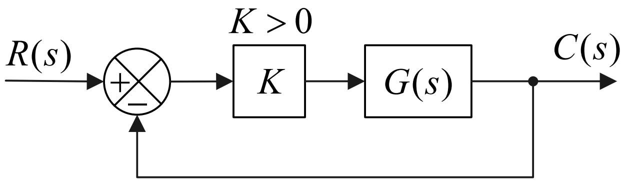
مکان هندسی ریشه ها

مکان هندسی قطبهای حلقه بسته



$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

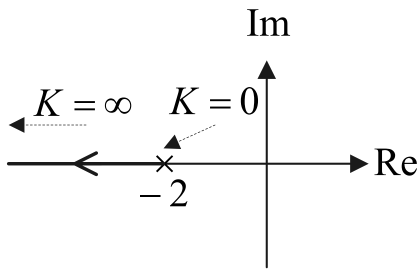
$$G_{CL}(s)=\frac{KG}{1+KG}=\frac{K\dfrac{N(s)}{D(s)}}{1+K\dfrac{N(s)}{D(s)}}=\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$$

قطبهای حلقه بسته $\quad 1+KG(s)=0\Rightarrow D(s)+KN(s)=0$

مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s+2}\qquad\Rightarrow\qquad G_{CL}(s)=\frac{K\dfrac{1}{s+2}}{1+K\dfrac{1}{s+2}}$$

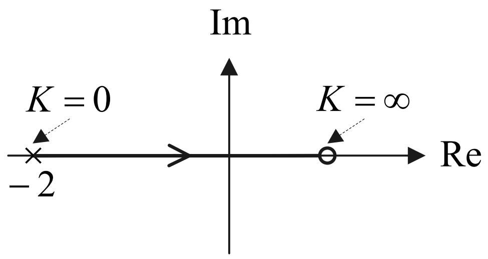
$$1+K\frac{1}{s+2}=0\;\rightarrow s+2+K=0\rightarrow s=-(2+K)\qquad\begin{cases}K=0 & \Rightarrow\;\; s=-2\\ K=\infty & \Rightarrow\;\; s=-\infty\end{cases}$$



مثال:

$$G(s)=\frac{s-1}{s+2}\qquad\qquad G_{CL}(s)=\frac{K\dfrac{s-1}{s+2}}{1+K\dfrac{s-1}{s+2}}$$

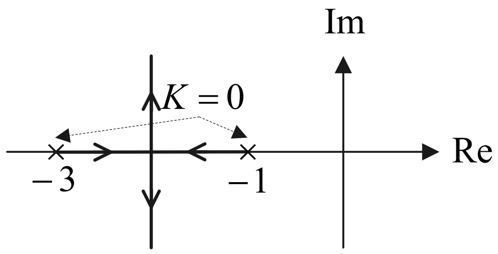
$$1+K\frac{s-1}{s+2}=0\;\rightarrow s+2+K=0\rightarrow s=\frac{K-2}{K+1}\;\rightarrow\;\begin{cases}K=0 & \quad -2\\ K=\infty & \quad 1\end{cases}$$

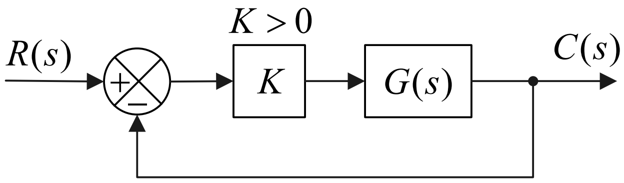


مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+4s+3}\qquad G_{CL}(s)=\frac{K\frac{1}{s^2+4s+3}}{1+K\frac{1}{s^2+4s+3}}$$

$$1+K\frac{1}{s^2+4s+3}=0\qquad s^2+4s+3+K=0\rightarrow S=-2\pm\sqrt{1-K}\begin{cases}K=0 & -3,-1\\ K=1 & \pm\infty\end{cases}$$





$$G_{CL}(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

$$1+KG(s)=0\Rightarrow\ KG(s)=-1=1\ e^{j(2M+1)\pi}\Rightarrow\begin{cases}|KG(s)|=1\\ \angle KG(s)=(2M+1)\pi\quad M\in Z\end{cases}$$

$$\xrightarrow{K>0}\begin{cases}K|G(s)|=1 & \text{شرط دامنه}\\ \angle G(s)=(2M+1)\pi\quad M\in Z & \text{شرط زاویه}\end{cases}$$

برای بررسی این که آیا نقطه ای از صفحه اعداد مختلط قطب حلقه بسته ی سیستم است یا نه از شرط زاویه استفاده می کنیم. پس از حصول از اطمینان از این مورد برای محاسبه K متناظر با قطب حلقه بسته ی مورد نظر از شرط دامنه استفاده می کنیم.

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

mصفر محدود، n قطب محدود و $n-m$ صفر در بی نهایت

mصفر محدود و n قطب محدود

mصفر محدود، n قطب محدود و $m-n$ قطب در بی نهایت

$$\begin{cases} m<n \\ m=n \\ m>n \end{cases}$$

به این تر تیب ملاحظه می شود که با احتساب قطبهای(صفرهای) در بی نهایت، تعداد کل صفرها و قطبهای یک تابع تبدیل با هم برابرند.

۱- مکان هندسی قطبهای حلقه بسته از قطبهای حلقه باز (به ازای $K=0$) شروع شده و به صفرهای حلقه باز (به ازای $K=\infty$) ختم می گردد.

$$1+KG(s)=0\rightarrow 1+K\frac{N(s)}{D(s)}=0\Rightarrow D(s)+kN(S)=0\rightarrow\begin{cases} K=0\rightarrow D(s)=0 \\ K=\infty\rightarrow KN(S)=0 \end{cases}$$

۲- هر نقطه ای از محور حقیقی که تعداد کل صفرها و قطبهای حلقه باز سمت راست آن فرد باشد جزء مکان هندسی قطبهای حلقه بسته خواهد بود.

$$\angle G(s)=(2M+1)\pi$$

۳-**تعیین مجانبها:** برای رسم شاخه هایی از مکان هندسی که به ازای صفرهای بی نهایت حلقه باز به بی نهایت ختم شده و یا به ازای قطبهای در بی نهایت حلقه باز از بی نهایت آعاز می شوند لازم است که مجانبهای مربوطه را به دست آوریم. برای این منظور خواهیم داشت:

محل تقاطع مجانب ها روی مخور خقیقی

$$\delta_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{|n-m|}$$

زوایای مجانبها

$$\theta_a=\frac{(2M+1)\pi}{|n-m|}$$

مثال

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+4)(s+9)}$$

۳ عدد صفر در بی نهایت دارد

$$\delta_a = \frac{[(-1)+(-4)+(-9)]-[0]}{3} = -\frac{14}{3} \qquad \theta_a = \frac{(2M+1)\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۴- **محاسبه نقاط شکست:** (نقاط ترک محور حقیقی یا ورود به محور حقیقی)

ریشه های $\frac{dK}{ds}$ را محاسبه می کنیم که ریشه هائی که K متناظر با آنها از رابطه $K = \frac{-1}{G(s)}$ در شرط $K \geq 0$ صدق کنند، نقاط شکست خواهند بود

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$K = \frac{-1}{G(s)} = -(s+1)(s+3) \qquad \frac{dK}{ds} = 0 \to -2s-4=0 \to s=-2$$

$$K\Big|_{s=-2} = 1$$

مثال:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+9)}$$

$$1+KG(s)=0 \Rightarrow K = -(s^3+14s^2+49s+36) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2+28s+49)=0$$

$$\Rightarrow s = \frac{-14 \pm \sqrt{196-147}}{3} = \begin{cases} -\frac{7}{3} \Rightarrow K = \frac{400}{3} > 0 \\ -7 \Rightarrow K = -36 < 0 \end{cases}$$

۵-محاسبه نقاط قطع مکان هندسی با محور موهومی

روش اول:

$$1+KG(s)=0 \xrightarrow{s=jw} 1+KG(j\omega)=0 \Rightarrow \begin{cases} 1+K\,\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}=0 \\ \mathrm{Im}(\{G(j\omega)=0\} \end{cases}$$

مثال:

$$1+k\frac{1}{(s+1)(s+4)(s+9)}\Bigg|_{s=j\omega}=0\Rightarrow -j\omega^3-14\omega^2+49j\omega+36+K=0$$

$$\Rightarrow\quad (-14\omega^2+36+K)+j(49\omega-\omega^3)=0$$

$$\begin{cases} K=14\omega^2-36 \\ \omega(49-\omega^2)=0\rightarrow\begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0\ ,\ K=-36<0\\ \omega=\pm7\ ,\ K=650>0\end{cases}\end{cases}$$

روش دوم: استفاده از روش روث - هرویتز برای رسیدن به ریشه های روی محور موهومی

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 49 \\ s^2 & 14 & K+36 \\ \hline s^1 & \frac{14\times49-(K+36)}{3} & \\ s^0 & K+36 & \end{array}$$

$$650-K=0\Rightarrow K=650\Rightarrow Q(s)=14s^2+k+36$$

$$\Rightarrow 14s^2+650+36=0\rightarrow s=\pm j\sqrt{7}$$

$$K=-36\rightarrow s=0$$

۶-محاسبه زاویه خروج از قطب مختلط(ورود به صفر مختلط)- خروج از قطبهای حقیقی مکرر، ورود به صفرهای حقیقی یا مکرر.

در این حالت برای محاسبه زاویه خروج از قطب مختلط (ورود به صفر مختلط) با مجهول گرفتن زاویه مربوطه با در نظر گرفتن یک نقطه بسیار نزدیک به قطب مختلط (صفر مختلط) مورد نظر بردارهای واصل از صفرها و قطبهای حلقه باز به آن نقطه وصل کرده و براساس زاویای آنها شرط زاویه را می نویسیم.(زاویه مربوط به قطب (صفر)مختلط مورد نظر را مجهول گرفته برای محاسبه بقیه زوایای از مختصات همان قطب (صفر)مختلط به جای نقطه ی نزدیک به آن استفاده می کنیم)

مثال: مکان هندسی قطبهای حلقه بسته تابع مقابل را به دست آورید.

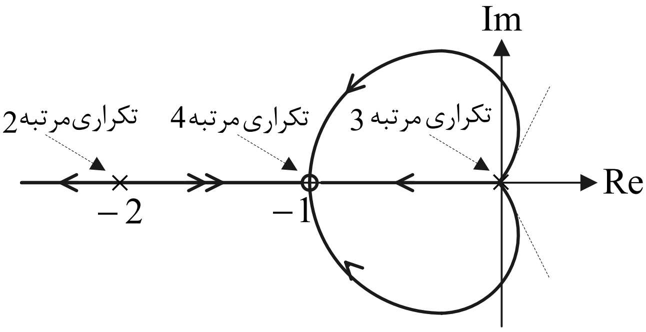
$$G(s)=\frac{K(s+1)^4}{s^3(s+2)^2}$$

زاویه خروج از قطب تکراری مرتبه سه $s=0$

$$0\times4-(2\times0-3\theta)=(2M+1)\pi\rightarrow-3\theta=(2M+1)\pi\rightarrow\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{3}\\ \pi\\ -\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

زاویه خروج از صفر تکراری مرتبه چهار $s=-1$

$$4\theta-(2\times 0+3\times \pi)=(2M+1)\pi \Rightarrow \theta=\frac{2(M-1)\pi}{4} \Rightarrow \theta=\begin{cases}0\\ \dfrac{\pi}{2}\\ \pi\\ \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$



مثال

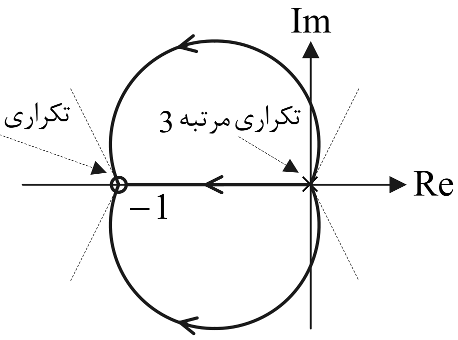
$$G(s)=\frac{K(s+1)^3}{s^3}$$

زاویه خروج از قطب تکراری مرتبه سه $s=0$

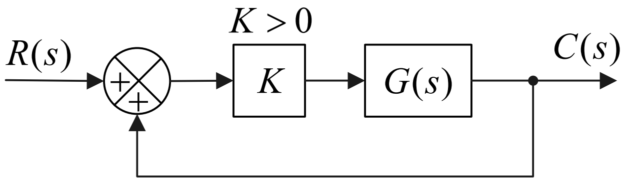
$$3\theta-3\pi=(2M+1)\pi \rightarrow \theta=\frac{2(M+2)\pi}{3} \rightarrow \theta=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}\\ \dfrac{4\pi}{3}\\ \dfrac{-2\pi}{3}\end{cases}$$

زاویه خروج از صفر تکراری مرتبه سه $s=-1$

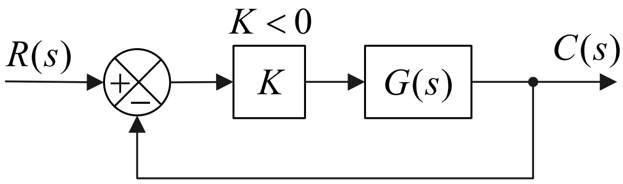
$$3\times 0-3\theta=(2M+1)\pi \Rightarrow \theta=\frac{-(2M+1)\pi}{3} \Rightarrow \theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\ \pi\\ -\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$



قواعد رسم مکان هندسی قطبهای حلقه بسته (وقتی علامت فیدبک و علامت K یکی باشد).



$$G_{CL}(s)=\frac{KG(s)}{1-KG(s)} \Rightarrow 1-KG(s)=0 \rightarrow KG(s)=1 \xrightarrow{K>0} \begin{cases} K\left|G(s)\right|=1 \\ \angle G(s)=2M\pi \end{cases}$$



$$G_{CL}(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)} \quad \Rightarrow \quad 1+KG(s)=0 \xrightarrow{K<0} \begin{cases} \left|K\right|\left|G(s)\right|=1 \\ \angle G(s)=2M\pi \end{cases}$$

بنابر این ملاحظه می شود در حالتی که علامت K و علامت فیدبک یکسان باشند، آن دسته از قواعد رسم مکان هندسی قطبهای حلقه بسته که مستقیماً بر اساس شرط زاویه بنا نهاده شده بودند بر اساس شرط زاویه جدید تغییر داده می شوند:

۱- مکان هندسی قطب های حلقه بسته (به ازای $K<0$) از صفرهای حلقه باز (به ازای $k=-\infty$) شروع شده و به قطبهای حلقه باز (به ازای $k=0$) ختم می شود.

۲- نقاطی از محور حقیقی جزء مکان هندسی است که تعداد کل صفرها و قطبهای حلقه باز سمت راست آنها زوج باشد.

۳- زاویه مجانب ها:

$$\theta_a=\frac{2M\pi}{\left|n-m\right|}$$

۴- در محاسبه زاویه خروج از قطبهای مختلط (ورود به صفرهای مختلط به جای $(2M+1)\pi \quad M\in z$ از $2M\pi \quad M\in z$ جایگزین می شود.)

رسم مکان هندسی ریشه های یک چند جمله ای که در آن پارامتر دلخواهی متغیر است

$x^3 + kx^2 + 4x - k = 0$

نکته: متغیری که می خواهیم اثر تغییراتش را در ریشه های چند جمله ای به دست آوریم باید خطی باشد.

$$(x^3 + 4x) + k(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^3 + 4x)\left[1 + \frac{k(x^2 - 1)}{(x^3 + 4x)}\right] = 0$$

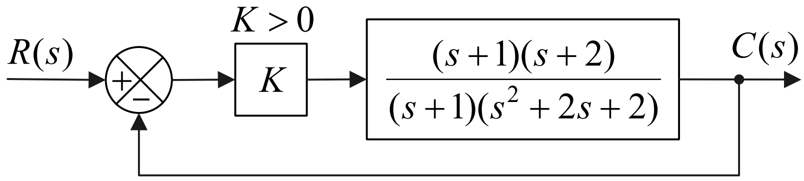
به این ترتیب حل این مسأله معادل به دست آوردن مکان هندسی قطبهای حلقه بسته برای تابع تبدیل حلقه باز زیر می باشد:

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 4s}$$

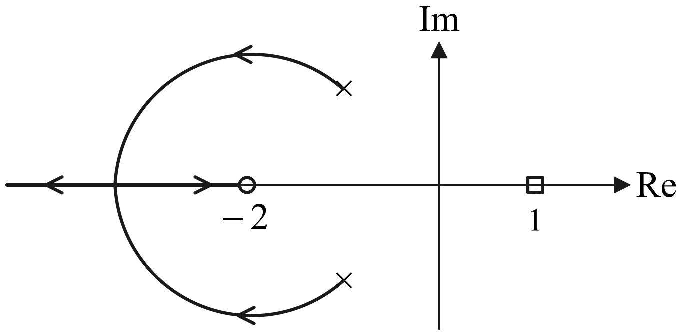
حالتی که صفر و قطب حلقه باز با هم حذف شوند.

اگر قطبی یا صفری با هم حذف شوند روئت ناپذیر یا کنترل ناپذیر است. که اگر پایدار باشد مشکل ایجاد نمی کند ولی در صورت ناپایداری باید کنار گذاشت. چنین قطب حلقه بازی یک قطب حلقه بسته مستقل از K خواهد بود

مثال:



$$1 + K\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+2)} = 0 \xrightarrow{s=-1} 1 + K\frac{s+2}{s^2+2s+2} = 0$$

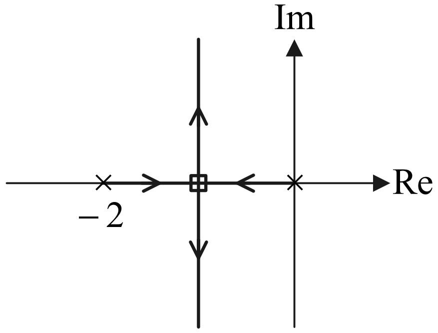


مثال:

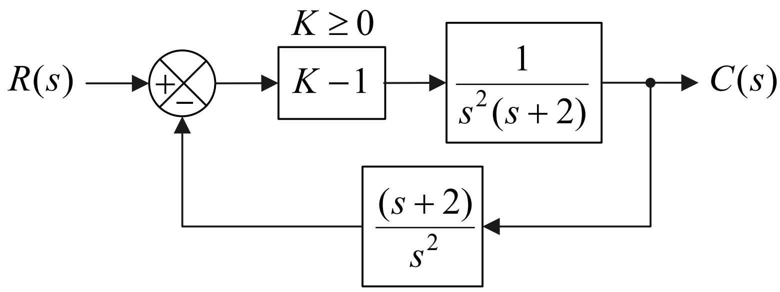
$$s^3 + 3s^2 + (k+2)s + k = 0 \Rightarrow (s^3 + 3s^2 + 2s) + k(s+1) = 0$$

$$\Rightarrow\; s(s+1)(s+2)+k(s+1)=0 \;\Rightarrow\; s(s+1)(s+2)\left[1+k\frac{s+1}{s(s+1)(s+2)}\right]=0$$

$$\xrightarrow{s=-1} s(s+1)(s+2)\left[1+k\frac{1}{s(s+2)}\right]=0$$



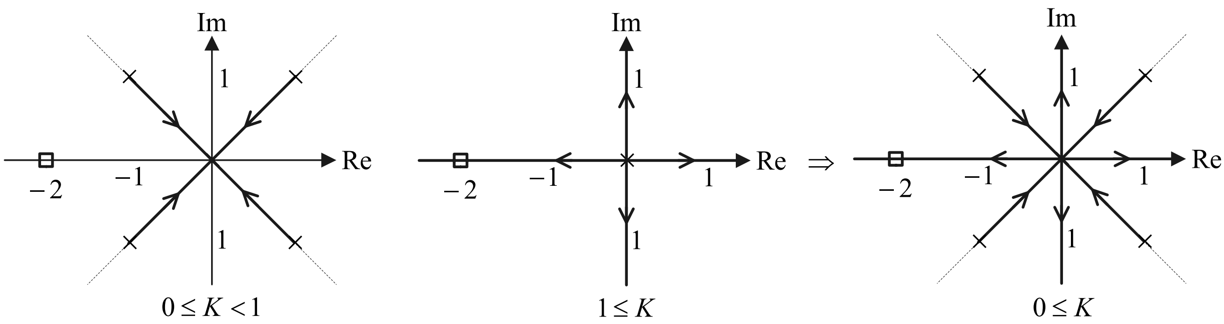
مثال



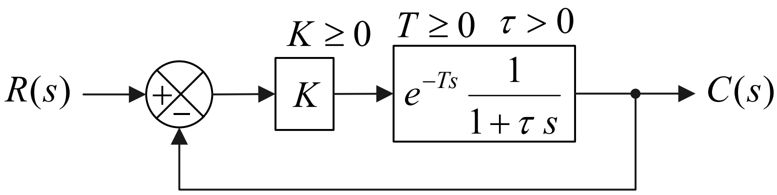
$$K' = K-1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq K < 1 \equiv -1 \leq K' < 0 \\ \quad 1 \leq K \equiv 0 \leq K' \end{cases}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{K'\dfrac{1}{s^2(s+2)}}{1+K'\dfrac{s+2}{s^2}\;\dfrac{1}{s^2(s+2)}} \Rightarrow 1+K'G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+K'\frac{s+2}{s^2}\;\frac{1}{s^2(s+2)}=0$$

$$\Rightarrow 1+K'\frac{1}{s^4}=0$$



سیستمهای دارای تأخیر زمانی

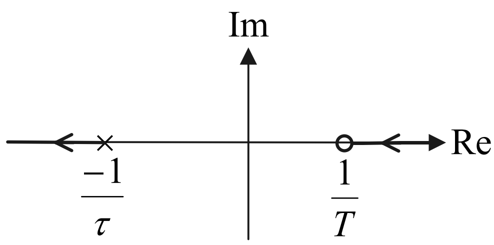


$$1+Ke^{-Ts}\,\frac{1}{1+\tau s}=0 \qquad T>0\,,\tau>0\,,K>0$$

روش تقریبی (الف) :

$$e^{-Ts}=1+(-Ts)+\frac{(-Ts)}{2}+\cdots+\frac{(-Ts)^n}{n!}\xrightarrow{T<<1} e^{-Ts}\approx 1-Ts$$

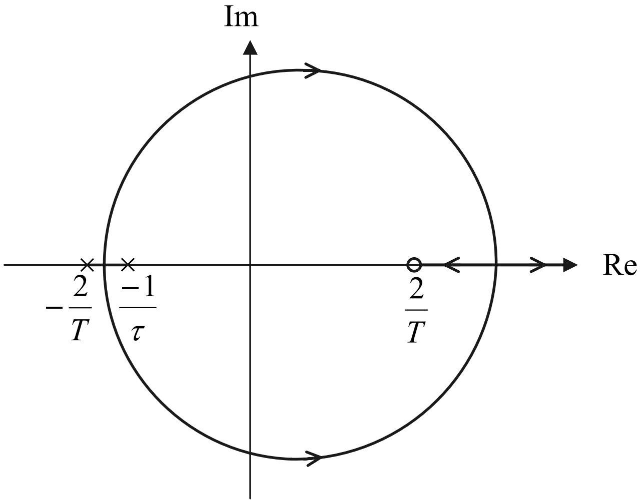
$$\xrightarrow{T>>1} 1+K\frac{1-Ts}{1+\tau s}=0$$



روش تقریبی (ب) :

$$e^{-Ts}=\frac{e^{-T\frac{s}{2}}}{e^{T\frac{s}{2}}}=\frac{1+(\frac{-Ts}{2})+\frac{(\frac{-Ts}{2})^2}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{(\frac{-Ts}{2})^n}{n!}}{1+(\frac{Ts}{2})+\frac{(\frac{Ts}{2})^2}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{(\frac{Ts}{2})^n}{n!}}\xrightarrow{\frac{T}{2}<<1} e^{-Ts}\approx\frac{1+\frac{-Ts}{2}}{1+\frac{Ts}{2}}$$

$$\xrightarrow{T>>1} 1+K\frac{\left(1-\frac{T}{2}s\right)}{(1+\tau s)\left(1+\frac{T}{2}s\right)}=0$$



روش دقیق:

محاسبه نقطه ی شکست :

$$1+Ke^{-Ts}\frac{1}{1+\tau s}=0\Rightarrow K=\frac{-1}{e^{-Ts}\frac{1}{1+\tau s}}\Rightarrow K=-e^{Ts}(1+\tau s)$$

$$\frac{dK}{ds}=0\Rightarrow -\left[Te^{Ts}(1+\tau s)+e^{Ts}\tau\right]=0\Rightarrow -e^{Ts}\left[T(1+\tau s)+\tau\right]=0\Rightarrow s=-\frac{T+\tau}{T\tau}=-\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow K\Big|_{s=-\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{\tau}\right)}=\frac{\tau}{T}e^{-\left(1+\frac{T}{\tau}\right)}$$

محاسبه نقطه ی قطع با محور موهومی :

$$1+K\frac{e^{-Ts}}{1+\tau s}=0\xrightarrow{s=j\omega}1+K\left[\frac{e^{-T(j\omega)}}{1+\tau(j\omega)}\right]=0\rightarrow K\left[\frac{e^{-T(j\omega)}}{1+\tau(j\omega)}\right]=-1$$

$$\Rightarrow K\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}e^{j\left(-T\omega-\tan^{-1}(T\omega)\right)}=-1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}=1\\ -T\omega-\tan^{-1}(T\omega)=(2M+1)\pi\end{cases}$$

برای تعیین نقاط مربوط به مکان هندسی با استفاده از شرط زاویه داریم:

$$\angle\frac{e^{-Ts}}{1+\tau s}=(2M+1)\pi \qquad M\in Z$$

$$s=\delta+j\omega\Rightarrow\angle\frac{e^{-T(\sigma+j\omega)}}{\tau\left(\frac{1}{\tau}+(\sigma+j\omega)\right)}=2(M+1)\pi\Rightarrow\angle\frac{e^{-(T\sigma)}e^{-j(T\omega)}}{\tau\left(\frac{1}{\tau}+(\sigma+j\omega)\right)}=(2M+1)\pi$$

$$\Rightarrow(-T\omega)^{rad}-\angle\left(\frac{1}{\tau}+(\sigma+j\omega)\right)=(2M+1)\pi$$

حال تعریف می کنیم:

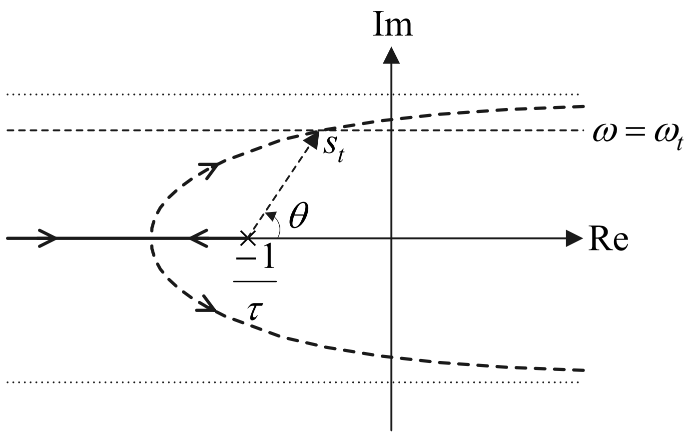
$$\theta=\angle\left(\frac{1}{\tau}+s\right)\Big|_{s=\sigma+j\omega}=-\angle\left(\frac{1}{\tau}+(\sigma+j\omega)\right)$$

به این ترتیب داریم:

$$(-T\omega)^{rad}-\theta=(2M+1)\pi\Rightarrow\theta=(-T\omega)^{rad}-(2M+1)\pi \qquad M\in Z$$

رابطه اخیر به این معنا است که به ازای هر مقدار از $M\in Z$ می توان با اختیار هر مقدار از ω و محاسبه θ متناظر با آن، یک نقطه از مکان هندسی را به دست آورد.

به عنوان مثال به ازای $M=-1$ و با انتخاب $\omega=\omega_t$ و محاسبه θ متناظر، مطابق شکل زیر می توان به محل نقطه s_t روی مکان هندسی دست یافت.



برای تعیین مجانبهای مربوط به مکان هندسی با توجه به رابطه اخیر داریم:

$$\theta = (-T\omega)^{rad} - (2M+1)\pi \qquad M \in Z$$

با دقت در این رابطه دیده می شود که به ازای هر مقدار دلخـواه $M \in Z$ بـا بـزرگ شـدن مقـدار ω مقـدار کمتر θ می شود. از طرف دیگر کم شدن به معنای آن است که به ازای آن مقدار از ω مقدار حقیقی نقطـه مورد نظر به سمت $+\infty$ میل می کند. به این ترتیب می توان به ازای هر مقـدار بـا صـفر قـرار دانـد مقـدار متناظر با نقطه که در واقع مجانب مکان هندسی خواهد بود را به دست آورد.

$$0 = (-T\omega)^{rad} - (2M+1)\pi \Rightarrow \omega_a = \frac{-(2M+1)\pi}{T} \qquad M \in Z$$