c(s) = K_C \frac{s+z'}{s+p'}$$

$$K_C, z', p' > 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \left| \angle\left(K_C \dfrac{s+z'}{s+p'} \right)\Bigg|_{s=s_d} \right| < 5^\circ \Rightarrow \text{صفر و قطب جبرانساز نزدیک‌هم باشند} \\ \left| K_C \dfrac{s+z'}{s+p'} \right|\Bigg|_{s=s_d} \approx 1 \Rightarrow K_C \approx 1 \end{cases} \\ \lim\limits_{s\to 0}\left(K_C \dfrac{s+z'}{s+p'} \right) \geq \dfrac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}} \xrightarrow{K_C \approx 1} \dfrac{z'}{p'} \geq \dfrac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}} \end{cases}$$

خلاصه بحث

طراحی جبران ساز lag برای بهبود مشخصات ماندگار با فرض اینکه سیستم مشخصات گذرای مطلوب را دارد.

$\angle G(s)\big|_{s=s_d} = 2(M+1)\pi \qquad \left|G(s)\right|\big|_{s=s_d} = 1$

ثابت خطای سیستم را محاسبه می کنیم $\lim\limits_{s\to 0} s^p G(s)$ در صورتی که این ثابت خطای استاتیکی محاسبه شده از ثابت خطای مطلوب بزرگتر یا مساوی باشد نیازی به طراحی جبران ساز lag نیست. در غیر این صورت باید جبران ساز lag $\;K_c \dfrac{s+z'}{s+p'} G(s)$ را به نحوی طراحی کنیم که :

$$\begin{cases} \left| \angle\left(\dfrac{s+z'}{s+p'} \right)\Bigg|_{s=s_d} \right| < 5^\circ \\ \dfrac{z'}{p'} \geq \dfrac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}} \end{cases}$$

برای این کار ابتدا محل قطب جبران ساز $p=-p'$ را به دلخواه نزدیک به مبدأ می گیریم و براساس آن با استفاده از شرط ۲ محل صفر $z=-z'$ را به دست می آوریم:

$$\frac{z'}{p'} \geq \frac{\text{ثابت خطای مطلوب}}{\text{ثابت خطای فعلی}}$$

سپس شرط ۱ را بررسی می کنیم. در صورت صحت با استفاده از شرط دامنه مقدار K_c را محاسبه می کنیم:

$$\left| \angle\left(\frac{s+z'}{s+p'}\right)\Big|_{s=s_d} \right| < 5^\circ$$

$$\left| K_c \frac{s+z'}{s+p'} G(s) \right|\Bigg|_{s=s_d} = 1 \xrightarrow{|G(s)|\|_{s=s_d}=1} \left| K_c \frac{s+z'}{s+p'} \right|\Bigg|_{s=s_d} = 1 \Rightarrow K_c = ?$$

در غیر این صورت قطب $p=-p'$ را یک مرحله به مبدأ نزدیک تر کرده و مراحل فوق را تکرار می کنیم.

مثال

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} \\ s_d = -2 \pm j \\ K_P \geq 10 \end{cases}$$

$$\angle\left(\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right)\Bigg|_{s=-2+j} = \angle\left(\frac{1}{(-2+j+1)(-2+j+3)}\right) = \angle\left(\frac{1}{(1-j)(1+j)}\right)$$
$$= 0 - \left[\angle(1-j) + (1+j)\right]$$
$$= 0 - \left[(\pi - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}\right] = -\pi$$

$$\left| K \frac{1}{(s+1)(s+3)} \right|\Bigg|_{s=-2+j} = 1 \Rightarrow K = 2$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{3} \leq 10$$

پس باید جبران ساز lag $G_c(s) = K_C \dfrac{s+z'}{s+p'}$ را بهر گونه ای طراحی کرد که :

$$\begin{cases} -5 < \angle K_C \dfrac{s+z'}{s+p'}\Big|_{s=-2+j} \le 0 \\ \dfrac{z'}{p'} \ge \dfrac{10}{\dfrac{2}{3}} = 15 \end{cases}$$

به عنوان یک انتخاب اولیه $p' = 0.1 \Rightarrow z' = 1.5$

$$\angle \frac{s+1.5}{s+0.1}\Big|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+1.5}{-2+j+0.1} = [\pi - \tan^{-1}\frac{1}{0.5}] - [\pi - \tan^{-1}\frac{1}{1.5}] = -35.6$$

با توجه به اختلاف فاحش $G_c(s)$ با -5° محاسبه را با $p' = 0.01$ ادامه می دهیم

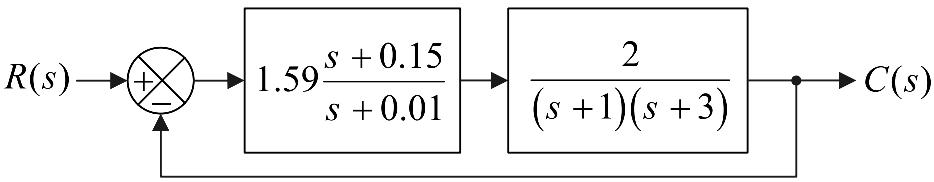
$$p' = 0.01 \Rightarrow z' = 0.15$$

$$\angle \frac{s+0.15}{s+0.01}\Big|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+0.15}{-2+j+0.01} = [\pi - \tan^{-1}\frac{1}{1.85}] - [\pi - \tan^{-1}\frac{1}{1.99}] = -1.71$$

محاسبه ی K_c

$$\left| K_C \frac{s+z'}{s+p'} \frac{2}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2+j} = 1$$

$$\left| \frac{2}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2+j} = 1 \Rightarrow K_c = \left| \frac{-1.99+j}{-1.85+j} \right| = 1.59$$



کنترل کننده ی :lag, lead

- بر اساس مشخصات گذرای مطلوب(محل قطب های مطلوب) تعداد زاویه ی لازم برای جبـران شـدن را محاسبه می کنیم

$\angle G(s) + \phi = (2M + 1)\pi$

- با استفاده از یک جبران ساز lead مقدار ϕ را جبران میکنیم
- پس از طراحی کنترل کننده ی lead ثابت های سیستم جبران شده را محاسبه مـی کنـیم در صـورتی که ثابت خطای محاسبه شده از ثابت خطای مطلوب خواسته شده کمتر باشـدآن را بـا اسـتفاده از یـک کنترل کننده ی lag جبران می کنیم.