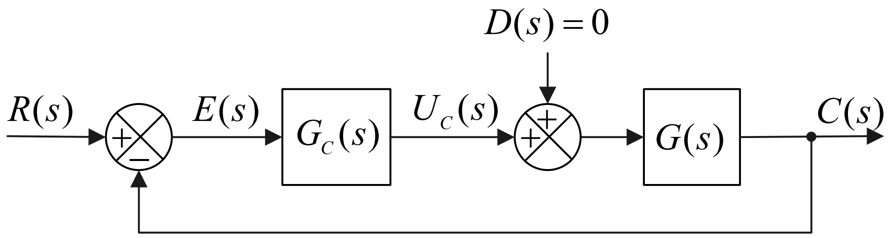
عملیات کنترلی پایه:



کنترل کننده تناسبی K_P

$$u_C(t)=K_P e(t) \quad K_P>0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C(s)=K_p E(s)$$

$$E(s) \longrightarrow \boxed{G_C(s)} \longrightarrow U_C(s)$$

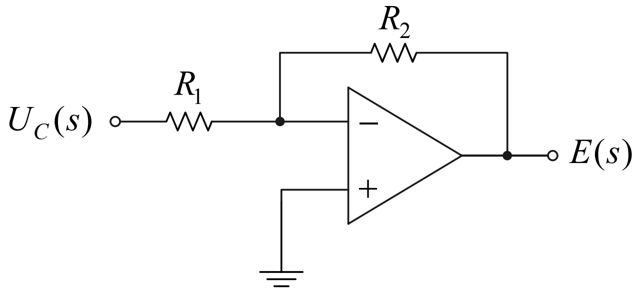
$$G_{CL}(s)=\frac{K_P G(s)}{1+K_P G(s)} \xrightarrow{\text{DC Gain}} G_{CL}(0)=\frac{K_P G(0)}{1+K_P G(0)}$$

خواص کنترل کننده ی تناسبی

۱- افزایش سرعت سیستم

۲- دارای خطای ماندگار به ورودی پله واحد

۳- افزایش K_P می تواند منجربه ناپایداری سیستم شود.



$$\frac{U_c(s)}{E(s)}=-\frac{R_2}{R_1}$$

کنترل کننده ی انتگرالی PI (بهبود رفتار ماندگار سیستم)

$$u_C(t)=K_I\int_0^t e(\tau)d\tau$$

$$U_C(s)=\frac{K_I}{s}E(s)=\frac{1}{\tau s}E(s)\rightarrow G_C(s)=\frac{K_I}{s}=\frac{1}{\tau_I s}$$

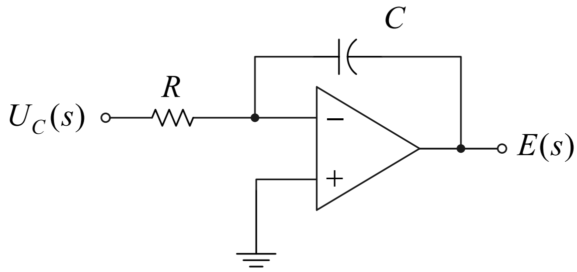
$$G_{CL}(s)=\frac{\frac{K_I}{s}G_c(s)}{1+\frac{K_I}{s}G_c(s)}\xrightarrow{\text{DC Gain}}G_{CL}(0)=1$$

خواص کنترل کننده ی انتگرالی

۱- سیستم پله واحد را بدون خطای ماندگار تعقیب می کند.

۲- سرعت سیستم کاهش می یابد.

۳- امکان ناپایداری سیستم بیشتر می شود.



$$\frac{U_C(s)}{E(s)}=-\frac{1}{RCS}$$

کنترل کننده ی مشتق گیر PD (بهبود رفتار گذاری سیستم)

$$u_C(t)=K_D\frac{d}{dt}e(t)\Rightarrow U_C(s)=K_D\,s\,E(s)=\tau_D s\,E(s)$$

$$G_{CL}(s)=\frac{K_D s\,G(s)}{1+K_D s\,G(s)}\xrightarrow{\text{DC Gain}}G_{CL}(0)=0$$

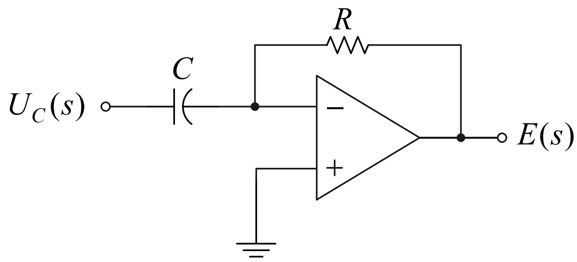
خواص کنترل کننده ی مشتق گیر

۱-افزایش سرعت سیستم

۲-افزایش پایداری.

۳-دادن خاصیت پیش بینی گری به سیستم.

۴-خطای ماندگار به ورودی پله واحد ۱۰۰٪ می گردد.



$$\frac{U_C(s)}{E(s)} = -RCS$$

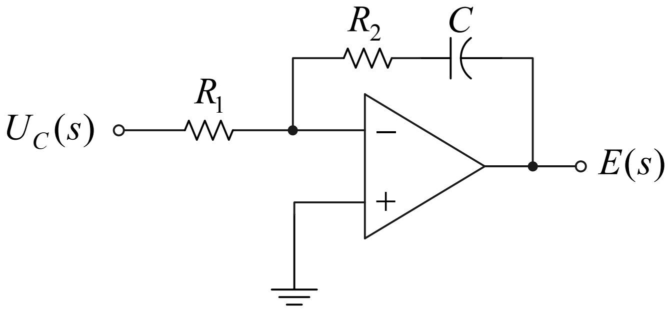
کنترل کننده انتگرالی تناسبی PI (بهبود رفتار ماندگار با حفظ رفتار گذرا)

$$u_C(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau$$

$$U_C(s) = (K_P + \frac{K_I}{s})E(s) = K_P(1 + \frac{1}{\tau_I s})E(s)$$

$$G_C(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

در اینجا ما ۲ درجه ی آزادی داریم

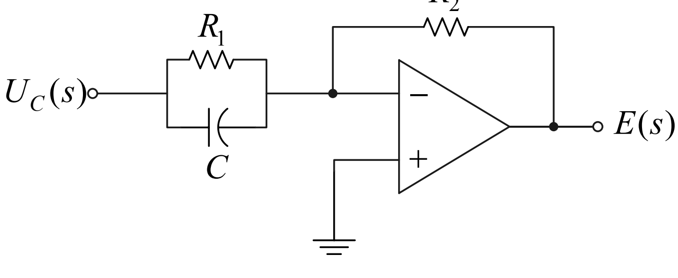


$$U_C(s) = -(\frac{R_2 + \frac{1}{CS}}{R_1}) = -[\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 CS}] = -\frac{R_2}{R_1}[1 + \frac{1}{R_2 CS}] \rightarrow \begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = K_P \\ \frac{1}{R_1 C} = K_I \end{cases}$$

کنترل کننده مشتق گیر تناسبیPD (بهبود رفتار گذرا با حفظ رفتار ماندگار)

$$u_C(t) = k_p e(t) + \frac{de(t)}{dt} \rightarrow U(s) = K_P E(s) + K_D\, s\, E(s)$$

$$G(s) = k_P + k_D\, s = K_P(1 + \tau_D s)$$



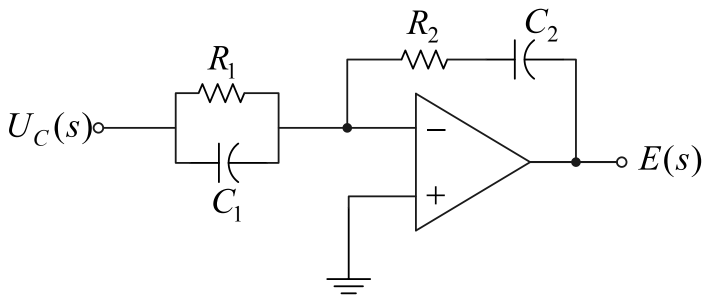
$$G_C(s) = -R_2[\frac{1}{R_1} + C_1 S] = -[\frac{R_2}{R_1} + R_2 C_1 S] = -\frac{R_2}{R_1}[1 + R_1 C_1 S] \rightarrow \begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = K_P \\ R_2 C_1 = K_D \end{cases}$$

کنترل کننده ی مشتق گیر ,تناسبی ,انتگرال گیرPID(بهبود رفتار ماندگار و گذرای سیستم)

$$u_C(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} + K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

$$U_C(s) = (K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}) E(s)$$

$$G_C(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = K_P (1 + +\tau_D s + \frac{1}{\tau_I s})$$



$$G_C(s) = -(R_2 + \frac{1}{C_2 S})(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_1 S}) = -[\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{R_1 C_2 S} + R_2 C_1 S)$$

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} = K_P \\ \frac{1}{R_1 C_2} = K_I \\ R_2 C_1 = K_P \end{cases}$$

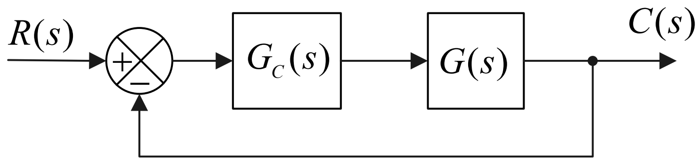
طراحی کنترل کننده ها بر اساس روش جایابی قطب

یکی از روشهایی که امکان می دهد قطب مورد نظر را ایجاد کنیم جایابی قطب است

مشخصات گذاری مطلوب
$$\begin{cases} t_s = a \xrightarrow{2\%} 4\tau = a \rightarrow \dfrac{4}{\alpha} = a \rightarrow \dfrac{4}{\zeta\omega_n} = a \rightarrow \zeta\omega_n = \dfrac{4}{a} \\ M_p = b \rightarrow e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = b \rightarrow \xi = \dfrac{|\ln b|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln b)2}} \end{cases}$$

به این ترتیب بر اساس مشخصات گذرای مطلوب به محل قطبهای غالب مطلوب دست می یابیم:

$$s_d, s_d^* = -\alpha \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad G_C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

$$G_{cl}(s) = \frac{G_C G}{1 + G_C G} = \frac{\frac{N_C}{D_C}\ \frac{N}{D}}{1 + \frac{N_C}{D_C}\ \frac{N}{D}} = \frac{N_C N}{D_C D + N_C N}$$

چند جمله ای مشخصه ی حلقه بسته $D_c(s)D(s) + N_c(s)N(s)$

در روش جایابی قطب ضرائب یا پارامترهای مجهول $D_C(s)$ و $N_C(s)$ را به نحوی محاسبه می کنیم که قطبهای مطلوب (s_d, s_d^*) ریشه های چند جمله ای مشخصه حلقه بسته سیستم (به طور غالب) باشد.

$$D_C(s)D(s) + N_C(s)N(s)\Big|_{s_d, s_d^*} = 0$$

مثال: برای سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$ کنترل کنندهای طراحی کنید که قطب های غالب حلقه بسته را در محل مطلوب $-1 \pm j$ قرار دهد.

روش اول (کنترل کننده PD)

$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

$$G_{cl}(s)=\frac{(K+K_D s)\ \frac{1}{s(s-1)}}{1+(K_P+K_D s)\ \frac{1}{s(s-1)}}=\frac{K_P+K_D}{s^2+(1+K_D)s+K_P}$$

$$(s+1-i)(s+1+i)=s^2+2s+2$$

$$s^2+2s+2=s^2+(1+K_D)s+K_P \qquad \begin{cases} K_D+1=2\rightarrow K_D=1 \\ K_P=2 \end{cases}$$

روش دوم (کنترل کننده PID)

$$G_C(s)=K_P+K_D s+\frac{K_I}{s}=\frac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}$$

$$G_{cl}(s)=\frac{\frac{k_d s^2+K_P s+K_I}{s}\ \frac{1}{s(s-1)}}{1+\frac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s}\ \frac{1}{s(s-1)}}=\frac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s^2(s+1)+K_D s^2+K_P s+K_I}$$

$$s^3+(1+K_D)s^2+K_P s+K_I=(s+2s+2)(s+\alpha)$$
$$s^3+(1+K_D)s^2+K_P s+K_I=s^3+(\alpha+2)s^2+2(\alpha+1)s+2\alpha$$
$$\begin{cases} 1+K_D=\alpha+2 \\ K_P=2(\alpha+1) \\ K_I=2\alpha \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} K_D=\alpha+1 \\ K_P=2(\alpha+1) \\ K_I=2\alpha \end{cases}$$

با انتخاب α مناسب مقادیر مورد نظر بدست می آید. قطعاً یکی از پاسخهایی که در مورد کنترل کننده PID به دست می آید همان پاسخ کنترل کننده PD می باشد که با انتخاب $\alpha=0$ ($K_I=0\ K_P=2\ K_D=1$) به این نتیجه می رسیم. ولی در این حالت چند جمله ای حلقه بسته ریشه سومی هم در خواهد $s=0$ داشت که ظاهراً با نتیجه کنترل کننده PD متفاوت به نظر می رسد. ولی با دقت در تابع تبدیل حلقه بسته، متوجه می شویم که به ازای $\alpha=0$ یک صفر در $s=0$ خواهد داشت که به این ترتیب اثر قطب $s=0$ در ازبین خواهد رفت.

جبران سازها

هر کنترل کننده نوع خاصی از جبران ساز است

$$\begin{cases} lag \supset PI \\ lead \supset PD \\ lag - lead \supset PID \end{cases}$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z'}{s+p'} = K_c \frac{s-z}{s-p}$$
$$z', p' > 0 \qquad z, p < 0$$

$$G_c(j\omega) = K_c \frac{j\omega+z'}{j\omega+p'} = K_c \frac{j\omega-z}{j\omega-p}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G_C(j\omega)} \longrightarrow y_{ss}(t) = A\left|G_C(j\omega)\right|\sin(\omega t + \angle G_c(j\omega))$$

$$\angle G_C(j\omega) = \tan^{-1}(\frac{\omega}{z'}) - \tan^{-1}(\frac{\omega}{p'})$$

$$\text{Lead:} \qquad \angle G_c(j\omega) > 0 \Rightarrow \frac{\omega}{z'} > \frac{\omega}{p'} \to z' < p'$$

$$\text{Lag:} \qquad \angle G_c(j\omega) < 0 \Rightarrow \frac{\omega}{z'} < \frac{\omega}{p'} \to z' > p'$$

سیستمهای مینیمم فاز

در سیستم های مینیمم فاز قطبها و صفرها باید در یک طرف محور موهومی باشند. با توجه به اینکه برای پایداری باید قطبهای سیستم سمت چپ محور موهومی باشند لذا در سیستمهای پایدار مینیمم فاز، علاوه بر قطبها، صفرهای سیستم نیز در سمت چپ محور موهومی واقع شده اند. برعکس در سیستمهای پایدار غیر مینیمم فاز صفرهای سیستم در سمت راست محور موهوی قرار گرفته اند در پاسخ پله چنین سیستمهایی یک فروجهش وجود دارد که بیانگر تأخیر در رسیدن پاسخ پله سیستم به مقدار نهایی است که امری نامطلوب به حساب می رود.

افزودن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه باز(ناقص)

افزودن صفر باعث کاهش t_p, t_r وافزایش M_p می شود که هر چه صفر به مبدا نزدیک تر باشد اثر این افزایش و کاهش بیشتر می شود

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{\text{پاسخ پله}} y(t) = 1 - e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \beta)$$

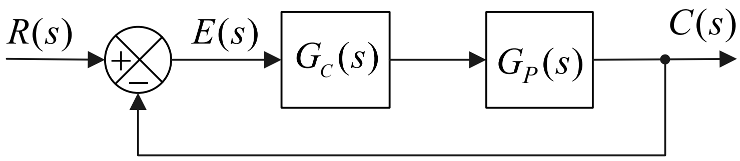
$$G_1(s)=\frac{(1+\alpha s)\omega_n^{\,2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2}}\xrightarrow{\text{پاسخ پله}}y_1(t)=y(t)+\alpha y'(t)$$

افزودن قطب باعث افزایش t_p, t_r و کاهش M_p می شود

$$G_2(s)=\frac{\omega_n^{\,2}}{(1+\alpha\,s)\,(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2})}$$

$$=\frac{\dfrac{\omega_n^{\,2}\alpha^2}{1-2\zeta\omega_n\alpha+\omega_n^{\,2}\alpha^2}}{1+\alpha\,s}+\frac{\dfrac{-\omega_n^{\,2}\alpha}{1-2\zeta\omega_n\alpha+\omega_n^{\,2}\alpha^2}s+\dfrac{\omega_n^{\,2}(1-2\zeta\omega_n\alpha)}{1-2\zeta\omega_n\alpha+\omega_n^{\,2}\alpha^2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2}}$$

نوع سیستم و ثابت های خطا



$$G_{CL}(s)=\frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}sR(s)\frac{1}{1+G(s)}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0}G(s)=K_p & \text{ثابت خطای موقعیت :}\\ \lim\limits_{s\to 0}sG(s)=K_v & \text{ثابت خطای سرعت :}\\ \lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)=K_a & \text{ثابت خطای شتاب :}\end{cases}$$

$$e_{ss}=\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{1+G(s)} & r(t)=u(t)\\ \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{sG(s)} & r(t)=tu(t)\\ \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s^2G(s)} & r(t)=\dfrac{t^2}{2}u(t)\end{cases}\Rightarrow e_{ss}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+K_p} & r(t)=u(t)\\ \dfrac{1}{K_v} & r(t)=tu(t)\\ \dfrac{1}{K_a} & r(t)=\dfrac{t^2}{2}u(t)\end{cases}$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{s^pD'(s)}\qquad p=\begin{cases}0 & \text{سیستم نوع صفر}\\ 1 & \text{سیستم نوع یک}\\ 2 & \text{سیستم نوع دو}\end{cases}$$

سیستم نوع صفر

$$\begin{cases}k_p=\lim\limits_{s\to 0}G(S)=\text{عدد}\\ K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(S)=0\\ K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(S)=0\end{cases}$$

ورودی پله را با خطا تعقیب می کند.

سیستم نوع یک

$$\begin{cases}k_p=\lim\limits_{s\to 0}G(S)=\infty\\ K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(S)=\text{عدد}\\ K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(S)=0\end{cases}$$

ورودی پله را بدون خطا تعقیب می کند.

ورودی شیب را با خطا تعقیب می کند.

سیستم نوع دو

$$\begin{cases}k_p=\lim\limits_{s\to 0}G(S)=\infty\\ K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(S)=\infty\\ K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(S)=\text{عدد}\end{cases}$$

ورودی پله را بدون خطا تعقیب می کند.

ورودی شیب را بدون خطا تعقیب می کند.

ورودی سهمی را با خطا تعقیب می کند.

ورودی / نوع سیستم	$u(t)$	$tu(t)$	$\frac{t^2}{2}u(t)$
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

مثال در یک سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه بسته ی زیر ثابت خطای استاتیکی به ورودی شیب را بدست آورید:

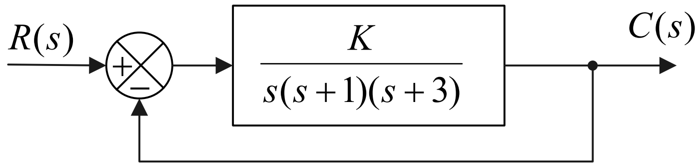
$$G_{CL}(s)=\frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G_{CL}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}\Rightarrow G(s)=\frac{G_{CL}(s)}{1-G_{CL}(s)}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{\dfrac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1-\dfrac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}}=\frac{s+6}{s^3+6s^2+10s}=\frac{s+6}{s(s^2+6s+10)}$$

$$K_V=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s+6}{s(s^2+6s+10)}=\frac{3}{5}$$

مثال در سیستم شکل زیر با فرض اینکه مقدار K به نحوی انتخاب شده باشد که سیستم حلقه بسته دارای قطب حلقه بسته ای در $s=-3.5$ باشد، خطای ماندگار به ورودی $r(t)=(2t+0.5)u(t)$ چقدر است:



$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)}\Rightarrow G_{CL}(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+3)+K}$$

$$\Rightarrow \left(s(s+1)(s+3)+K\right)\Big|_{s=-3.5}=0\to K=\frac{35}{8}$$

$$e_{ss}=\frac{2}{K_v}+0.5\left(\frac{1}{1+K_P}\right)$$

$$\begin{cases}K_P=\underset{s\to 0}{G(s)}=\infty\\ K_V=\underset{s\to 0}{sG(s)}=\dfrac{K}{3}\end{cases}\Rightarrow\ e_{ss}=\frac{2}{K_v}=\frac{6}{K}\xrightarrow{K=\frac{35}{8}}e_{ss}=\frac{48}{35}$$