تحلیل پاسخ زمانی سیستمهای دینامیکی:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

معمولاً برای تحلیل و ارزیابی پاسخ زمانی و رفتار دینامیکی سیستمها، پاسخ سیستم به ورودیهای زیر مورد مطالعه قرار می گیرد.

$$x(t) \in \{\delta(t) \quad u(t) \quad tu(t) \quad \sin(\omega t)\}$$

به طور کلی در تحلیل رفتار دینامیکی سیستمها، در حوزه زمان، دو دسته از مشخصات کنترلی مورد مطالعه قرار می گیرد:

۱- مشخصات ماندگار

این مشخصات، بیانگر آن است که پاسخ سیستم مورد مطالعه در صورت پایدار بودن، آیا توانایی دنبال کردن ورودی مرجع را دارد و یا اینکه در حالت دائمی، بین پاسخ سیستم و ورودی فرمان، خطای ماندگار وجود خواهد داشت. به ایت ترتیب ملاحظه می شود که شرط بررسی مشخصات ماندگار، پایداری سیستم است که اصلیترین هدف کنترل به شمار می رود به گونه ای که هر خواسته مطلوب کنترلی، پس از حصول اطمینا از پایداری، قابل بحث خواهد بود.

۲- مشخصات گذرا

این دسته از مشخصات به شکل تغییرات پاسخ سیستم در طول زمان (از لحظه شروع) و نحوه میل آن به مقدار دائمی ارتباط دارند.

بهره DC :

اگر ورودی سیستم پله واحد باشد، هدف نهایی کنترل آن است که سیستم ورودی پله را بدون خطای ماندگار دنبال کند:

$$y_{ss} = 1$$

$$y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 0} sY(s) = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s}G(s)\right] = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 0} G(s) = 1$$

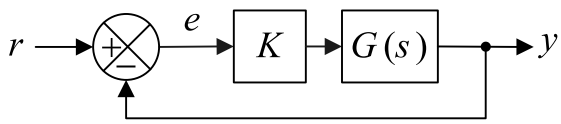
که در آن $\lim_{s\to 0} G(s) = 1$ را در صورت وجود بهره DC نیز می نامند.

خطای ماندگار سیستم:

$$e(t) = x(t) - y(t) \Rightarrow e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left[X(s) - Y(s)\right] = \lim_{s\to 0} s\left[X(s) - G(s)X(s)\right] = \lim_{s\to 0} s\left[1 - G(s)\right]X(s)$$

در سیستم کنترل حلقه بسته با فیدبک واحد منفی می توان خطای بین ورودی و خروجی سیستم را از خروجی نقطه جمع به دست آورد:



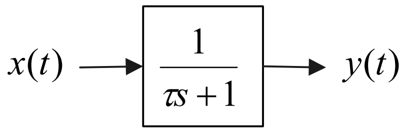
سیستم مرتبه اول:

$$G(s)=\frac{a}{s+b}$$

بنابر این برای آنکه سیستم، ورودی پله واحد رابدون خطای ماندگار دنبال کند:

$$\lim_{s\to 0} G(s)=1 \Rightarrow \lim_{s\to 0}\frac{a}{s+b}=1 \Rightarrow a=b$$

$$G(s)=\frac{a}{s+b}\xrightarrow{a=b} G(s)=\frac{a}{s+a}\xrightarrow{a=\frac{1}{\tau}} G(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

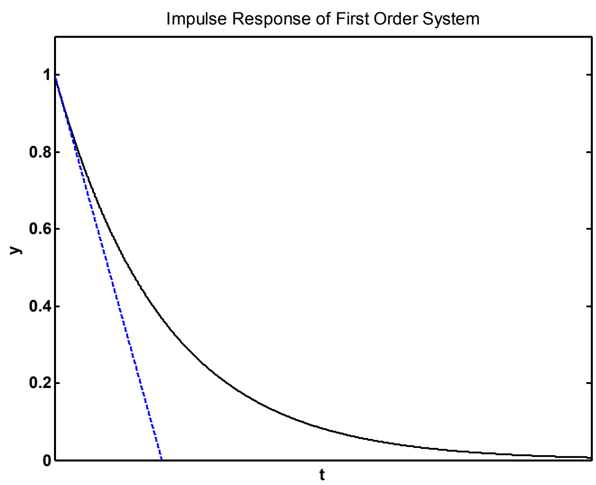


شرط پایداری:

$$\tau \geq 0$$

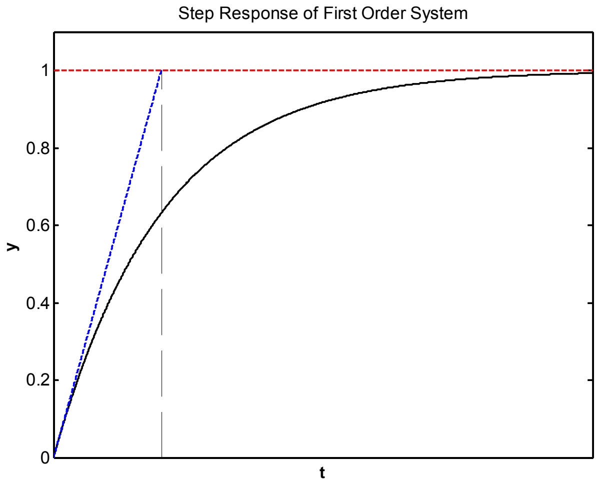
پاسخ ضربه واحد سیستم مرتبه اول:

$$x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{1\times\frac{1}{\tau s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}\right\}=\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$$



پاسخ پله واحد سیستم مرتبه اول:

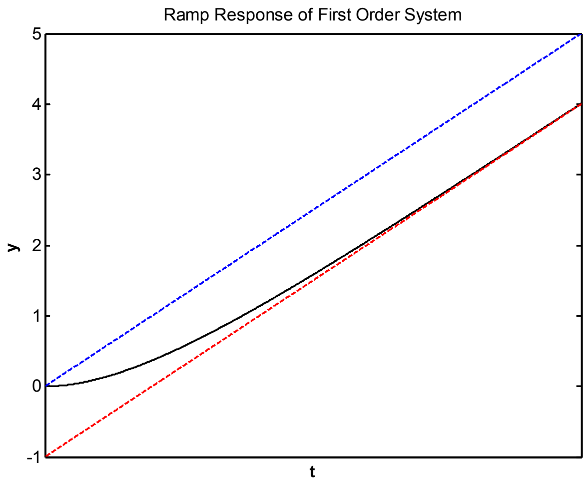
$$x(t)=u(t)\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\times\frac{1}{\tau s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{-\tau}{\tau s+1}\right\}=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$



پاسخ شیب واحد سیستم مرتبه اول:

$$x(t)=tu(t)\Rightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\times\frac{1}{\tau s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-\tau}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{\tau^2}{\tau s+1}\right\}$$

$$=\left[-\tau+t+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=\left[(t-\tau)+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$



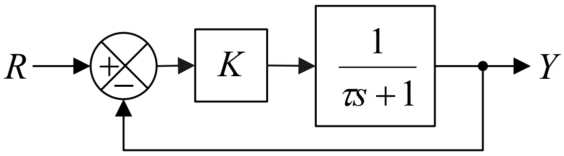
خطای ورودی شیب:

$$e(t)=x(t)-y(t)=tu(t)-\left[(t-\tau)+\tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=\tau\left[1+e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}\tau\left[1+e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=\tau$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\frac{1}{\tau s+1}\right]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{\tau s+1}\right]=\lim_{s\to 0}\frac{\tau}{\tau s+1}=\tau$$

مثال:



$$G_{cl}(s)=\frac{\dfrac{k}{\tau s+1}}{1+\dfrac{k}{\tau s+1}}=\frac{k}{\tau s+(1+k)}=\left(\frac{k}{1+k}\right)\left(\frac{1}{\dfrac{\tau}{1+k}s+1}\right)$$

$$y_{cl}(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_{cl}(s)\right\}=L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{k}{1+k}\right)\left(\frac{1}{\dfrac{\tau}{1+k}s+1}\right)\right\}$$

$$y_{cl}(t)=\left(\frac{k}{1+k}\right)L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{\dfrac{-\tau}{1+k}}{\dfrac{\tau}{1+k}s+1}\right\}=\left(\frac{k}{1+k}\right)\left[1-e^{\frac{-t}{\frac{\tau}{1+k}}}\right]u(t)$$

سیستم مرتبه دوم:

$$G(s)=\frac{a}{s^2+bs+c}$$

مقدار نهایی پاسخ پله سیستم

$$y_{ss}=1\Rightarrow\lim_{s\to 0}G(s)=1\Rightarrow\lim_{s\to 0}\frac{a}{s^2+bs+c}=1\Rightarrow a=c$$

$$b,c>0$$

برای آن که ریشه های s^2+bs+cسمت چپ محور موهومی قرار گیرند و در نتیجه سیستم پایدار باشد باید شرط $b,c>0$ برقرار باشد.

$$G(s)=\frac{a}{s^2+bs+c}\xrightarrow{a=c}G(s)=\frac{a}{s^2+bs+a}$$

تعریف می کنیم:

$$a = \omega_n^2$$
$$b = 2\xi\omega_n \qquad \xi, \omega_n > 0$$

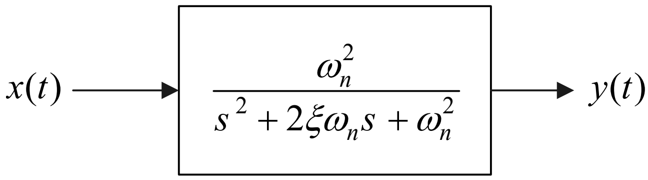
به این ترتیب داریم:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

فرکانس طبیعی غیر میرا ω_n

نسبت میرایی ξ

ضریب میرایی $\alpha = \xi\omega_n$



پاسخ پله

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right\}$$

الف.حالت فوق میرایی(میرایی ضعیف):

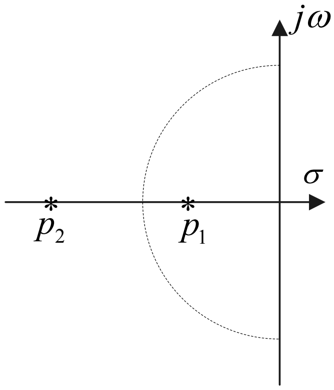
چند جمله ای مشخصه

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\Delta' > 0 \Rightarrow \Delta' = (\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 > 0 \Rightarrow \omega_n^2(\xi^2 - 1) > 0 \xrightarrow{\xi \geq 0} \xi > 1$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s - p_1)(s - p_2)$$

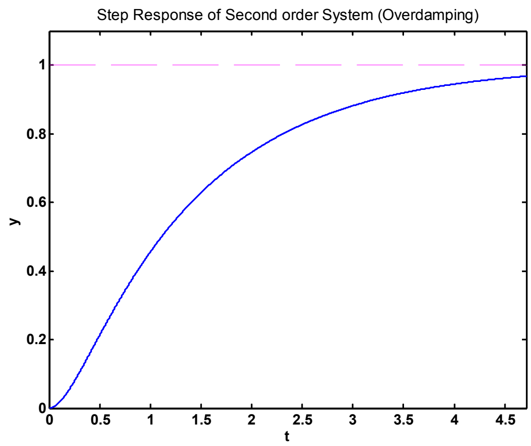


$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2 \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = 2\xi\omega_n \\ p_1 p_2 = \omega_n^2 \end{cases}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{\frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}}{(s-p_1)}+\frac{\frac{\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)}}{(s-p_2)}\right\} = \left[1+\frac{\omega_n^2}{(p_1-p_2)}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1}-\frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]u(t)$$

$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0 \qquad y''(0)\neq 0$$



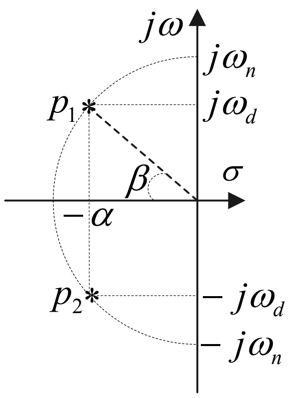
ب.حالت زیر میرایی:

$$\Delta' < 0 \Rightarrow (\xi\omega_n)^2+\omega_n^2<0 \Rightarrow \omega_n^2(\xi^2-1)<0 \xrightarrow{\xi\geq 0} 0<\xi<1$$

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0 \Rightarrow p_1,p_2 = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$= -\alpha \pm j\sqrt{\omega_n^2-\alpha^2}$$

$$= -\alpha \pm j\,\omega_d$$



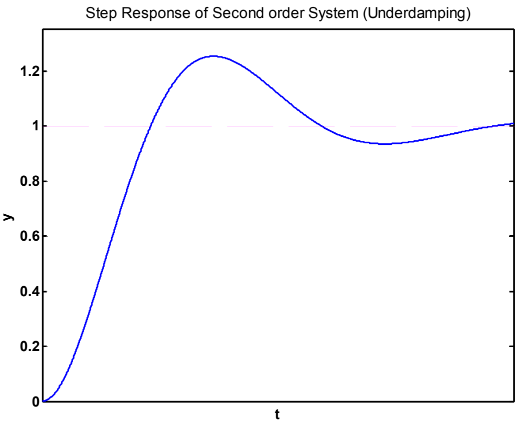
$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s+\alpha+j\,\omega_d)(s+\alpha-j\,\omega_d)}\right\}$$

$$=\left[1-\frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\left(\omega_d t+\beta\right)\right]u(t)$$

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\omega_d}{\alpha}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{\alpha}{\omega_n}=\cos^{-1}\xi$$

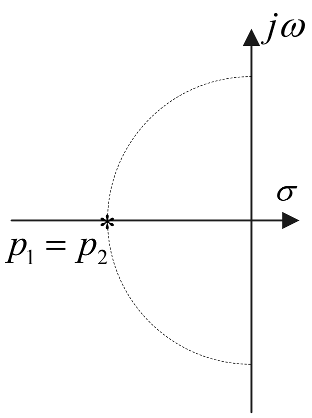
$$\beta=\begin{cases}90^\circ\\0^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\xi=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$



ج.حالت میرایی بحرانی:

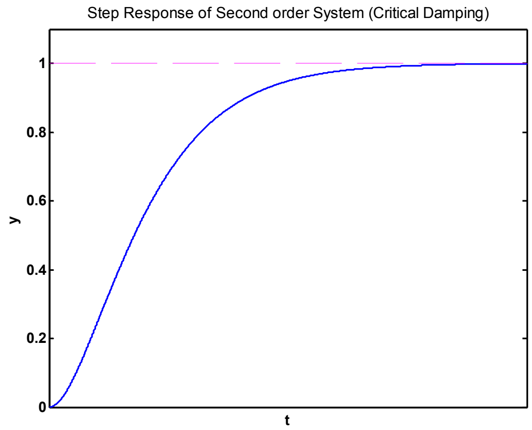
$$\Delta'=0\Rightarrow\left(\xi\omega_n\right)^2+\omega_n^2=0\Rightarrow\omega_n^2\left(\xi^2-1\right)=0\xrightarrow{\xi\geq 0}\xi=1$$

$$s^2+2\omega_n s+\omega_n^2=0\Rightarrow p_1,p_2=-\omega_n$$
$$=-\alpha$$



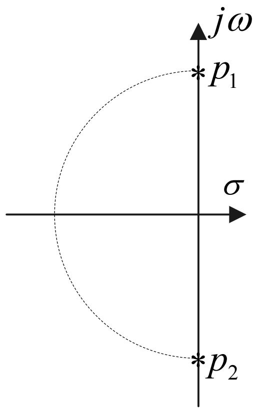
$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{\left(s+\omega_n\right)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+\omega_n}+\frac{-\omega_n}{\left(s+\omega_n\right)^2}\right\}$$
$$=\left[1-\left(1+\omega_n t\right)e^{-\omega_n t}\right]u(t)$$

$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0 \qquad y''(0)\neq 0$$



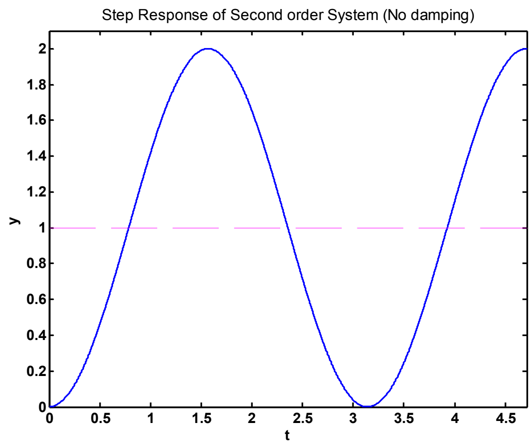
د.حالت نامیرا:

$$\xi=0 \Rightarrow p_1,p_2=\pm j\,\omega_n$$



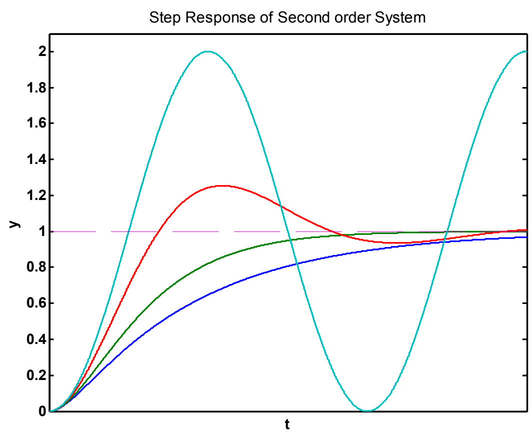
$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}\right\}=\left[1-\cos\left(\omega_n t\right)\right]u(t)$$

$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0 \qquad y''(0)\neq 0$$



درحالت کلی پاسخ پله سیستم مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$y(t)=\begin{cases}\left[1+\dfrac{\omega_n^2}{p_1-p_2}\left(\dfrac{e^{p_1t}}{p_1}-\dfrac{e^{p_2t}}{p_2}\right)\right]u(t) & :\xi>1\\ \left[1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]u(t) & :\xi=1\\ \left[1+\dfrac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\beta)\right]u(t) & :0<\xi<1\\ \left[1-\cos(\omega_n t)\right]u(t) & :\xi=0\end{cases}$$

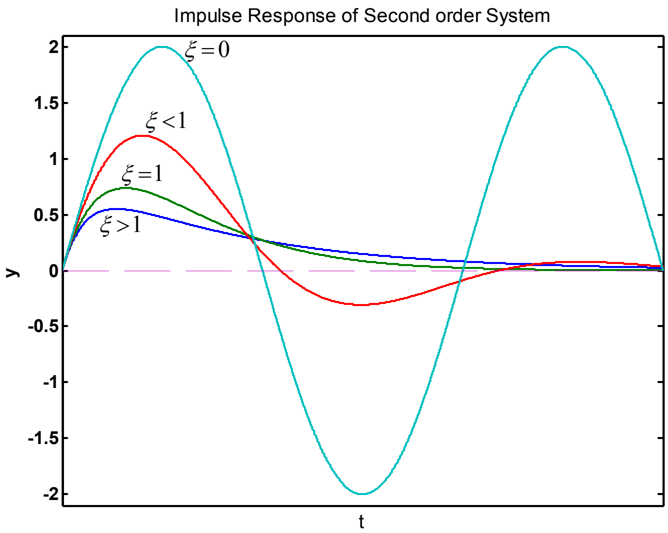


پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم: $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=\dot{y}(t)$

برای به دست آوردن پاسخ ضربه سیستم مرتبه دو در هرکدام از حالتهای بحث شده در بخش قبل ، به دو صورت می توان عمل کرد:

- محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس تابع تبدیل $G(s)$
- مشتق گرفتن از پاسخ پله سیستم

$$\bullet \quad g(t)=y'(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\omega_n^2}{p_1-p_2}\left(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}\right)\right]u(t) & :\xi>1\\ \left[\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}\right]u(t) & :\xi=1\\ \left[\dfrac{\omega_n^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)\right]u(t) & :0<\xi<1\\ \left[\omega_n \sin(\omega_n t)\right]u(t) & :\xi=0\end{cases}$$



مشخصات پاسخ زمانی (پاسخ پله) سیستمهای دینامیکی:

۱. زمان تأخیر(t_d)
۲. زمان برخاست(صعود) (t_r)
۳. زمان اوج(t_p)
۴. ماکزیمم(بیشینه)فراجهش(M_p)
۵. زمان استقرار(نشست) (t_s)

۱. زمان تأخیر(t_d): مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ پله از مقدار اولیه (صفر) به 50% مقدار نهایی (y_{ss}) برسد را زمان تأخیرگویند.

$$t_d \quad : \quad y(t)=0\rightarrow 50\% y_{ss}$$

۲. زمان برخاست(صعود)(t_r) :

الف- مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ پله از مقدار اولیه (صفر) برای اولین بار به مقـدار مقـدار نهـایی (y_{ss}) برسد:

$$t_r \quad : \quad y(t) = 0\% \rightarrow 100\% y_{ss}$$

ب- مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ پله از $5\% y_{ss}$برای اولین بار به $95\% y_{ss}$برسد:

$$t_r \quad : \quad y(t) = 0.05\% y_{ss} \rightarrow 0.95\% y_{ss}$$

ج- مدت زمانیکه طول می کشد تا پاسخ پله از $10\% y_{ss}$برای اولین بار به $90\% y_{ss}$برسد:

$$t_r \quad : \quad y(t) = 0.10\% y_{ss} \rightarrow 0.90\% y_{ss}$$

۳. زمان اوج(t_p): مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ پله از مقـدار اولیـه (صـفر) بـه بیـشترین مقـدار ممکن برسد. این زمان را می توان از رابطه روبرو بدست آورد:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

۴. ماکزیمم(بیشینه)فراجهش(M_p): بیشترین مقداری که پاسخ پله فراتـر از مقـدار حالـت پایـدار (y_{ss}) دست می یابد.

ماکزیمم فراجهش

$$M_p = y(t_p) - y_{ss}$$

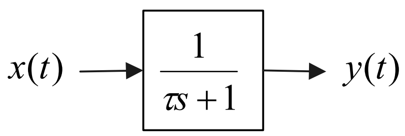
درصد ماکزیمم فراجهش

$$M_p\% = \frac{y(t_p) - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\%$$

۵. زمان استقرار(نشست) (t_s): مدت زمان از لحظه صفر که پوش پاسخ پله سیستم وارد ناحیه معیار شـده و دیگر از آن خارج نمی شود.

$$\text{معیار}\begin{cases} 2\% \rightarrow \pm 2\% y_{ss} \\ 5\% \rightarrow \pm 5\% y_{ss} \end{cases}$$

مشخصه زمانی سیستمهای مرتبه اول:



$$y(t) = \left[1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right] u(t)$$

۱. زمان تأخیر(t_d)

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=0.5\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0.5\Rightarrow t_d=\tau\ln 2$$

۲. زمان برخاست(صعود) (t_r)

معیار $0\%\rightarrow 100\%y_{ss}$

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=1\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0\Rightarrow t_r=\infty$$

معیار $5\%\rightarrow 95\%y_{ss}$

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=0.05\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0.95\Rightarrow t_1=\tau\ln\frac{100}{95}$$

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=0.95\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0.05\Rightarrow t_2=\tau\ln 20$$

$$t_r=t_2-t_1=\tau\ln 19$$

معیار $10\%\rightarrow 90\%y_{ss}$

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=0.10\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0.90\Rightarrow t_1=\tau\ln\frac{10}{9}$$

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)=0.90\Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau}}=0.10\Rightarrow t_2=\tau\ln 10$$

$$t_r=t_2-t_1=\tau\ln 9$$

۳. زمان اوج(t_p)

$$\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\frac{1}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=0\Rightarrow t_p=\infty$$

۴. ماکزیمم(بیشینه)فراجهش(M_p):

$$M_p=y(t_p)-y_{ss}=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]\Bigg|_{t_p=\infty}-1=0$$

۵. زمان استقرار(نشست) (t_s):

$$y(t)=\left[1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right]u(t)\Rightarrow t_s=\begin{cases}4\tau & : \quad 2\%\\ 3\tau & : \quad 5\%\end{cases}$$

مشخصه زمانی سیستمهای مرتبه دوم:

$$x(t)\longrightarrow\boxed{\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}}\longrightarrow y(t)$$

۱. زمان تأخیر(t_d)

۲. زمان برخاست(صعود) (t_r)

$$\xi > 1 \longrightarrow y(t) = \left[1 + \frac{\omega_n^2}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right] u(t) = 1 \Rightarrow t_r = \infty$$

$$\xi = 1 \longrightarrow y(t) = \left[1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}\right] u(t) = 1 \Rightarrow t_r = +\infty$$

$$0 < \xi < 1 \longrightarrow y(t) = \left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \beta)\right] u(t) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_d t + \beta) = 0 \Rightarrow \omega_d t + \beta = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi - \beta}{\omega_d} \xrightarrow{k=1} t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$\xi = 0 \longrightarrow y(t) = \left[1 - \cos(\omega_n t)\right] u(t) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\omega_n t) = 0 \Rightarrow \omega_n t = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{\omega_n} \xrightarrow{k=0} t_r = \frac{\pi}{2\omega_n}$$

۳. زمان اوج(t_p)

$$\xi > 1 \longrightarrow \dot{y}(t) = \left[\frac{\omega_n^2}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)\right] u(t) = 0 \Rightarrow t_p = \infty$$

$$\xi = 1 \longrightarrow \dot{y}(t) = \left[\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}\right] u(t) = 0 \Rightarrow t_p = +\infty$$

$$0 < \xi < 1 \longrightarrow \dot{y}(t) = \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)\right] u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_d t) = 0 \Rightarrow \omega_d t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega_d} \xrightarrow{k=1} t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\xi = 0 \longrightarrow y(t) = \left[\omega_n \sin(\omega_n t)\right] u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_n t) = 0 \Rightarrow \omega_n t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega_n} \xrightarrow{k=1} t_p = \frac{\pi}{\omega_n}$$

با مقایسه t_r و t_p مربوط به حالت زیر میرایی($0 < \xi < 1$)نتیجه می گیریم: $t_p > t_r$

نتایج مربوط به حالت نامیرا را می توان بر اساس نتایج حاصل از حالت زیر میرایی به ازای $\xi \to 0$ به دست آورد:

$$\xi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \omega_d = \omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{r_{\min}} = \dfrac{\pi}{2\omega_n} \\ t_{p_{\min}} = \dfrac{\pi}{\omega_n} \end{cases}$$

همچنین نتایج مربوط به حالت میرایی بحرانی را می توان بر اساس نتایج حاصل از حالت زیر میرایی به ازای $\xi \to 1$ به دست آورد:

$$\xi = 1 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \omega_d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{r_{\max}} = \infty \\ t_{p_{\max}} = \infty \end{cases}$$

به این ترتیب مشاهده می شود که کاهش بیش از حد ξ در محـدوده $1 < \xi < 0$ رفتـار سیـستم را دچـار مشکل کرده و سیستم را به سمت ناپایداری پیش می برد بنابراین برای جلوگیری از این مشکل معمولاً یـک حد پایین ξ برای در نظر گرفته می شود. به عنوان مثال: $\xi \geq 0.3$

۴. ماکزیمم(بیشینه)فراجهش(M_p)

۵.

$$\xi > 1 \longrightarrow M_p = y(t)\big|_{t=t_p} - y_{ss} = \left[1 + \frac{\omega_n^2}{(p_1 - p_2)}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]\Bigg|_{t=\infty} - 1 = 0$$

$$\xi = 0 \longrightarrow M_p = y(t)\big|_{t=t_p} - y_{ss} = \left[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]\Big|_{t=\infty} - 1 = 0$$

$$0 < \xi < 1 \longrightarrow M_p = y(t)\big|_{t=t_p} - y_{ss} = \left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \beta)\right]\Bigg|_{t=\frac{\pi}{\omega_d}} - 1$$

$$= -\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \sin\left(\omega_d\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) + \beta\right)$$

$$= -\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \sin(\pi + \beta)$$

$$= \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \sin(\beta) \xrightarrow{\sin(\beta) = \frac{\omega_d}{\omega_n}} M_p = e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)}$$

همچنین با توجه به اینکه $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ، $\alpha = \xi\omega_n$ و $\beta = \cos^{-1}\xi$ می توان دید که:

$$M_p = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\pi\cot(\beta)}$$

به طور کلی، مشاهده می شود یک رابطه یک به یک، در محدوده $0 \le \xi \le 1$ بین M_p و ξ وجود دارد.

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \ln\left(M_p\right) = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \left(LnM_p\right)^2 = \frac{-\xi^2\pi^2}{1-\xi^2}$$

$$\xrightarrow{\xi \ge 0} \xi = \frac{\left|\ln\left(M_p\right)\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(M_p\right)}}$$

بر اساس این نتیجه داریم:

$$M_p = \begin{cases} 0 & : \ \xi = 1 \\ 1 & : \ \xi = 0 \end{cases}$$

۶. زمان استقرار(نشست) (t_s)

الف- $\xi > 1 \Rightarrow p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$y(t) = \left[1 + \frac{\omega_n^2}{\left(p_1 - p_2\right)}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]u(t) = \left[1 + \frac{\omega_n^2}{\left(p_1 - p_2\right)}\left(\frac{e^{\frac{-t}{|p_1|}}}{p_1} - \frac{e^{\frac{-t}{|p_2|}}}{p_2}\right)\right]u(t)$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{1}{|p_1|} \\ \tau_2 = \dfrac{1}{|p_2|} \end{cases} \xrightarrow{\tau_1 > \tau_2} t_s = \begin{cases} 4\tau_1 & : \ 2\% \\ 3\tau_1 & : \ 5\% \end{cases}$$

بزرگترین ثابت زمانی(مربوط به سمت راست ترین قطب)انتخاب می شود.

ب- $\xi = 1 \Rightarrow p_1, p_2 = -\omega_n$

$$\tau = \frac{1}{\omega_n} \longrightarrow t_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\omega_n} & : \ 2\% \\ \dfrac{3}{\omega_n} & : \ 5\% \end{cases}$$

ج- $0 < \xi < 1 \Rightarrow p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\alpha \pm j\,\omega_d$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\xi\omega_n} \longrightarrow t_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\alpha} = \dfrac{4}{\xi\omega_n} & : \ 2\% \\ \dfrac{3}{\alpha} = \dfrac{3}{\xi\omega_n} & : \ 5\% \end{cases}$$

$$0<\xi<1 \longrightarrow y(t)=\left[1-\frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\left(\omega_d t+\beta\right)\right]u(t)$$

$$\dot{y}(t)=0 \Rightarrow t=\frac{k\pi}{\omega_d} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$\dot{y}(t)=0 \Rightarrow t=\frac{k\pi}{\omega_d} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

به ازای k های فرد نقاط min و به ازای k های زوج نقاط max بدست می آید.

با توجه به مشخصات بیان شده دیده می شود که در محدوده $0<\xi<1$ با افزایش t_r ، t_s کاهش می یابد و بالعکس.

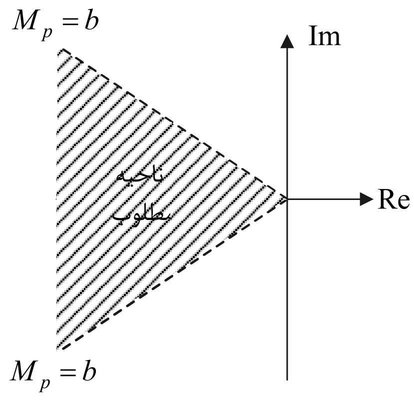
شرایط مطلوب کنترلی:

$$\begin{cases} M_p \le a \\ t_s \le b \end{cases} \xrightarrow{\text{در حالت تساوي}} \begin{cases} M_p = a \\ t_s = b \end{cases}$$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow p_1,p_1=-\xi\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

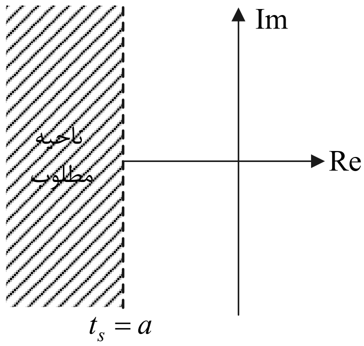
۱.مکان هندسی قطب هایی که M_p یکسان دارند:

$$M_p=a \Rightarrow \xi=\frac{\left|\ln\left(M_p\right)\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\left(M_p\right)}} \Rightarrow \beta=\cos^{-1}\left(\beta\right)$$



۲.مکان هندسی قطب هایی که زمان نشست (t_s) یکسان دارند:

$$t_s=b \xrightarrow{2\%} \frac{4}{\alpha}=b \Rightarrow \alpha=\xi\omega_n=\frac{4}{b}$$



بنابراین با داشتن $M_p = a$ $\;t_s = b$ می توان محل قطب های مطلوب سیستم را بدست آورد:

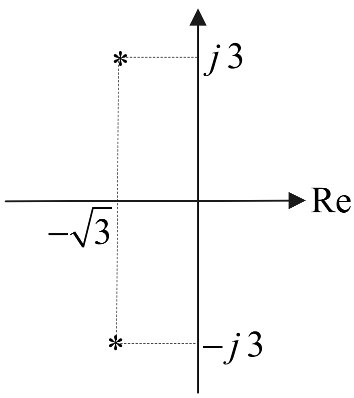
مشخصات گذاری مطلوب

$$\begin{cases} t_s = a \xrightarrow{2\%} 4\tau = a \rightarrow \dfrac{4}{\alpha} = a \rightarrow \dfrac{4}{\zeta\omega_n} = a \rightarrow \zeta\omega_n = \dfrac{4}{a} \\ M_p = b \rightarrow e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = b \rightarrow \xi = \dfrac{|\ln b|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln b)2}} \end{cases}$$

د-

$$\xi = 0 \Rightarrow p_1, p_2 = \pm j\,\omega_n$$
$$\tau = \infty \Rightarrow t_s = \infty$$

مثال: محل قطب های حلقه بسته ی سیستمی به شکل زیر است زمان فراجهش و زمان استقرار چیست:



$$\begin{cases} \omega_d = 3 \\ \alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad t_s = \begin{cases} 4\tau = \dfrac{4}{\alpha} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \quad : \; 2\% \\ 3\tau = \dfrac{3}{\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \quad : \; 5\% \end{cases}$$

قطب غالب و کاهش مرتبه سیستم:

قطب غالب (Dominant Pole):

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{N(s)}{D(s)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s-p_1}+\text{.........}+\frac{A_n}{s-p_n}\right\}$$

$$=A_0u(t)+\left(A_1e^{p_1t}+\cdots+A_ne^{p_nt}\right)$$

$$=A_0u(t)+\left(A_1e^{\frac{-t}{\frac{1}{|p_1|}}}+\qquad+A_ne^{\frac{-t}{\frac{1}{|p_n|}}}\right)u(t)$$

$$=A_0u(t)+\left(A_1e^{\frac{-t}{\tau_1}}+\qquad+A_ne^{\frac{-t}{\tau_n}}\right)u(t)\qquad:\qquad \underset{i=1,2,\cdots,n}{\tau_i}=\frac{1}{|p_i|}$$

$$A_0=\lim_{s\to 0}G(s)$$

$$A_K=\lim_{s\to p_k}(s-p_K)\frac{1}{s}G(s)=\lim_{s\to p_k}(s-p_K)\frac{b_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{s\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

به این ترتیب به طور کلی می توان گفت، قطب یا قطبهایی در پاسخ گذرای سیستم ماندگاری بیشتری دارند که سمت راست تر قرار گرفته باشند.

مثال

$$G(s)=\frac{s-z}{(s-p_1)(s-p_2)}\qquad p_1,p_2<0\qquad p_2<p_1$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{s-z}{s-p_1\quad s-p_2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{-z}{p_1p_2}}{s}+\frac{\frac{p_1-z}{p_1(p_1-p_2)}}{s-p_1}+\frac{\frac{p_2-z}{p_1(p_2-p_1)}}{s-p_2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{G_0}{s}+\frac{A_1}{s-p_1}+\text{.........}+\frac{A_n}{s-p_n}\right\}$$

$$=L^{-1}\left(\frac{-z}{p_1p_2}+\frac{p_1-z}{p_1(p_1-p_2)}e^{p_1t}+\frac{p_2-z}{p_2(p_2-p_1)}\ e^{p_2t}\quad\right)u(t)$$

$$=\frac{-z}{p_1p_2}+\frac{1}{(p_1-p_2)}\left(\frac{p_1-z}{p_1}{}^{\frac{-t}{\frac{1}{|p_1|}}}+\frac{p_2-z}{p_2}{}^{\frac{-t}{\frac{1}{|p_2|}}}\right)$$

بنابر این میتوان قطب (قطبهای) غالب را سمت راست ترین قطب (قطبهای) یک سیستم دانست که صفر (صفرهایی) همجنس و هم مرتبه آن در نزدیکشان نباشد.

کاهش مرتبه (Order Reduction)

سیستم اصلی $G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$

ویژگیها:

۱. مناسب یا اکیداًمناسب بودن
۲. پاسخ حالت ماندگار به ورودی پله واحد $y_{ss}=G(0)$
۳. $y(0^+),\dot{y}(0^+),\ddot{y}(0^+),\cdots$

سیستم کاهش مرتبه یافته $\hat{G}(s)=\frac{\hat{N}(s)}{\hat{D}(s)}$

$\hat{D}(s)$: چند جمله ای مشخصه ای که ریشه های آن قطب های غالب سیستم اصلی هستند.

$\hat{N}(s)$: چند جمله ای مجهول با ضرایب مجهول به نحوی که:

- اختلاف درجه صورت و مخرج $G(s) \le$ اختلاف درجه صورت و مخرج $\hat{G}(s)$
- برای محاسبه ضرایب مجهول $\hat{N}(s)$ سعی می شود بیشترین شباهت بین $y(t)$ و $\hat{y}(t)$ برقرار باشد:

$$\hat{y}_{ss}=y_{ss}\Rightarrow\hat{G}(0)=G(0)$$
$$\hat{y}(0^+)=y(0^+)$$
$$\dot{\hat{y}}(0^+)=\dot{y}(0^+)$$
$$\ddot{\hat{y}}(0^+)=\ddot{y}(0^+)$$
$$\vdots$$

مثال:

$$G(s)=\frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

قطب غالب $p_1=-1$

$$\hat{G}(s)=\frac{A}{s+1}$$

$$\hat{G}(0)=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s+1}=A$$

$$\hat{G}(0)=G(0)\Rightarrow A=1 \quad \Rightarrow \hat{G}(s)=\frac{1}{s+1}$$

مثال:

$$G(s)=\frac{6s+5}{(s+1)(s+5)}$$

قطب غالب

$$p_2=-5$$

$$\hat{G}(s)=\frac{A}{s+5}$$

$$\hat{G}(0)=\lim_{s\to 0}\frac{A}{s+5}=\frac{A}{5}$$

$$\hat{G}(0)=G(0)\Rightarrow \frac{A}{5}=1\Rightarrow A=1 \quad \Rightarrow \hat{G}(s)=\frac{5}{s+5}$$

پاسخ حالت دائمی سینوسی و ارتباط آن با تابع تبدیل سیستم:

$$x(t)=A\sin(\omega t)\longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=?$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$y(t)=L^{-1}\{X(s)G(s)\}\rightarrow y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}G(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{N(s)}{D(s)}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{K}{s-j\omega}+\frac{K^*}{s+j\omega}+\frac{A_1}{s-p_1}+\dots\dots\dots+\frac{A_n}{s-p_n}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{K}{s-j\omega}+\frac{K^*}{s+j\omega}\right\}+\left(A_1e^{p_1t}+\cdots+A_ne^{p_nt}\right)u(t)$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{K(s+j\omega)+K^*(s-j\omega)}{s^2+\omega^2}\right\}+\left(A_1e^{p_1t}+\cdots+A_ne^{p_nt}\right)u(t)$$

که در آن:

$$K=\left\{\frac{\omega}{s+j\omega}G(s)\right\}\Bigg|_{s=j\omega}=\frac{G(j\omega)}{2j} \quad \text{و} \quad K_i=\left\{(s-p_i)G(s)\right\}\Big|_{s=p_i}$$

$$y_{ss}=L^{-1}\left\{\frac{K(s+j\omega)+K^*(s-j\omega)}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{G(j\omega)}{2j}+\frac{G^*(j\omega)}{-2j}\right)s+j\omega\left(\frac{G(j\omega)}{2j}-\frac{G^*(j\omega)}{-2j}\right)}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{\frac{2j\,\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{2j}s+j\omega\frac{2\,\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}{2j}}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}s+\omega\,\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}s}{s^2+\omega^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{\omega\,\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$=\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}\cos(\omega t)+\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}\sin(\omega t)$$

$$=\sqrt{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}+\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right)\right)$$

$$=|G(j\omega)|\sin(\omega t+\angle G(j\omega))$$

به این ترتیب داریم:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)\longrightarrow\boxed{G(j\omega)}\longrightarrow y_{ss}(t)=A|G_C(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\angle G_c(j\omega))$$

نتایج حاصل را می توان با استفاده از مفهوم فازور نیز به صورت زیر به کار برد:

$$\overline{y}=G(j\omega).\overline{X}=G(j\omega)Ae^{j\varphi}=|G(j\omega)|e^{j\varphi}=|G(j\omega)|\left|\overline{X}\right|e^{j\angle(G(j\omega+\angle\overline{X})}$$

$$y_{SS}=\left|\overline{Y}\right|\sin(\omega t+\angle\overline{Y})\Leftrightarrow\begin{cases}\angle\overline{Y}=\angle G(j\omega)+\angle\overline{X}\\ \left|\overline{Y}\right|=\left|\overline{X}\right|G(j\omega)\end{cases}$$

معیار پایداری روث - هرویتز

یک سیستم خطی تغییرناپذیربازمان با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

شرط پایداری این سیستم آن است که تمامی قطبهای تابع تبدیل (ریشه های $D(s)$) در سمت چپ محور موهومی قرار گرفته باشند. مشکل اصلی در راستای تحلیل پایداری سیستم بر اساس این تعریف، عدم وجود یک روش تحلیلی جامع برای محاسبه تمامی ریشه های چندجمله ای مشخصه سیستم است. بنابر این به عنوان یک راه حل برای تحلیل پایداری سیستم بدون نیاز به محاسبه ریشه های چندجمله ای مشخصه، استفاده از معیار روث – هرویتز است که دارای دو شرط لازم و کافی می باشد.

شرط لازم: تمامی ضرایب چند جمله ای مشخصه (a_i ها) مخالف صفر و هم علامت باشند

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n$$

$$D(s)=a_0[s^n+a_1's^{n-1}+\ldots+a_{n-1}'s+a_n']$$

a_i' مثبت و غیر صفر

شرط کافی: برای بررسی شرط کافی ابتدا جدول(آرایه) روث را مطابق روش زیر تشکیل می دهیم. ($n+1$ ردیف)

s^n	a_0	a_2	a_4	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	
$\vdots$	c_1	c_2	c_3	
$\vdots$	...	...	...	
s^1				
s^0				

دو سطر اول جدول روث با استفاده مستقیم از ضرائب چند جمله ای مشخصه تشکیل شده و بر اساس آن عناصر بقیه سطرهای جدول روث محاسبه و تکمیل می گردد.

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}\qquad b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}\qquad \cdots$$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}\qquad c_2=\frac{b_1a_5-b_3a_1}{b_1}\qquad \cdots$$

برای عناصر ردیف های بعدی هم همین کار را می کنیم به گونه ای برای محاسبه عناصر هر ردیف از عناصر دو ردیف قبل از آن استفاده می کنیم.

- اگر n فرد باشد دو ردیف اول تعداد عناصر یکسان دارند.
- اگر n زوج باشد ردیف دوم یک عنصر کمتر از ردیف اول دارد.

پس از تکمیل جدول روث برای بررسی شرط کافی عناصر ستون اول را در نظر می گیریم اگر تمامی عناصر ستون اول غیر صفر و هم علامت (هیچ تغییر علامتی در ستون اول نباشد) باشند به این معنی است که تمام ریشه های چند جمله ای مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار دارند. در غیر این صورت به تعداد تغییر علامت های صورت گرفته در عناصر ستون اول، ریشه سمت راست وجود دارد.

مثال

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 8s + 12$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 6 & 12 \\ s^3 & \cancel{2} \to 1 & \cancel{8} \to 4 & \\ \hline s^2 & \cancel{2} \to 1 & \cancel{12} \to 6 & \\ s^1 & -\cancel{2} \to -1 & & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{array}$$

همانطور که ملاحظه می شود دو تا تغییر علامت در میان عناصر ستون اول جدول روث وجود دارد که بیانگر وجود دو ریشه سمت راست محور موهومی است.

نکته: تمامی اعداد یک ردیف را می توان در یک عدد مثبت دلخواه ضرب یا بر یک عدد مثبت دلخواه تقسیم کرد.

حالتهای خاص

۱. در تشکیل جدول روث اگر اولین عنصر از یک سطر صفر گردد در این حالت صفر را با یک عدد مثبت خیلی کوچک ($\varepsilon \to 0^+$) جایگذاری کرده براساس آن جدول روث را تکمیل می کنیم حال در ارتباط با عناصر ستون اول جدول روث حد عبارتهای شامل εرا به ازای $\varepsilon \to 0^+$ محاسبه می کنیم در این حالت اگر در ستون اول عنصر قبل و عنصر بعد از عنصر صفر هم علامت باشند نشان دهنده وجود یک جفت ریشه موهومی (قرینه) است در غیر این صورت یعنی اگر عنصر قبل و عنصر بعد از عنصر صفر غیر هم علامت باشند نشان دهنده وجود یک ریشه سمت راست محور موهومی است.

مثال

$$D(s) = s^4 + 2s^2 + 5s + 1$$

s^4	1	2	1
s^3	$0 \to \varepsilon$	5	
s^2	$\dfrac{2\varepsilon - 5}{\varepsilon}$	1	
s^1	$\dfrac{5(\frac{2\varepsilon - 5}{\varepsilon}) - \varepsilon}{\frac{2\varepsilon - 5}{5}}$		
s^0	1		

$$\Downarrow$$

$$1$$

$$0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\varepsilon - 5}{\varepsilon} = -\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{5(2\varepsilon - 5) - \varepsilon^2}{2\varepsilon - 5} = 5$$

$$1$$

همانطور که ملاحظه می شود دو تا تغییر علامت در میان عناصر ستون اول جدول روث وجود دارد که بیانگر وجود دو ریشه سمت راست محور موهومی است.

مثال

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 3$$

s^5	1	2	1
s^4	2	4	3
s^3	$0 \to \varepsilon$	$\cancel{+\frac{1}{2}} \to -1$	
s^2	$\frac{4\varepsilon+2}{\varepsilon}$	3	
s^1	$\frac{-1(\frac{4\varepsilon+2}{\varepsilon})-3\varepsilon}{\frac{4\varepsilon+2}{\varepsilon}}$		
s^0	3		

$$\Downarrow$$

$$1$$

$$2$$

$$0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4\varepsilon+2}{\varepsilon}=+\infty$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1(4\varepsilon+2)-3\varepsilon^2}{4\varepsilon+2}=-1$$

$$3$$

توضیحات: چون عنصر قبل و بعد از صفر هم علامت هستند بنابراین یک جفت ریشه روی محور موهومی وجود دارد. همچنین به دلیل دو تغییر علامت در میان عناصر ستون اول دو ریشه سمت راست محور موهومی و نهایتاً یک ریشه سمت چپ محور موهومی وجود دارد.

۲. اگر در تشکیل جدول روث یک ردیف تمام صفر اتفاق بیافتد به معنای وجود ریشه های قرینه است. در حالت کلی این به معنای آن است که سیستم ناپایدار شده است. در این صورت اگر ردیف تمام صفر در سطر متناظر با s^k جدول روث اتفاق بیافتد نشان دهنده وجود تعداد $k+1$ ریشه قرینه است.

k زوج $\leftarrow$ $k+1$ فرد یک ریشه در مبدأ و $\frac{k}{2}$ جفت ریشه قرینه

k فرد $\leftarrow$ $k+1$ زوج $\frac{k+1}{2}$ جفت ریشه های قرینه

در این صورت برای تعیین وضعیت ریشه های قرینه، با استفاده از عناصر ردیف قبل از ردیف تمام صفر یک چند جمله ای کمکی $Q(s)$ می نویسیم و ضرایب $\frac{dQ(s)}{ds}$ را جایگزین عناصر ردیف تمام صفر می کنیم و براساس آن جدول روث را تکمیل می کنیم.

الف) ریشه های قرینه چند جمله ای اصلی همان ریشه های $Q(s)$ هستند

ب) هر گونه اطلاعات ناشی از تغییر علامت در ستون اول جدول روث از سطر تمام صفر به بعد به دست آید در مورد همان ریشه های قرینه است.

مثال:

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 6$$

s^5	1	2	3
s^4	$\cancel{2}\to 1$	$\cancel{4}\to 2$	$\cancel{6}\to 3$
s^3	$0 \to \cancel{4} \to 1$	$0 \to \cancel{4} \to 1$	
s^2	1	3	
s^1	-2		
s^0	3		

$$K = 3$$
$$Q(s) = s^4 + 2s^2 + 3$$
$$\frac{dQ(s)}{ds} = 4s^3 + 4$$

توضیحات:

با توجه به اینکه ردیف تمام صفر در سطر متناظر با s^3 صورت گرفته بنابراین دو جفت ریشه قرینه وجود دارد. از طرف دیگر به دلیل ۲ تغییر علامت صورت گرفته در ستون اول (از سطر تمام صفر به بعد) از هر جفت ریشه قرینه یکی در سمت راست محور موهومی قرار دارد.

$$Q(s) = s^4 + 2s^2 + 3 = 0 \to s = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{2}j}$$

مثال:

$$\frac{24(s-2)}{s^6 + 4s^5 + 11s^4 + 32s^3 + 40s^2 + 64s + 48}$$

s^6	1	11	40	48
s^5	$\cancel{4}\to 1$	$\cancel{32}\to 8$	$\cancel{64}\to 16$	
s^4	$\cancel{3}\to 1$	$\cancel{24}\to 8$	$\cancel{48}\to 16$	
s^3	$0\to 1$	$0\to 4$		
s^2	4			
s^1	0			
s^0	4			

$$Q(s)=s^4+8s^2+16$$
$$\frac{dQ(s)}{ds}=4s^3+16s$$

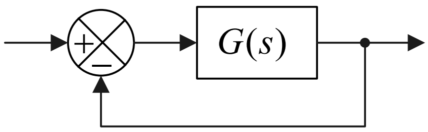
توضیحات: با توجه به اینکه ردیف تمام صفر در سطر متناظر با s^3 صورت گرفته بنـابراین دو جفـت ریـشه قرینه وجود دارد. از طرف دیگر به دلیل وقوع اولین عنصر صـفر در ردیـف متنـاظر بـا s^1 در سـتون اول (از سطر تمام صفر به بعد) از دو جفت ریشه قرینه یک جفت به صورت موهومی مزدوج قرار دارند و با توجه بـه عدم تغییر علامت، جفت دیگر نیز به صورت موهومی مزدوج قرار دارند.

$$Q(s)=s^4+8s^2+16=0\Rightarrow s=\pm 2j$$

کاربردهای معیار روث – هرویتز

تعیین محدوده تغییرات پارامتر یا پارامترهایی در چند جمله ی مشخصه به شرط پایداری.

مثال: برای سیستم شکل زیر محدوده مجاز k_1 و k_2 را به نحوی تعیین کنید که سیستم حلقه بسته و حلقه باز پایدار باشد



$$G(s)=\frac{K_1}{s^3+2s^2+2s+K_2}$$
$$\lambda_{OL}(s)=s^3+s^2+2s+K_2$$

شرط لازم:

$$K_2>0$$

s^3	1	2
s^2	2	K_2
s^1	$\frac{4-K_2}{2}$	
s^0	K_2	

شرط کافی:

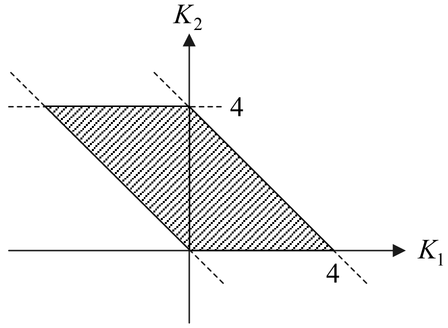
$$\frac{4-K_2}{2}>0\Rightarrow K_2<4$$

$$G_{cl}(s)=\frac{\dfrac{k_1}{s^3+2s^2+2s+k_2}}{1+\dfrac{k_1}{s^3+2s^2+2s+k_2}}=\frac{k_1}{s^3+2s^2+2s+k_2+k_1}\Rightarrow \lambda_{CL}=s^3+2s^2+2s+k_2+k_1$$

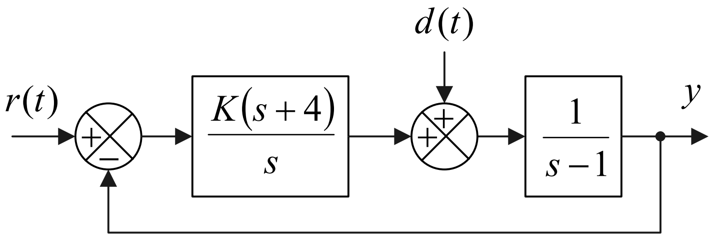
شرط لازم: $K_1+K_2>0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & K_2+K_1 \\ \hline s^1 & \dfrac{4-\left(K_2+K_1\right)}{2} & \\ s^0 & K_2+K_1 & \end{array}$$

شرط کافی: $\dfrac{4-K_2-K_1}{2}>0\Rightarrow K_2+K_1<4$



مثال



K چقدر باشد که اگر $r(t),d(t)=u(t)$ باشد $y_{ss}=1$ باشد

$$Y_R=\frac{1}{s}\ \frac{\dfrac{K(s+4)}{s}\ \dfrac{1}{s-1}}{1+\dfrac{K(s+4)}{s}\ \dfrac{1}{s-1}}=\frac{K(s+4)}{K(s+4)+s(s-1)}\ \frac{1}{s}\Rightarrow y_{ss}=1$$

$$Y_D = \frac{1}{s}\;\frac{\dfrac{1}{s-1}}{1+\dfrac{K(s+4)}{s}\;\dfrac{1}{s-1}} = \frac{s}{K(s+4)+s(s-1)}\;\frac{1}{s} \Rightarrow y_{ss}=0$$

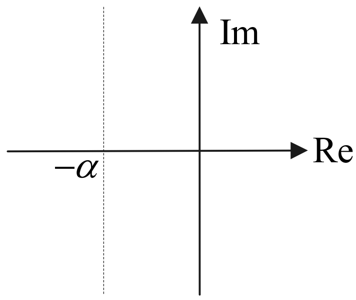
$$y_{ss} = 1+0=1$$

نکته حائز اهمیت آن است که مقدار به دست آمده فوق برای K به شـرط پایـداری سیـستم حلقـه بـسته، برقرار خواهد بود چرا که شرط رسیدن به مقدار پایدار، پایداری سیستم است. بنابراین داریم:

$$s^2+(K-1)s+4=0 \quad \Rightarrow \quad K-1>0 \quad \Rightarrow \quad K>1$$

پایداری نسبی

معیار سنجش پایداری نسبی آن است که قطب (قطبهای) غالب حداقل فاصله α را از محور موهومی داشته باشند.



به عبارت دیگر برای برقراری پایداری نسبی باید تمامی قطبهای سیستم سمت چپ محوری به موازات محور موهومی و با فاصله $-\alpha$ از آن قرار بگیرند. برای بررسی این مورد می توان با تغییر پارامتر $s \to s+(-\alpha)$ چندجمله ای $\lambda_1(s)$ را از روی چند جمله ای مشخصه سیستم ($\lambda(s)$) به دست آورده و سپس معیار روث هرویتز را به آن اعمال کرد.

$$\lambda_1(s)=\lambda(s)\Big|_{s\to s+(-\alpha)}$$