فهرست مطالب

مقدمه

چند مفهوم کنترلی عبارتند از:

سامانه(system)
فرایند(process)
دستگاه(plant)

ورودی اغتشاش (Disturbance Input): ورودی که درخلاف جهت و هدف ورودی اصلی عمل می کند.

انواع سیستمهای کنترلی:
سیستم حلقه باز(Open Loop System): در این سیستم ورودی سیستم براساس اطلاعات و تجربیات قبلی از سیستم تنظیم می شود. در چنین سیستمی این مطلب که خروجی سیستم در حین کار سیستم از مقدار مطلوب مورد نظر منحرف شود تأثیری در مقدار ورودی نخواهد داشت.
سیستم حلقه بسته(Closed Loop System): در این سیستم ورودی با اندازه گیری و سنجش خروجی و در جهت رسیدن خروجی سیستم به مقدار مطلوب مورد نظر نتظیم می شود به گونه ای که هر گونه تغییرات در خروجی سیستم نسبت به مقدار مطلوب مورد نظر در حین کار باعث تغییر در ورودی سیستم خواهد شد.
سیستمهایی که در اینجا مورد بحث قرار خواهندگرفت، سیستمهای خطی تغییرناپذیربازمان تک ورودی-تک خروجی خواهند بود. در مقایسه با این سیستمها، انواع مختلف دیگری از سیستمهای کنترلی را می توان در نظر گرفت که برخی از آنها در زیر مورد اشاه قرار گرفته است:

۱. سیستمهای کنترل چند ورودی،چند خروجی(MIMO)
۲. سیستم کنترل بهینه(Optimal)
۳. سیستم کنترل تطبیقی(Adaptive Control)
۴. سیستمهای کنترل مقاوم (Robust Control)
۵. سیستم کنترل غیرخطی (Nonlinear Control)
۶. سیستم کنترل دیجیتال (Digital/Discrete Control)
۷. سیستم کنترل صنعتی (Industrial/Process Control)
۸. سیستم کنترل هوشمند(فازی وعصبی) (Intelligent Control)
۹. شناسایی سیستمها (System Identification)

مدلسازی ریاضی سیستمهای دینامیکی:

$u(t) \Longrightarrow$ [سیستم] $\Longrightarrow y(t)$

در یک دسته بندی سیستمها به دو نوع دینامیکی و استاتیکی تقسیم می شوند:
سیستمهای دینامیکی سیستمهایی هستند که رفتار آنها با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می شود. در این سیستم ها برای تعیین خروجی علاوه بر ورودی حتما باید حالت (شرایط اولیه) سیستم مشخص باشد.
در سیستمهای استاتیکی بر خلاف سیستمهای دینامیکی خروجی به شرایط اولیه وابسته نیست.
هدف از مدلسازی: بیان رفتار سیستم با توجه به مشخصه های اجزای تشکیل دهنده سیستم و براساس قوانین فیزیکی حاکم بر آن، در قالب معادلات ریاضی می باشد.

روشهای مدلسازی:

۱. مدلسازی در قالب معادلات دیفرانسیل:

$u(t) \Longrightarrow$ [سیستم] $\Longrightarrow y(t)$

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y = b_0\frac{d^m u}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{m-1}\frac{du}{dt}+b_m u$$

شرایط اولیه:
$$y(0^-),\overset{(1)}{y}(0^-),\overset{(2)}{y}(0^-),\cdots,\overset{(n-1)}{y}(0^-)$$

$$\begin{cases} m<n \\ m=n \\ m>n \end{cases}$$

سیستم اکیدا مناسب(strictly proper) باشد
سیستم مناسب (proper) باشد
سیستم نامناسب(non proper) باشد

۲. مدلسازی با استفاده از پاسخ پله و پاسخ ضربه (حالت صفر):

$u(t) \Longrightarrow$ [سیستم] $\Longrightarrow y(t)$

برای سیستمهای خطی تغییر ناپذیر بازمان با در اختیار داشتن پاسخ ضربه واحد ($g(t)$) مـی تـوان پاسـخ حالت صفر سیستم را به ورودی دلخواه $u(t)$ با استفاده از انتگرال کانولوشون به دست آورد:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$= u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

از طرفی در سیستمهای خطی تغییر ناپذیر بازمان با در اختیار داشتن پاسخ پله واحد به سـادگی مـی تـوان پاسخ ضربه واحد را محاسبه کرد:

$$\text{پاسخ ضربه حالت صفر} = \frac{d}{dt}\left\{ \text{پاسخ پله حالت صفر} \right\}$$

با در اختیار داشتن معادله دیفرانسیل حاکم بـر سیـستم بـه ازای ورودی ضـربه واحـد ($u(t) = \delta(t)$) بـه راحتی می توان پاسخ ضربه واحد سیستم را محاسبه کرد.

۳. مدلسازی بر اساس تابع تبدیل(**Transfer Function**):

$$u(t) \Rightarrow \boxed{\text{سیستم}} \Rightarrow y(t)$$

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$$

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$L\{u(t)\} = U(s)$$

با در اختیار داشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم (خطی تغییر ناپذیر بـا زمـان) بـا تبـدیل لاپـلاس از طرفین معادله (با فرض شرایط اولیه صفر) می توان تابع تبدیل سیستم را به دست آورد:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u$$

$$\left(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n\right) Y(s) = \left(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m\right) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

همچنین به راحتی می توان ارتباط تابع تبدیل ($G(s)$) و پاسخ ضربه ($g(t)$) سیستم را به صورت زیر به دست آورد:

الف)

$$L\{y(t)\}=L\{g(t)*u(t)\}\Rightarrow Y(s)=G(s)*U(s)\Rightarrow G(s)=L\{g(t)\}$$

ب)

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}} \xrightarrow{u(t)=\delta(t)} G(s)=\frac{L\{\text{پاسخ ضربه}\}}{L\{\delta(t)\}}$$

$$\Rightarrow G(s)=L\{\text{پاسخ ضربه}\}$$

صفرهای محدود سیستم: $N(s)=0 \;\Rightarrow\; z_j : j=1,2,\cdots,m$

قطبهای محدود سیستم : $D(s)=0 \;\Rightarrow\; \mathrm{p}_i : i=1,2,\cdots,n$

به این ترتیب می توان تابع تبدیل یک سیستم را بر اساس صفرها و قطبهای آن به صورت زیر بیان کرد:

$$G(s)=\frac{b_0\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)}{a_0\prod_{i=1}^{m}\left(s-p_i\right)}$$

با در اختیار داشتن تابع تبدیل یک سیستم(خطی تغییرناپذیر بازمان) می توان پاسخ حالت صفر آن سیستم را به ورودی دلخواه $u(t)$ بسادگی محاسبه کرد:

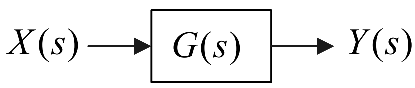
$$y(t)=L^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

1. تابع تبدیل یک سیستم ؛ یک مدل ریاضی از سیستم و یک بیان ریاضی از ساختار سیستم است.
2. از روی تابع تبدیل نمی توان به ساختار سیستم پی برد.
3. تابع تبدیل بیانگر ساختار سیستم است و مقادیر پارامترهای داخل سیستم ، تعبیر کننده ضرایب تابع تبدیل خواهد بود.
4. با استفاده از مشاهدات تجربی سیستم می توان تابع تبدیل سیستم را شناسایی کرد.
5. تابع تبدیل سیستم ، مستقل از اندازه و فاز ورودی و خروجی سیستم است.

۴. مدلسازی با استفاده نمودار جعبه ای(**Block Diagram**):

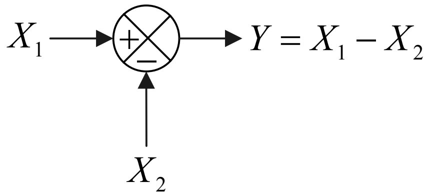
به منظور مدلسازی یک سیستم با استفاده از نمودار جعبه ای، لازم است در ابتدا با اجزاء بلوک دیاگرام آشنا شد:

1. بلوک :

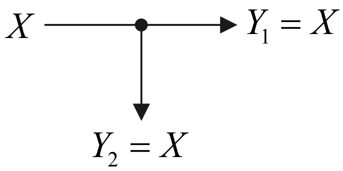


$$Y(s) = G(s).X(s) \Leftrightarrow y(t) = g(t) * x(t)$$
$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\}$$

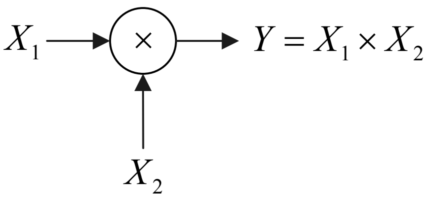
۲. نقطه جمع:



۳. نقطه انشعاب:

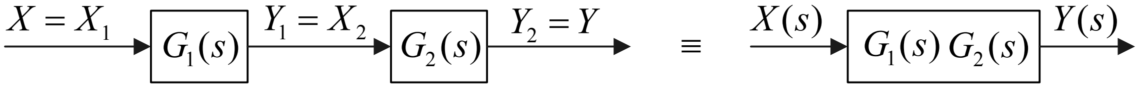


۴. نقطه ضرب:



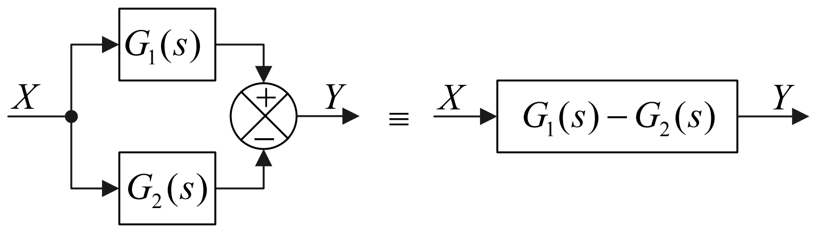
جبر بلوک دیاگرامها (قواعد حاکم بر ساده سازی بلوک دیاگرامها):

۱. بلوکهای سری:

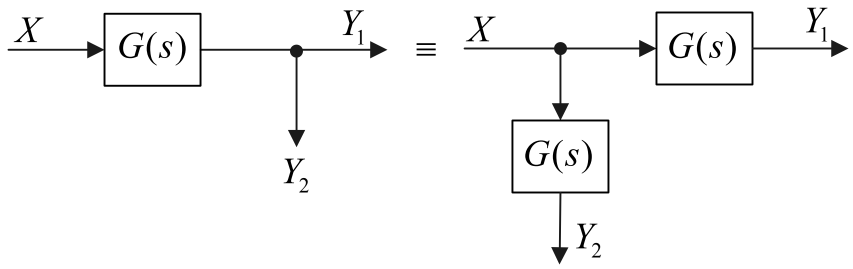


$$Y_1 = G_1 X_1$$
$$Y = Y_2 = G_2 X_2 = G_2\left(G_1 X_1\right) = \left(G_2 G_1\right) X_1 = \left(G_2 G_1\right) X$$

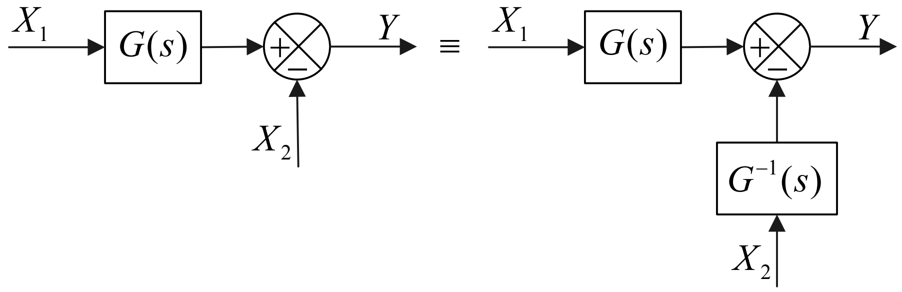
۲. بلوکهای موازی:



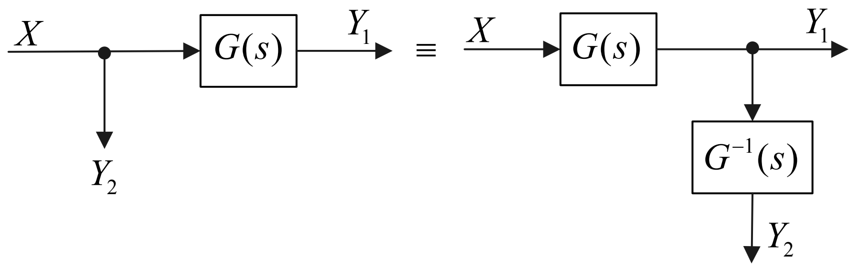
۳. انتقال بلوک از چپ به راست نقاط انشعاب:



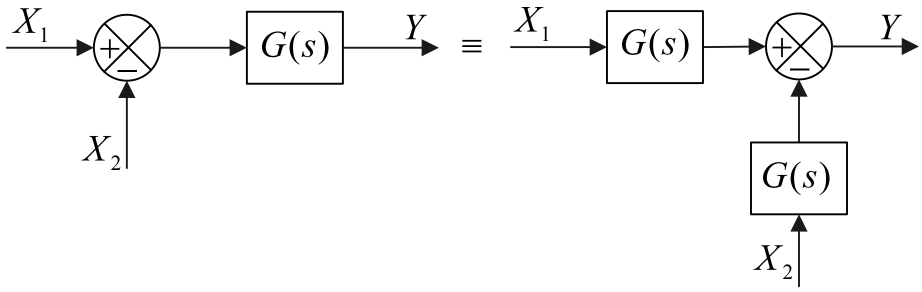
۴. انتقال بلوک از چپ به راست نقاط جمع:



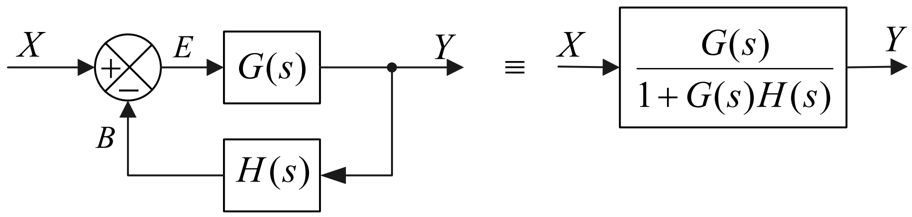
۵. انتقال بلوک از راست به چپ نقاط انشعاب:



۶. انتقال بلوک از راست به چپ نقاط جمع:



۷. فیدبک:

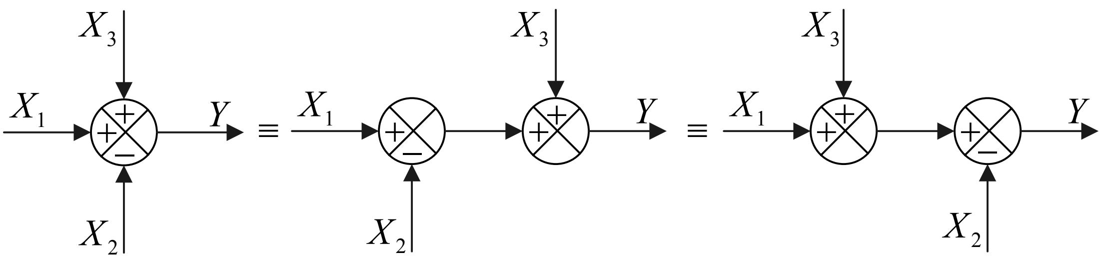


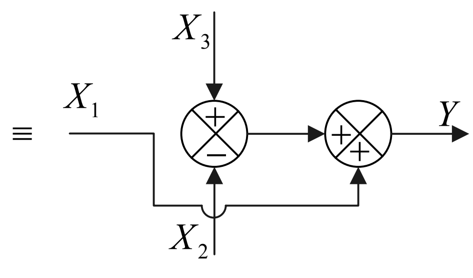
برای اثبات هم ارزی فوق به صورت زیر می توان عمل کرد:

$$\begin{cases} Y = G.E \\ E = X - B \Rightarrow Y = G.\left(X - B\right) \Rightarrow Y = G\left(X - HY\right) \Rightarrow \left(1+GH\right)Y = G \\ B = H.Y \end{cases}$$

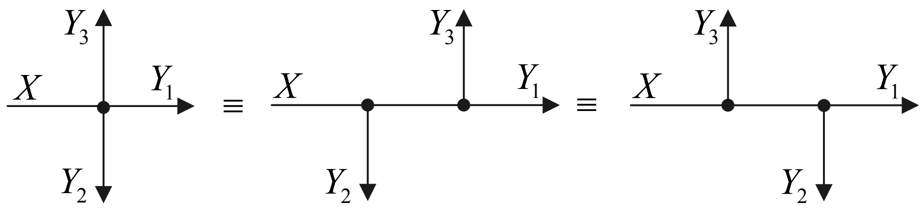
$$\Rightarrow Y = \frac{G}{1+GH}$$

۸. نقطه جمع با بیش از دو ورودی و نقاط جمع سری

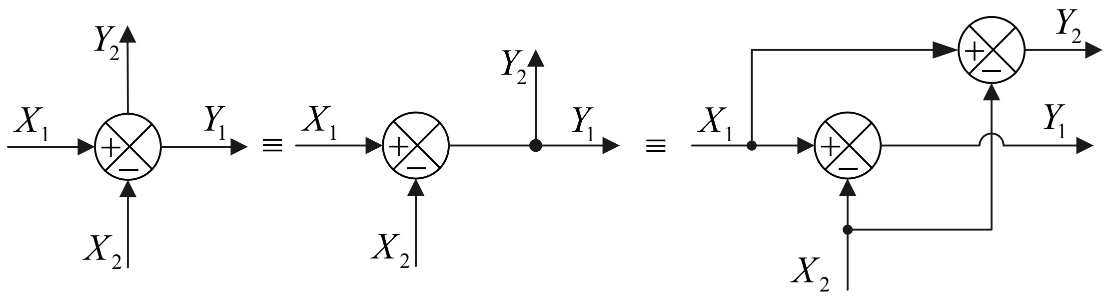




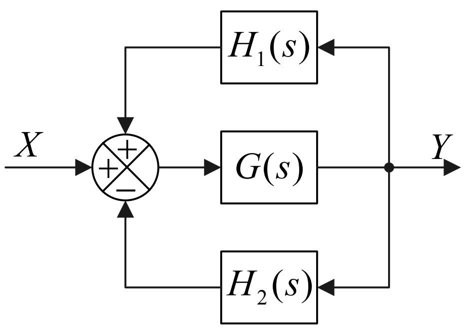
۹. نقطه انشعاب با بیش از دو انشعاب و نقاط انشعاب سری



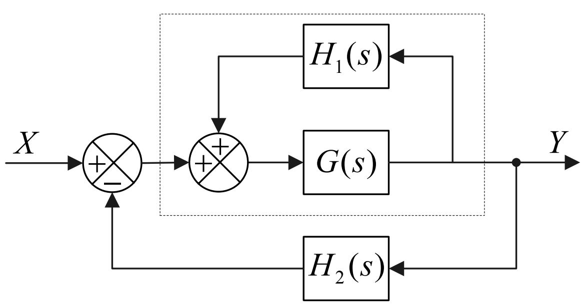
۱۰. نقطه جمع و انشعاب ترکیبی و عبور نقطه انشعاب از نقطه جمع از راست به چپ

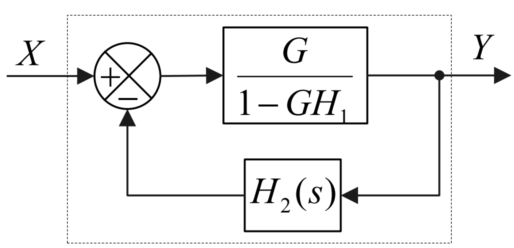


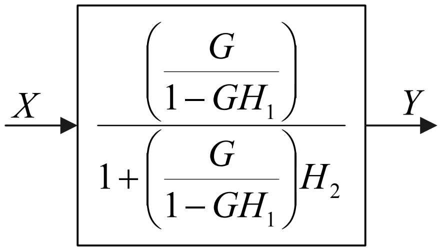
مثال:

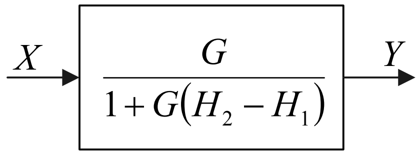


راه حل اول

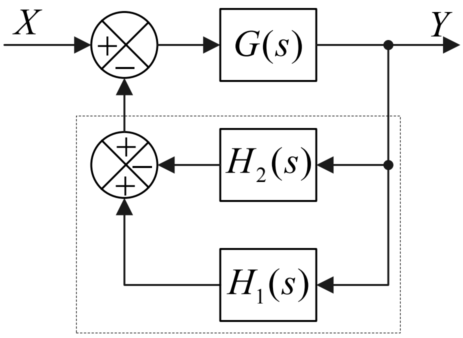


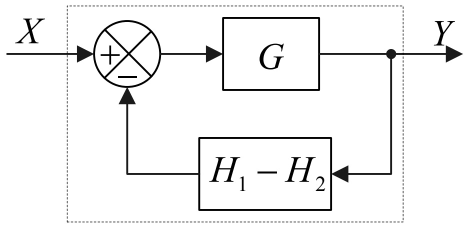


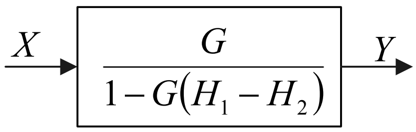




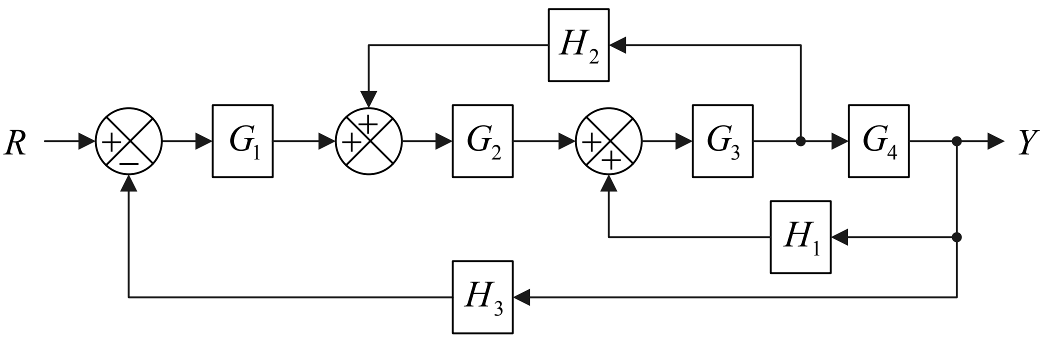
راه حل دوم:

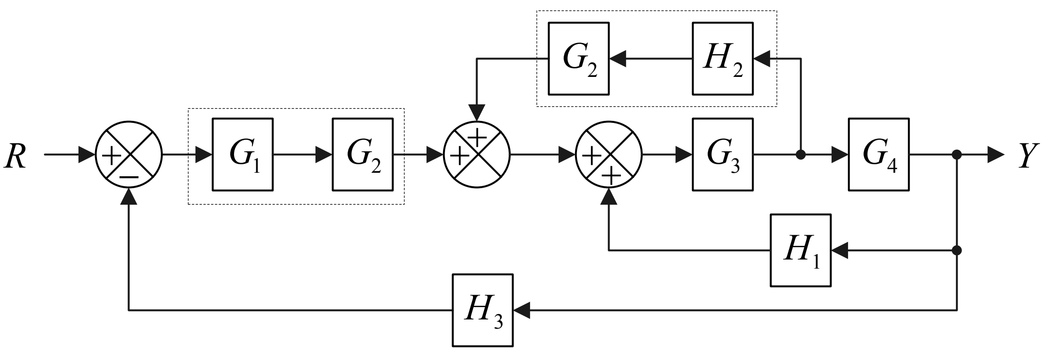


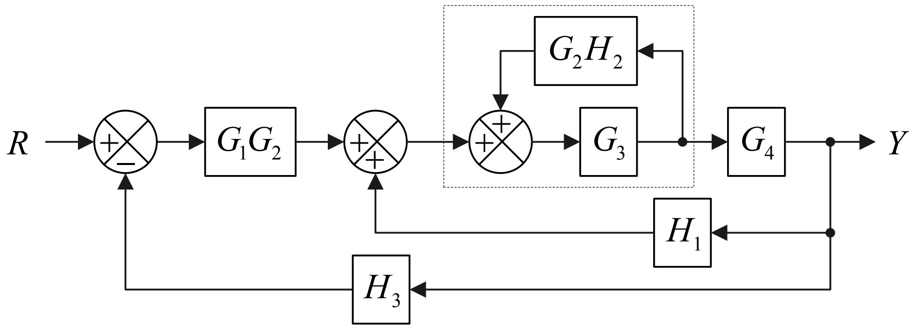


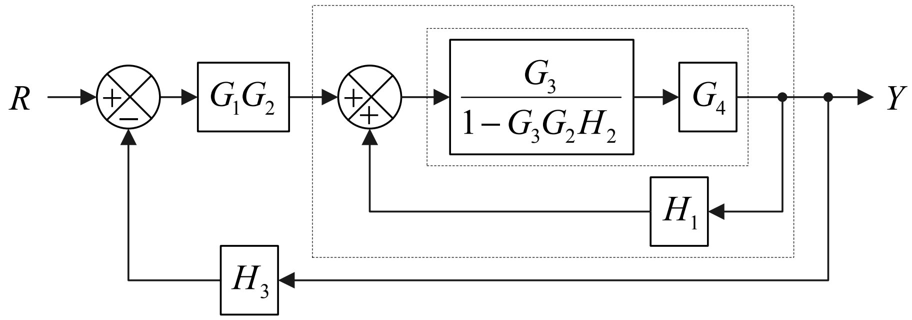


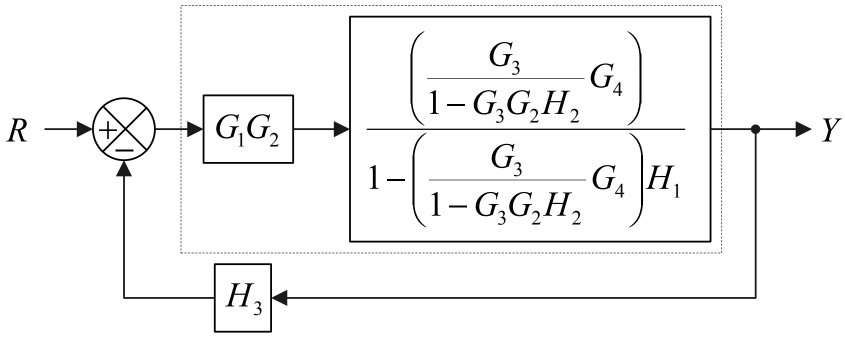
مثال:

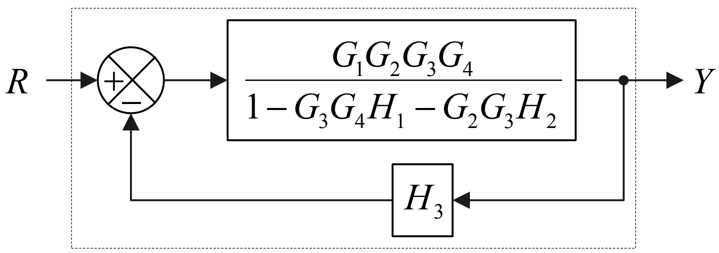


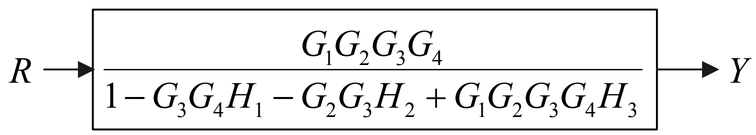



R
Y
G_1G_2
G_2H_2
G_3
G_4
H_1
H_3

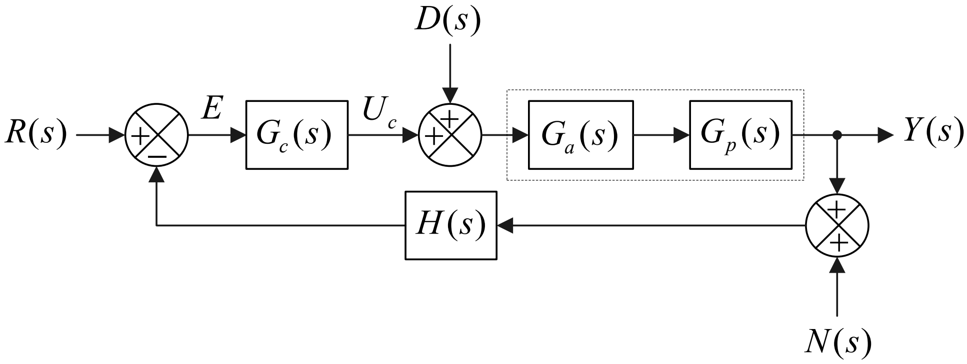

R
Y
G_1G_2
$\frac{G_3}{1-G_3G_2H_2}$
G_4
H_1
H_3


R
Y
G_1G_2
$\frac{\left(\frac{G_3}{1-G_3G_2H_2}G_4\right)}{1-\left(\frac{G_3}{1-G_3G_2H_2}G_4\right)H_1}$
H_3


R
Y
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1-G_2G_3H_2}$
H_3


R
Y
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1-G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_3}$

بلوک دیاگرام کامل یک سیستم کنترلی:



که در آن داریم:

$R(s)$: سیگنال مرجع (ورودی فرمان)

$D(s)$: ورودی اغتشاش

$N(s)$: نویز

$Y(s)$: سیگنال خروجی

E: سیگنال خروجی

U_c: سیگنال فرمان کنترلی

$G_c(s)$: تابع تبدیل کنترل کننده

$G_a(s)$: تابع تبدیل عملگر

$G_p(s)$: تابع تبدیل دستگاه (سیستم)

$H(s)$: تابع تبدیل فیلتر

در این سیستم خروجی ($y(t)$) از طریق یک حسگر مناسب مورد اندازه گیری و مشاهده قرار می گیرد. با توجه به اینکه امکان آمیخته شدن خروجی حسگر ($n(t)$) با نویز وجود دارد لذا به منظور حذف اثر نویز و استخراج سیگنال پس خور مناسب به منظور کنترل حلقه بسته از فیلتر ($H(s)$) استفاده شده است. خروجی این فیلتر با سیگنال فرمان ورودی ($r(t)$) مقایسه شده و سیگنال خطا ($e(t)$) تولید می شود. سیگنال خطا توسط کنترل کننده مورد پردازش قرار گرفته و سیگنال فرمان کنترلی مناسب ($u_c(t)$) به منظور بهبود عملکرد سیستم (کاهش سریعترسیگنال خطا) صادر می گردد. وظیفه انجام این سیگنال فرمان کنترلی بر عهده عملگر ($G_a(s)$) می باشد. البته ممکن است سیگنال فرمان کنترلی قبل از اعمال به عملگر تحت تأثیر اغتشاش ($d(t)$) قرار گیرد. در چنین صورت باید کنترل کننده چنان طراحی شده باشد که حتی المقدور با اثرات اغتشاش مقابله کند. پس از انجام سیگنال فرمان کنترلی توسط عملگر، ورودی مناسب برای دستگاه، به منظور بهبود عملکر سیستم تولید شده که منجر به کاهش خطا خواهد گردید.

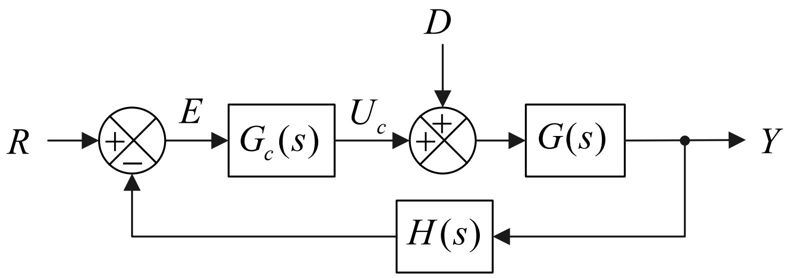
مثال:

فرض کنید به منظور تنظیم مناسب جهت آنتن و گرفتن صدا و تصویر مناسب از کانال تلویزیونی دلخواه، پس از انتخاب کانال مربوطه، شخصی در داخل منزل مسؤلیت دیدن تصویر را عهده ار شده و شخص دیگری روی پشت بام کار تنظیم جهت آنتن را انجام دهد. در این صورت چشمان فرد داخل منزل نقش حسگری را بازی می کند که کیفیت تصویر دریافتی توسط تلویزیون را مورد سنجش قرار می دهد. این کیفیت با تصویر مطلوبی (ورودی مرجع) که در ذهن او وجود دارد توسط مغزش (کنترل کننده) مورد پردازش قرار گرفته و فرمان کنترلی مناسب به منظور تغییر جهت آنتن صادر می شود. این فرمان به گوش فرد بالای پشت بام (عملگر) رسیده و با انجام آن توسط او، رفته رفته به کیفیت تصویر دلخواه دست می یابند. چنانچه در حین صدور فرمان کنترلی توسط فرد داخل خانه، شخصی که در بالای پشت بام است، جلب منظره ای که در اطراف اوست یا متوجه حادثه ای که در آن نزدیکی اتفاق افتاده ، شود و یا موبایل او زنگ خورده و حواسش متوجه پاسخگویی به آن شده باشد، چه بسا فرمان کنترلی مورد نظر برای تنظیم جهت آنتن را خوب نشنود که در این صورت عملکرد کنترلی مختل خواهدشد. در این صورت هر کدام از عواملی که موجب حواس پرتی شخص عملگر شده اند را می توان یک اغتشاش به حساب آورد.

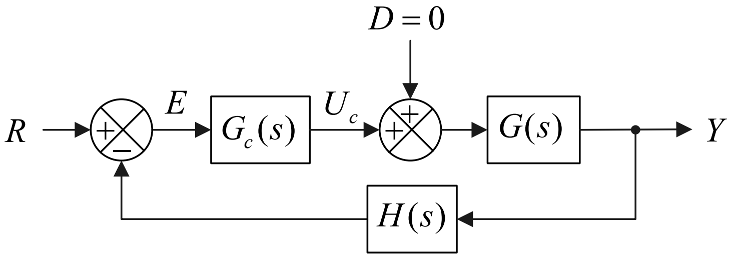
مثالهای مشابه زیادی را می توان با دقت در فعالیهای روزانه خود به دست آورد:

- راننده ای که بر اساس مشاهده خود از طریق سرعت سنج اتومبیل و با توجه به سرعت مطلوبی که مورد نظرش بوده، با تنظیم پدال گاز توسط پای خود، سعی در رسیدن به سرعت مطلوب دارد.
- شخصی که برای دستیابی به دمای آب مطلوبی که جهت شستشو در ذهن دارد با دریافتی که از دمای آب توسط حس لامسه خود می یابد و مقایسه آن با دمای مطلوب در جهت تنظیم (باز یا بستن) شیرهای آب سرد و گرم تصمیم گیری کرده و تصمیم حاصل را توسط دست خود به انجام می رساند.
- هیأت مدیره ای (**کنترل کننده**) که پس از کسب آمار و اطلاعات به دست آمده از مجموعه خود توسط عوامل کارشناس آموزش دیده برای این منظور (**حسگر**) و جداسازی اطلاعات درست از اطلاعات نادرستی که می تواند به خاطر غفلت عوامل آمارگیری شده و آمارگیرنده (**نویز**) به وقوع پیوسته باشد، توسط افراد خبره (**فیلتر**)، با مقایسه وضعیت موجود با وضعیت مطلوبی که سرلوحه کار بوده (**ورودی مرجع**) توسط دفتر ارزیابی ، در خصوص بهبود وضعیت موجود تصمیم گیری کرده و آن را در قالب بخشنامه های لازم (**سیگنال فرمان کنترلی**) به مجموعه خود ابلاغ می کنند تا با اجرای آنها توسط زیربخشهای مربوطه اوضاع مجموعه به وضع مطلوب برسد. قطعاً در نظر گرفن هرگونه توصیه یا روابط و ... در حین انجام بخشنامه ها می تواند به عنوان اغتشاش، عملکرد مجموعه را دچار اختلال سازد.

اگر از اثر نویز صرف نظر کنیم :

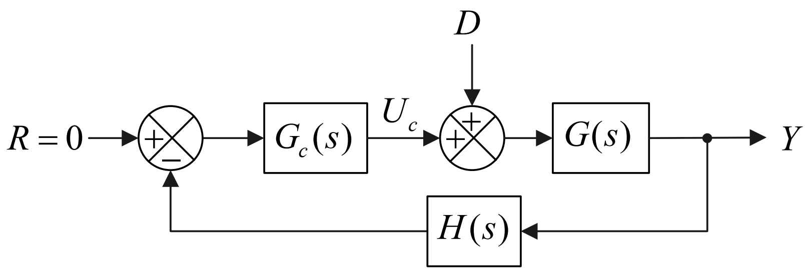


برای محاسبه اثر ورودی مرجع ($R(s)$) در خروجی داریم:



$$C_R(s)=\frac{G_C(s)G(s)}{1+G_C(s)G(s)H(s)}R(s)$$

برای محاسبه اثر ورودی اغتشاش ($D(s)$) در خروجی داریم:



$$C_D(s)=\frac{G(s)}{1+G_C(s)G(s)H(s)}D(s)$$

به این ترتیب خروجی سیستم در اثر ورودی مرجع و ورودی اغتشاش به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}C(s)&=C_R(s)+C_D(s)\\&=\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}R(s)+\frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}D(s)\end{aligned}$$

از لحاظ کنترلی (در حالت ایده آل) باید $G_c(s)$ و $H(s)$ را به نحوی طراحی کنیم که اثر ورودی اصلی در خروجی صد در صد گردد و همزمان با آن اثر ورودی اغتشاش در خروجی صفر گردد:

$$\begin{cases} C_R(s) \simeq R(s) \\ C_D(s) \simeq 0 \end{cases}$$

برای رسیدن به این خواسته های کنترلی باید داشته باشیم:

$$C_R(s) \simeq R(s) \Rightarrow \left|\frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}\right| \simeq 1$$

$$\xrightarrow{|G_c(s)G(s)H(s)|>>1} \left|\frac{1}{H(s)}\right| \simeq 1 \Rightarrow |H(s)| \simeq 1$$

$$C_D(s) \simeq 0 \Rightarrow \left|\frac{G(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)}\right| \simeq 0$$

$$\xrightarrow{|G_c(s)G(s)H(s)|>>1 \& |H(s)|\approx 1} \left|\frac{1}{G_c(s)}\right| \simeq 0 \Rightarrow |G_c(s)| \gg 1$$

بنابراین برای تحقق اهداف مورد نظر باید علاوه بر انتخاب $H(s)$ به صورتی که $|H(s)| \simeq 1$ (فیدبک منفی واحد) باید $G_c(s)$ نیز به نحوی طراحی گردد که:

$$\begin{cases} |G_c(s)G(s)| \gg 1 \\ \quad |G_c(s)| \gg 1 \end{cases}$$

نکته: با توجه به اینکه نقش اصلی $H(s)$ در بلوک دیاگرام سیستم کنترلی فوق، فیلتر کردن اثر نویز ($N(s)$) آمیخته شده با خروجی در مسیر فیدبک است، بدیهی است که با نادیده گرفتن نویز ($N(s)=0$) به شرط $|H(s)| \simeq 1$ رسیده باشیم.

خواص سیستم کنترلی حلقه بسته

۱. امکان کاهش اثر اغتشاش در خروجی
۲. امکان پایدارسازی سیتم ناپایدار
۳. افزایش پهنای باند سیستم حلقه بسته
۴. کاهش حساسیت سیستم

حساسیت (Sensitivity)

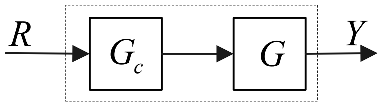
y را به صورت تابعی از متغیرهای θ_1، θ_2 و $\cdots$ در نظر بگیرید:

$$y = f(\theta_1, \theta_2, \cdots)$$

آنگاه طبق تعریف، حساسیت y به هر یک از متغیرهای θ_i به صورت زیر حواهد بود:

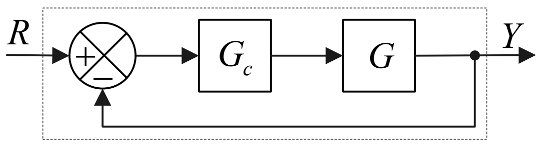
$$S_{\theta_i}^{y}=\frac{\frac{\partial y}{\partial \theta_i}}{\frac{y}{\theta_i}}=\frac{\partial \ln y}{\partial \ln \theta_i}$$

حال به منظور مقایسه سیستم حلقه باز و سیستم حلقه بسته تحت شرایط یکسان از نقطـه نظـر حـساسیت، حساسیت تابع تبدیل کل هر کدام از این دو سیستم را نسبت به تابع تبدیل حلقه باز محاسبه می کنیم:



$$G_T=G_cG$$

$$S_G^{G_T}=\frac{\frac{\partial G_T}{\partial G}}{\frac{G_T}{G}}=\frac{G_C}{\frac{GG_C}{G}}=1\Rightarrow \%S_G^{G_T}=\%100$$

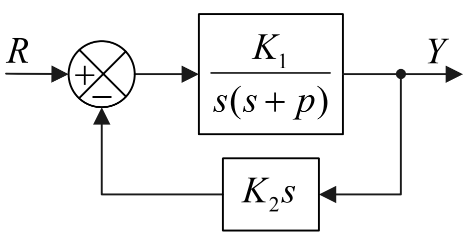


$$G_T=\frac{G_CG}{1+G_CG}$$

$$S_G^{G_T}=\frac{\frac{\partial G_T}{\partial G}}{\frac{G_T}{G}}=\frac{\frac{G_C(1+G_CG)-G_C(G_CG)}{(1+G_CG)^2}}{\frac{\left(\frac{G_CG}{1+G_CG}\right)}{G}}=\frac{1}{1+G_CG}\xrightarrow{|G_CG|\gg 1}S_G^{G_T}\approx 0$$

این بدان معناست، در حالی که در سیستم حلقه باز، حساسیت تابع تبدیل کل سیستم ($(G_T(s)$) بـه تـابع تبدیل حلقه باز ($(G(s)$)، 100% است، در سیستم حلقه بسته مشابه می توان کنترل کننـده ($(G_c(s)$) را به نحوی طراحی کرد ($|G_c(s)G(s)|\gg 1$) که حساسیت تابع تبدیل کل سیستم به تابع تبدیل حلقه بـاز حتی المقدور کم گردد.

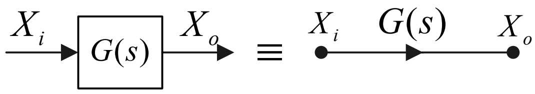
مثال:

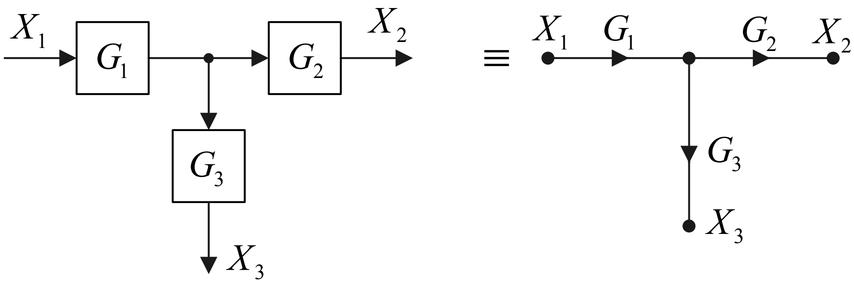


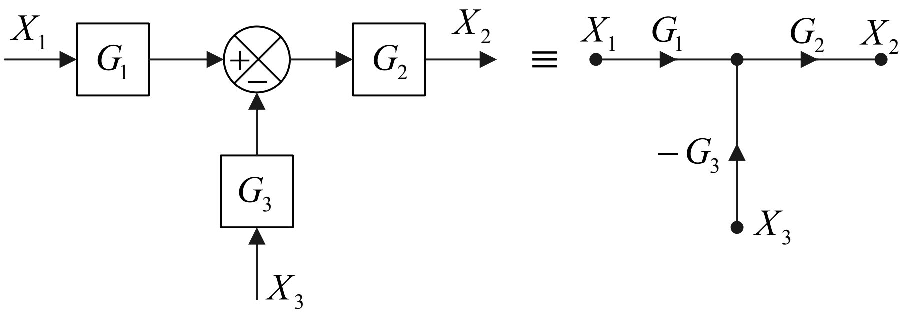
$$G_{cl}(s)=\frac{\dfrac{K_1}{s(s+p)}}{1+\dfrac{K_1}{s(s+p)}K_2 s}=\frac{K_1}{s^2+(K_1K_2+p)s}$$

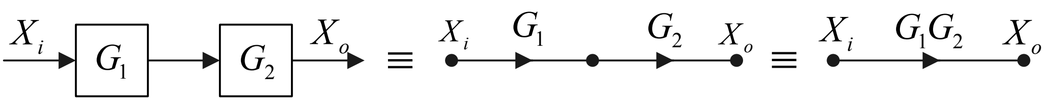
$$S_p^{G_{cl}}=\frac{\dfrac{\partial G_{cl}(s)}{\partial p}}{\dfrac{G_{cl}(s)}{p}}=\frac{\dfrac{-K_1 s}{\left[s^2+(K_1K_2+p)s\right]^2}}{\dfrac{\dfrac{K_1}{s^2+(K_1K_2+p)s}}{p}}=\frac{p}{s+(K_1K_2+p)}$$

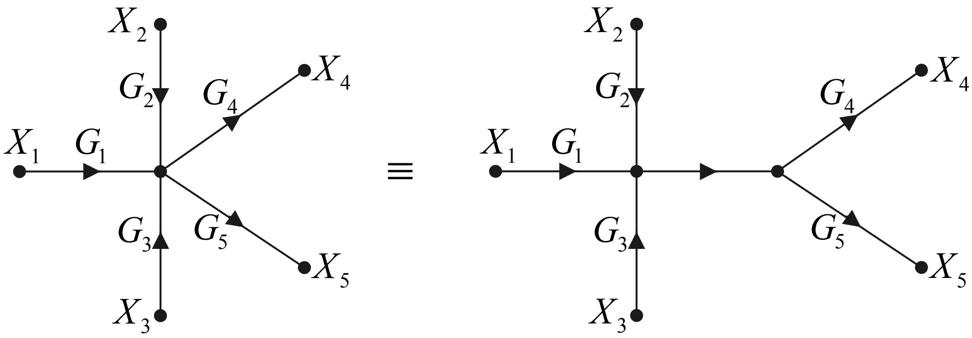
۵. نمودار گذر سیگنال(Signal Flow Graph):



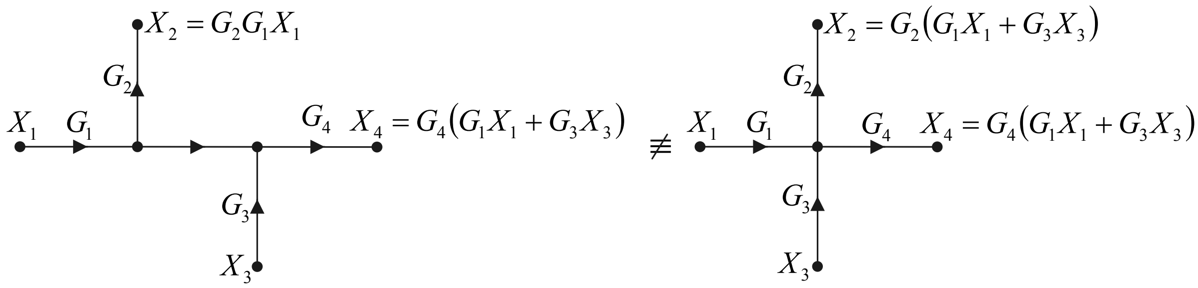




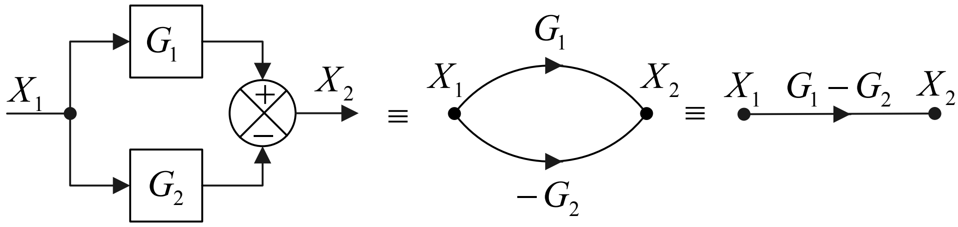




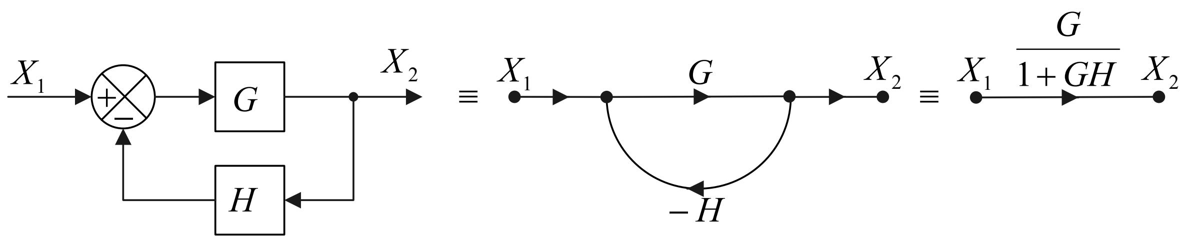
X_2
G_2
G_4
X_4
X_1
G_1
$\equiv$
G_3
G_5
X_5
X_3



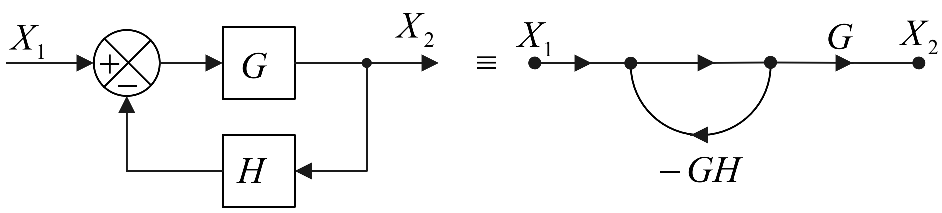
$X_2 = G_2 G_1 X_1$
$X_2 = G_2 (G_1 X_1 + G_3 X_3)$
X_1
G_1
G_2
G_4
$X_4 = G_4 (G_1 X_1 + G_3 X_3)$
$\not\equiv$
G_3
X_3



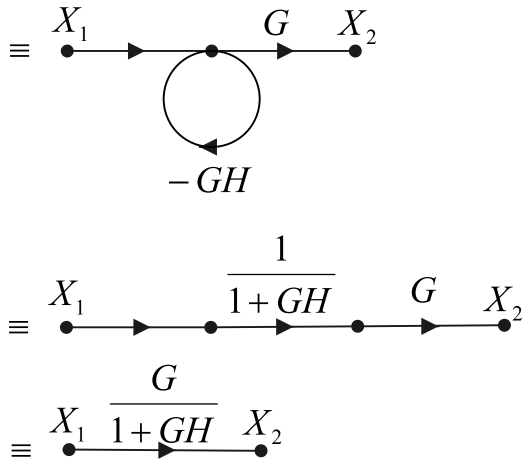
X_1
G_1
G_2
X_2
$\equiv$
$-G_2$
$G_1 - G_2$



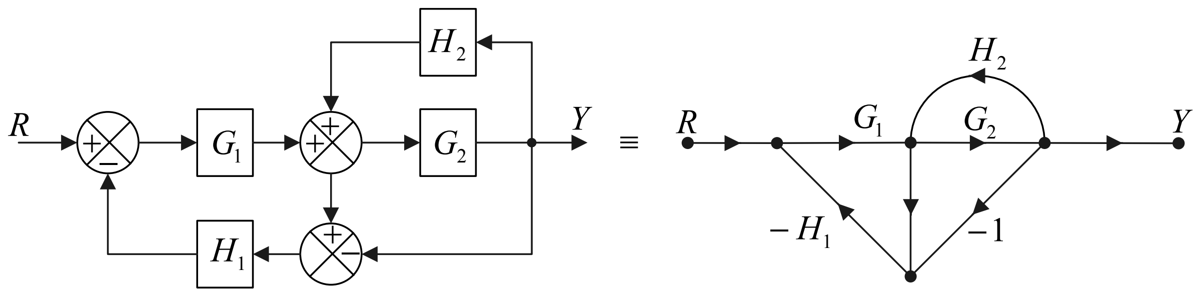
X_1
G
H
X_2
$\equiv$
$-H$
$\dfrac{G}{1+GH}$



X_1
G
H
X_2
$\equiv$
$-GH$



مثال:



قاعده میسون (Masson's Law) – (SFG)

یکی از روشهای منظم و ساده برای به دست آوردن تابع تبدیل کل یک سیستم از روی نمودار جعبه ای آن استفاده از قاعده میسون است. برای توضیح این روش که بر اساس نمودار گذر جریان سیستم بنا نهاده شده است، لازم است که ابتدا تعاریف زیر ارائه شود:

گره ورودی(Input) : گرهی که هیچ شاخه وارد شونده ای نداشته باشد (تمامی شاخه های مربوط به آن خارج شونده باشند).

گره خروجی (Out put) : گرهی که هیچ شاخه خارج شوند ه ای نداشته باشد (تمامی شاخه های مربوط به آن وارد شونده باشند).

مسیر(Path) : مجموعه ای از شاخه های هم جهت از گره مبدأ (i) به گره مقصد (j) به گونه ای که طی مسیر از هر گره حداکثر یکبار عبور شود.

مسیر پیشرو (Forward Path) : هر مسیری از گره ورودی به گره خروجی

نکته: حتما باید بین گره ورودی و گره خروجی حداقل یک مسیر پیشرو وجود داشته باشد و گرنه تابع تبدیل کل سیستم (بین ورودی و خروجی مورد نظر) صفر می شود.

حلقه (Loop) : مجموعه ای از شاخه های هم جهت از که از یک گره مبدأ شروع شده و نهایتاً به همان گره ختم شده باشد به گونه ای که طی مسیر از هر گره حداکثر یکبار عبور شود. به عبارت دیگر می توان گفت حلقه، مسیری است که در آن گره مبدأ و مقصد بر هم منطبق باشند.

بهره مسیر (Path Gain) : حاصلضرب بهره های شاخه های تشکیل دهنده هر مسیر را بهره مسیر گویند.

بهره حلقه (Loop coin) : حاصلضرب بهره های شاخه های تشکیل دهنده هر حلقه را بهره حلقه گویند.

حلقه های غیر مماس (Non Touching Loops) : حلقه های مماس حلقه هایی هستند که حداقل در یک گره مشترک باشند ولی حلقه های غیر مماس در هیچ گرهی مشترک نیستند.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} =$$ تابع تبدیل کل سیستم (تابع تبدیل حلقه بسته)

$P_i \quad i = 1,2,\cdots$ بهره مسیرهای پیش خورد:

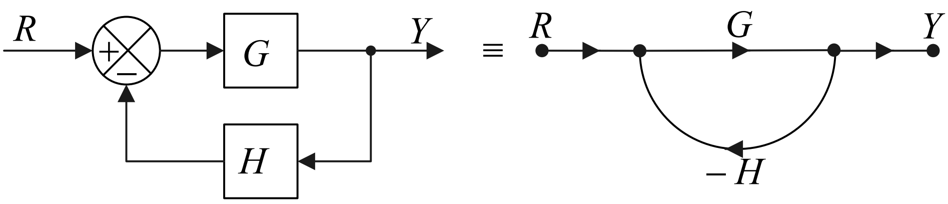
$L_j \quad j = 1,2,\cdots$ بهره حلقه های SFG:

دترمینان گراف: $$\Delta = 1 - \Sigma\left(L_j\right) + \sum_{\text{هردوحلقه غیرمماس}}\left(L_k L_{k'}\right) + \sum_{\text{هرسه حلقه غیرمماس}}\left(L_k L_{k'} L_{k''}\right) + \cdots$$

$\Delta_i \quad i = 1,2,\cdots$ کو فاکتور مسیر iام: از صفر گذاشتن بهره تمام حلقه های مماس با مسیر iام درعبارت Δ بدست می آید.

تابع تبدیل کل سیستم:
$$G_{cl} = \frac{\sum_{i=1} P_i \Delta_i}{\Delta}$$

مثال:



$P_1 = (1)(G)(1) = G$ بهره مسیرهای پیش خورد:

$L_1 = (G)(-H) = -GH$ بهره حلقه های SFG:

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 - GH$$ دترمینان گراف:

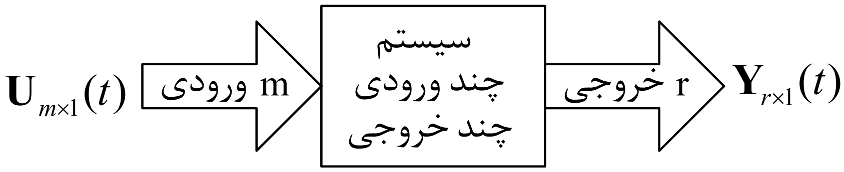
$$\Delta_1 = \Delta\big|_{L_1=0} = 1$$ کو فاکتور مسیر 1ام:

تابع تبدیل کل سیستم:

$$G_{cl}(s) = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{(G)(1)}{1+GH} = \frac{G}{1+GH}$$

۶. معادلات فضای حالت(State Space Equation):

حداقل تعداد متغیرهای حالتی (شرایط اولیه ای) که با داشتن آنها در ابتدای کار سیستم و با مشخص بودن ورودی می توانیم حالت آینده سیستم را تعیین کنیم (مرتبه سیستم)



در حالت کلی سیستم را mورودی و r خروجی(MIMO) در نظر می گیریم:

بردارورودی: $\mathbf{U}_{m\times1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ بردارخروجی: $\mathbf{Y}_{r\times1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$

بردار حالت سیستم: $\mathbf{X}_{n\times1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ حالت اولیه سیستم: $\mathbf{X}(0^-) = \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ \vdots \\ x_n(0^-) \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

خروجی سیستم تابعی از ورودیها ومتغیرهای حالت است.

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots, u_m; t) \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)$$

در سیستمهای خطی معادلات فضای حالت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1m}u_m \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2m}u_m \\ \vdots \\ y_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + d_{r2}u_2 + \cdots + d_{rm}u_m \end{cases}$$

بر اساس معادلات فضای حالت فوق سیستم علاوه بر خطی بودن، به شرطی تغییر ناپذیربا زمان است کـه تمام ضرایب در معادلات ثابت باشند. معادلات فضای حالت سیستمهای خطی را می توان به صورت زیـر بـه شکل ماتریسی نیز نوشت:

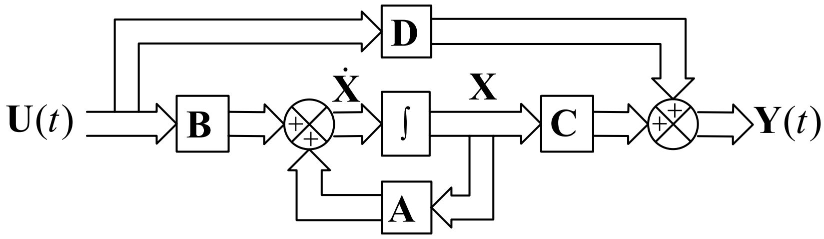
$$\overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{X}}_{n\times 1}} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}_{n\times n}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{X}_{n\times 1}} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_{n\times m}} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}_{m\times 1}}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}}^{\mathbf{Y}_{n\times 1}} = \overbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{22} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}_{r\times n}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{\mathbf{X}_{n\times 1}} + \overbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}_{r\times m}} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}^{\mathbf{U}_{m\times 1}}$$

معادلات فضای حالت به دست آمده به صورت خلاصه زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{n\times 1} = \mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} + \mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{U}_{m\times 1} \\ \mathbf{Y}_{r\times 1} = \mathbf{C}_{r\times n}\mathbf{X}_{n\times 1} + \mathbf{D}_{r\times m}\mathbf{U}_{m\times 1} \end{cases}$$

اگر ماتریسهای A,B,C,D همگی متشکل از اعداد ثابت باشند، سیستم علاوه بر خطی بودن، تغییر ناپذیر با زمان نیز است.



نمودار بلوکی سیستم کنترل پیوسته زمانی خطی در نمایش فضای حالت

با قرار دادن $m=1$ و $r=1$ معادلات فضای حالت سیستمهای یک ورودی یک خروجی (SISO) به دست می آید:

$$SISO\ :\ \begin{cases} m=1 \\ r=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{n\times 1}=\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}+\mathbf{B}_{n\times 1}u_{1\times 1} \\ u_{1\times 1}=\mathbf{C}_{1\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}+\mathbf{d}_{1\times 1}u_{1\times 1} \end{cases}$$

بدست آوردن تابع تبدیل از روی معادلات فضای حالت:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{BU} \\ \mathbf{Y}=\mathbf{CX}+\mathbf{DU} \end{cases}$$

بردارحالت اولیه $\mathbf{X}(0^-)$

با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{BU} &\Rightarrow S\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}(0^-)=\mathbf{AX}(s)+\mathbf{BU}(s) \\ &\Rightarrow S\mathbf{X}(s)-\mathbf{AX}(s)=\mathbf{BU}(s)+\underbrace{\mathbf{X}(0^-)}_{\text{حوزه زمان}} \\ &\Rightarrow (S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s)=\mathbf{BU}(s)+\mathbf{X}(0^-) \\ &\Rightarrow \mathbf{X}(s)=\underbrace{(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس بخش حالت صفرپاسخ حالت}}+\underbrace{(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)}_{\text{تبدیل لاپلاس بخش ورودی صفرپاسخ حالت}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}=\mathbf{CX}+\mathbf{DU} &\Rightarrow \mathbf{Y}=\mathbf{C}[(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)+(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)]+\mathbf{DU}(s) \\ &\Rightarrow \mathbf{Y}=\underbrace{[\mathbf{C}(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{U}(s)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر}}+\underbrace{\mathbf{C}(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)}_{\text{تبدیل لاپلاس پاسخ ورودی صفر}} \end{aligned}$$

چون تابع تبدیل، بصورت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی با شرایط اولیه صفر تعریف می شود بنابر این برای به دست آوردن تابع تبدیل، $\mathbf{X}(0^-)$ را صفر در نظر می گیرم.

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\mathbf{Y}_{r\times 1}(s)}{\mathbf{U}_{m\times 1}(s)}=\mathbf{C}_{r\times n}(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_{n\times m}+\mathbf{D}_{r\times m}$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s)\\ Y_2(s)\\ \vdots\\ Y_r(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s)\\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2m}(s)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{r1}(s) & g_{r2}(s) & \cdots & g_{rm}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s)\\ U_2(s)\\ \vdots\\ U_m(s)\end{bmatrix}$$

$$g_{ij}(s)=\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}\Leftrightarrow Y_i(s)=g_{ij}(s)U_j(s)$$

برای سیستمهای خطی یک ورودی یک خروجی (SISO) داریم:

$$SISO\Rightarrow\begin{cases} r=1\\ m=1\end{cases}\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}_{1\times n}(S\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_{n\times 1}+\mathbf{d}_{1\times 1}$$

$$s\mathbf{I}_{n\times n}-\mathbf{A}_{n\times n}=s\begin{bmatrix} 1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}-\mathbf{A}_{n\times n}\Rightarrow(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}adj\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

$$G(s)=\mathbf{C}_{1\times n}\frac{adj\,(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\mathbf{B}_{n\times 1}+\mathbf{d}_{1\times 1}=\mathbf{C}_{1\times n}\frac{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}_{n\times n}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\mathbf{B}_{n\times 1}+\mathbf{d}_{1\times 1}$$

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{bs^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}\qquad :\ a_0=1$$

چندجمله ای مشخصه سیستم: $D(s)=\det\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)$

نکته: در سیستمهای اکیداً مناسب (Strictly Proper) ماتریس $\mathbf{D}$ در نمایش معادلات فضای حالت برابر با صفر خواهد بود.

حل معادلات فضای حالت:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t)&=L^{-1}\left\{\mathbf{X}(s)\right\}\\ &=L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BU}(s)\right\}+L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{X}(0^-)\right\}\end{aligned}$$

ماتریس گذر حالت(State Transition Matrix):

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}$$

$$\mathbf{X}(t)=\underbrace{\mathbf{\Phi}(t)*\mathbf{B}(t)}_{\text{بخش حالت صفر}}+\underbrace{\mathbf{\Phi}(t)*\mathbf{X}(0^-)}_{\text{بخش ورودی صفر}}$$

اگر $u(t)=0$ باشد:

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Phi}(t)*\mathbf{X}(0^-)$$

برای محاسبه خروجی داریم:

راه حل اول:

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathbf{CX}(t)+\mathbf{d}u(t)=\mathbf{C}\left[\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{B}*u(t)+\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0^-)\right]+\mathbf{d}u(t)\\&=\left[\mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{B}*u(t)+\mathbf{d}u(t)\right]+\mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{X}(0^-)\\&=\underbrace{\left[\mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{B}+\mathbf{d}\delta(t)\right]*u(t)}_{\text{پاسخ حالت صفر}}+\underbrace{\mathbf{C\Phi}(t)\mathbf{X}(0^-)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}\end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned}Y(s)&=\mathbf{CX}(s)+\mathbf{d}U(s)\\&=\mathbf{C}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)\right]+\mathbf{d}U(s)\\&=\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{d}\right]U(s)+\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)\end{aligned}$$

اگر $u(t)=0$ باشد:

$$Y(s)=\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{d}\right]U(s)\Rightarrow G(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{d}$$

ماتریس گذر حالت(State Transition Matrix):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t)&=L^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\\&=e^{\mathbf{A}t}\\&=(\mathbf{A}t)^0+\frac{(\mathbf{A}t)^1}{1!}+\frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}+\cdots\\&=\mathbf{I}+\frac{\mathbf{A}t}{1!}+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathbf{A}^nt^n}{n!}+\cdots\end{aligned}$$

خصوصیات ماتریس گذر حالت:

1. $\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I}$

اثبات:
$$\mathbf{\Phi}(0)=e^{\mathbf{A}0}=\mathbf{I}$$
$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0)\Rightarrow\mathbf{X}(0)=\mathbf{\Phi}(0)\mathbf{X}(0)\Rightarrow\mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I}$$

2. $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\mathbf{\Phi}(-t)$

اثبات:
$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1}=e^{-\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}(-t)}=\mathbf{\Phi}(-t)$$

3. $\mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2)=\mathbf{\Phi}(t_1+t_2)$

اثبات:
$$\mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2)=e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2}=e^{\mathbf{A}t_1+\mathbf{A}t_2}=e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)}=\mathbf{\Phi}(t_1+t_2)$$

4. $\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{X}(t_0)$

اثبات:
$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0^-)=e^{\mathbf{A}t}*\mathbf{X}(0^-)=\underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}}_{\mathbf{\Phi}(t-t_0)}\underbrace{e^{\mathbf{A}t_0}\mathbf{X}(0^-)}_{\mathbf{X}(t_0)}=\mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{X}(t_0)$$

5. $\mathbf{\Phi}(t-t_1)\mathbf{\Phi}(t_1-t_0)=\mathbf{\Phi}(t-t_0)$

مثال: مسیر حالت را برای سیستمی با معادلات فضای حالت زیر برای $t\ge 0$ به دست آورده و در صفحه x_1-x_2 رسم نمایید.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad X(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \qquad u(t)=0$$

روش اول:

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right\}\xrightarrow{u(t)=0}\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0^-)$$
$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}$$
$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}=\frac{1}{s(s+4)-3(-1)}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+3)}\\ \dfrac{-3}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+3)}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{\frac{3}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{-1}{2}}{s+3} & \dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{-1}{2}}{s+3}\\ \dfrac{\frac{-3}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{s+3} & \dfrac{\frac{-1}{2}}{s+1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{s+3}\end{bmatrix}\right\}$$

روش دوم:

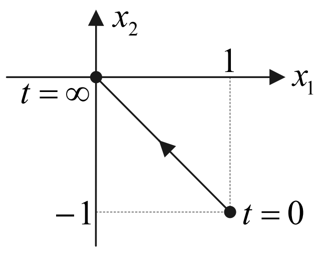
$$\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)$$

$$\xrightarrow{u(t)=0}\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0^-)$$

$$\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3\\-(s+3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{-1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}(t)=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{-1}{s+1}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1(t)=e^{-t}\\ x_2(t)=-e^{-t}\end{cases}\Rightarrow x_1=-x_2$$



تمرین: با فرض اینکه معادلات فضای حالت یک سیستم با استفاده از بردار حالت $\mathbf{X}_{n\times 1}$ به صورت $\begin{cases}\dot{\mathbf{X}}_{n\times 1}=\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}+\mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{U}_{m\times 1}\\ \mathbf{Y}_{r\times 1}=\mathbf{C}_{r\times n}\mathbf{X}_{n\times 1}+\mathbf{D}_{r\times m}\mathbf{U}_{m\times 1}\end{cases}$ داده شده باشد، با استفاده از ماتریس ناویژه $\mathbf{P}_{n\times n}$ و تعریف بردار حالت $\hat{\mathbf{X}}_{n\times 1}$ داریم:

$$\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{P}\mathbf{X}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{X}}\Rightarrow\begin{cases}\left(\mathbf{P}^{-1}\dot{\hat{\mathbf{X}}}\right)=\mathbf{A}\left(\mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{X}}\right)+\mathbf{B}\mathbf{U}\\ \mathbf{Y}=\mathbf{C}\left(\mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{X}}\right)+\mathbf{D}\mathbf{U}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\hat{\mathbf{X}}}=\left(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\right)\hat{\mathbf{X}}+\left(\mathbf{P}\mathbf{B}\right)\mathbf{U}\\ \mathbf{Y}=\left(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\right)\hat{\mathbf{X}}+\mathbf{D}\mathbf{U}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\\ \hat{\mathbf{B}}=\mathbf{P}\mathbf{B}\\ \hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\\ \hat{\mathbf{D}}=\mathbf{D}\end{cases}$$

نشان دهید که هر دو نمایش فضای حالت مرحله قبل معادل هم هستند:

$$G(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}(s)=\hat{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I}-\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{B}}+\hat{\mathbf{D}}&=\left(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\right)\left[s\mathbf{I}-\left(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\right)\right]^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{B})+\mathbf{D}\\ &=\left(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\right)\left[s\left(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\right)-\left(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\right)\right]^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{B})+\mathbf{D}\\ &=\left(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\right)\left[\mathbf{P}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)\mathbf{P}^{-1}\right]^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{B})+\mathbf{D}\\ &=\left(\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\right)\left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{-1}\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{B})+\mathbf{D}\\ &=\mathbf{C}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right)\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{B}+\mathbf{D}\\ &=\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\end{aligned}$$

بدست آوردن معادلات فضای حالت از روی تابع تبدیل(معادله دیفرانسیل):

$$X(s)\longrightarrow\boxed{G(s)}\longrightarrow Y(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}\qquad:\ a_0=1$$

$$\Leftrightarrow \left(a_0 s^{n} + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s^{1} + a_n\right) Y\left(s\right) = \left(b_0 s^{m} + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s^{1} + b_m\right) U\left(s\right)$$

$$\Leftrightarrow a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{u} + b_1 \overset{(m-1)}{u} + \cdots + b_{m-1} \overset{(1)}{u} + b_m u$$

حال می خواهیم معادلات فضای حالتی را برای این سیستم به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{d}u \end{cases}$$

به گونه ای که داشته باشیم:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{d}$$

دقت شود که با توجه به بحثهای پیشین در این حالت خواهیم داشت:

$$\mathbf{d} = \begin{cases} 0 & if \quad m < n \\ \dfrac{b_0}{a_0} & if \quad m = n \end{cases}$$

الف. $m = 0$

$$G(s) \frac{b_0}{s^{n} + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\Leftrightarrow a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 u$$

متغیرهای حالت x_1 ، x_2، ... و x_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_1 &= \overset{(1)}{y} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \overset{(n-2)}{y} \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \overset{(n)}{y} \end{cases}$$

رابطه $\dot{x}_n = \overset{(n)}{y}$ را بر اساس معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به صورت زیرخواهیم داشت:

$$\dot{x}_n = \overset{(n)}{y} = -a_1 \overset{(n-1)}{y} - a_2 \overset{(n-2)}{y} - \cdots - a_{n-1} \overset{(1)}{y} - a_n y + b_0 u$$

$$\dot{x}_n = \overset{(n)}{y} = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

نکته: همانطور که انتظار می رفت با توجه به اکیداً مناسب بودن سیستم ($m < n$)، در نمایش معادلات فضای حالت سیستم، $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ به دست آمد.

ب. $m = n$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\Leftrightarrow \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1} \overset{(1)}{u} + b_n u$$

اگر از روش (الف) استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = \overset{(n)}{y} &= -a_1 \overset{(n-1)}{y} - \cdots - a_{n-1} \overset{(1)}{y} - a_n y + b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1} \overset{(1)}{u} + b_n u \\ &= -a_1 x_n - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1} \overset{(1)}{u} + b_n u \end{aligned}$$

که با توجه به ظاهر شدن مشتقات u در رابطه $\dot{x}_n$ ، تعریف معادلات فضای حالت برآورده نمی شود. برای حل این مشکل لازم به نظر می رسد که در تعریف متغیرهای حالت u و مشتقات آن را نیز دخالت داد.

متغیرهای حالت x_1 ، x_2، ... و x_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \overset{(1)}{y} - \beta_0 \overset{(1)}{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \overset{(2)}{y} - \beta_0 \overset{(2)}{u} - \beta_1 \overset{(1)}{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{n-1}=\overset{(n-2)}{y}-\beta_0\overset{(n-2)}{u}-\cdots-\beta_{n-3}\overset{(1)}{u}-\beta_{n-2}u=\dot{x}_{n-2}-\beta_{n-2}u$$
$$x_{n}=\overset{(n-1)}{y}-\beta_0\overset{(n-1)}{u}-\cdots-\beta_{n-2}\overset{(1)}{u}-\beta_{n-1}u=\dot{x}_{n-1}-\beta_{n-1}u$$

با استفاده از تعریف متغیرهای حالت فوق داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2+\beta_1u\\
\dot{x}_2&=x_3+\beta_2u\\
\dot{x}_3&=x_4+\beta_3u\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}&=x_n+\beta_{n-1}u
\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ $\dot{x}_n$ با مشتق گرفتن از رابطهٔ مربوط به متغیر حالت x_n فوق داریم:

$$\dot{x}_n=\overset{(n)}{y}-\beta_0\overset{(n)}{u}-\beta_1\overset{(n-1)}{u}-\cdots-\beta_{n-3}\overset{(3)}{u}-\beta_{n-2}\overset{(2)}{u}-\beta_{n-1}\overset{(1)}{u}$$

حال با جایگذاری $\overset{(n)}{y}$ بر اساس معادلهٔ دیفرانسیل اولیه خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n=&-a_1\overset{(n-1)}{y}-a_2\overset{(n-2)}{y}-a_3\overset{(n-3)}{y}-\cdots-a_{n-1}\overset{(2)}{y}-a_{n-1}\overset{(1)}{y}-a_ny\\
&+b_0\overset{(n)}{u}+b_1\overset{(n-1)}{u}+b_2\overset{(n-2)}{u}+\cdots+b_{n-2}\overset{(2)}{u}+b_{n-1}\overset{(1)}{u}+b_nu\\
&-\beta_0\overset{(n)}{u}-\beta_1\overset{(n-1)}{u}-\beta_2\overset{(n-2)}{u}-\cdots-\beta_{n-3}\overset{(3)}{u}-\beta_{n-2}\overset{(2)}{u}-\beta_{n-1}\overset{(1)}{u}
\end{aligned}$$

با جایگذاری($\dot{y}$ ، $\ddot{y}$ ، ... و $\overset{(n-1)}{y}$) بر اساس تعریف متغیرهای حالت (x_1 ، x_2، ... و x_n) داریم:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n=&-a_1\left[x_n+\beta_0\overset{(n-1)}{u}+\beta_1\overset{(n-2)}{u}+\cdots+\beta_{n-2}\overset{(1)}{u}+\beta_{n-1}u\right]\\
&-a_2\left[x_{n-1}+\beta_0\overset{(n-2)}{u}+\beta_1\overset{(n-3)}{u}+\cdots+\beta_{n-3}\overset{(1)}{u}+\beta_{n-2}u\right]\\
&-a_3\left[x_{n-2}+\beta_0\overset{(n-3)}{u}+\beta_1\overset{(n-4)}{u}+\cdots+\beta_{n-4}\overset{(1)}{u}+\beta_{n-3}u\right]\\
&\vdots\\
&-a_{n-1}\left[x_2+\beta_0\overset{(1)}{u}+\beta_1u\right]\\
&-a_n\left[x_1+\beta_0u\right]\\
&+b_0\overset{(n)}{u}+b_1\overset{(n-1)}{u}+b_2\overset{(n-2)}{u}+\cdots+b_{n-2}\overset{(2)}{u}+b_{n-1}\overset{(1)}{u}+b_nu\\
&-\beta_0\overset{(n)}{u}-\beta_1\overset{(n-1)}{u}-\beta_2\overset{(n-2)}{u}-\cdots-\beta_{n-3}\overset{(3)}{u}-\beta_{n-2}\overset{(2)}{u}-\beta_{n-1}\overset{(1)}{u}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_n = &-a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-2} x_3 - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 \\
&+ \left(b_0 - \beta_0\right) \overset{(n)}{u} \\
&+ \left(a_1\beta_0 + b_1 - \beta_1\right) \overset{(n-1)}{u} \\
&+ \left(a_1\beta_1 - a_2\beta_0 + b_2 - \beta_2\right) \overset{(n-2)}{u} \\
&\vdots \\
&+ \left(a_1\beta_{n-2} - a_2\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0 + b_{n-1} - \beta_{n-1}\right) \overset{(1)}{u} \\
&+ \left(a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0 + b_n\right) u
\end{aligned}
$$

به این ترتیب برای آنکه مشتقهای ورودی ($\dot{u}$ ، $\ddot{u}$، ... و $\overset{(n)}{u}$) در رابطهٔ مربوط به $\dot{x}_n$ وجود نداشته‌باشد، باید داشته‌باشیم :

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = b_0 \\
&\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \\
&\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
&\vdots \\
&\beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - a_2\beta_{n-3} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0
\end{aligned}
$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$
\dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 - \beta_n u
$$

که در آن:

$$
\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
-a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u
$$

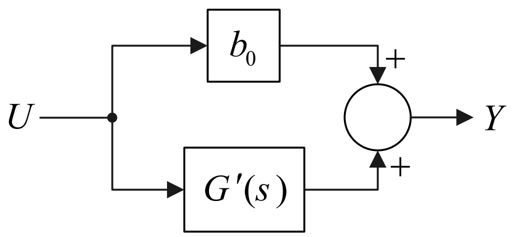
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

تحقق موازی:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad m \le n$$
$$= \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

به منظور کلیت روش مسأله را برای حالت $m = n$ تشریح می کنیم:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$
$$= b_0 + \frac{b'_0 s^{n-1} + b'_1 s^{n-2} + \ldots + b'_{n-2}s + b'_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = b_0 + \frac{N'(s)}{D(s)}$$
$$= b_0 + G'(s)$$
$$= b_0 + \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$



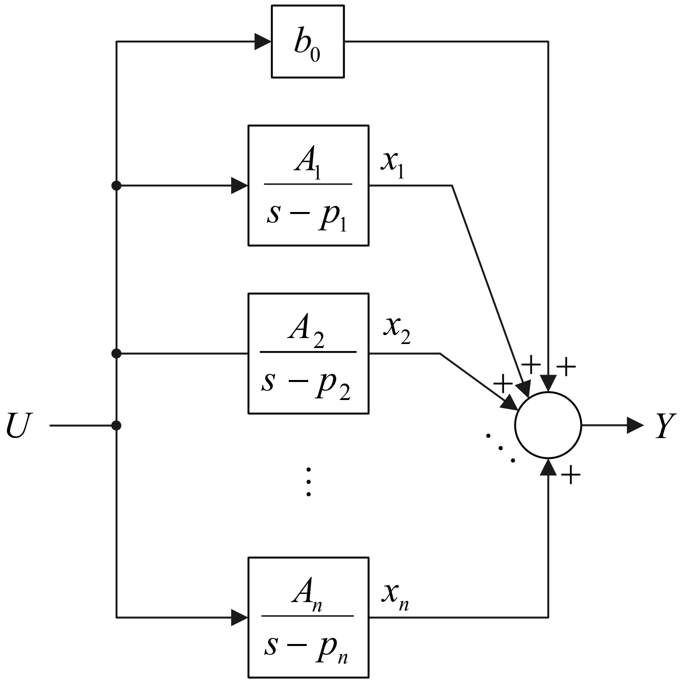
حال با فرض اینکه تابع تبدیل سیستم دارای قطبهای حقیقی غیر تکراری باشد با تجزیه $G(s)$ به کسرهای جزئی داریم:

$$G(s) = b_0 + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_n} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

که در آن:

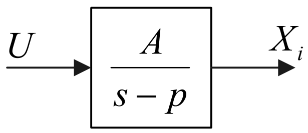
$$A_i = (s - p_i)\frac{N'(s)}{D(s)}\bigg|_{s = p_i}$$

به این ترتیب سیستم با تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت بلوک دیاگرام (موازی) زیر می توان بازسازی کرد:



حال می توان خروجی هر کدام از بلوکها را به دلخواه یک متغیر حالت در نظر گرفته و بر اساس آن معادلات حالت سیستم را به دست آورد.

برای این منظور به عنوان نمونه (برای سادگی کار) اگر خروجی بلوک i ام را مطابق شکل، متغیر حالت iام (x_i) بگیریم داریم:



که براساس آن خواهیم داشت:

$$\frac{X_i}{U}=\frac{A_i}{s-p_i} \Leftrightarrow (s-p_i)X_i = A_i U \Leftrightarrow \dot{x}_i - p_i x_i = A_i u \Rightarrow \dot{x}_i = p_i x_i + A_i u$$

حال می توان خروجی هر کدام از بلوکها را بـه دلخـواه یـک متغیـر حالـت در نظر گرفتـه و بـر اسـاس آن معادلات حالت سیستم را به دست آورد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - p_1 x_1 = A_1 u \\ \dot{x}_2 - p_2 x_2 = A_2 u \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_n - p_n x_n = A_n u \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + b_0 u$$

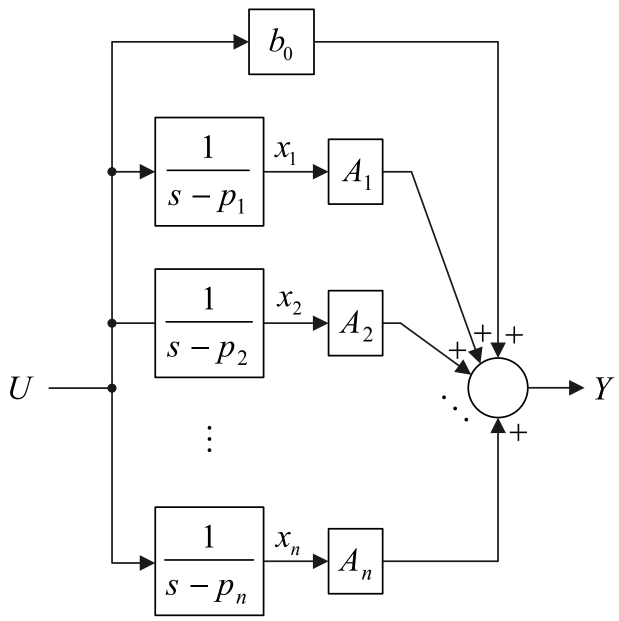
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

با توجه به شکل معادلات فضای حالت حاصل از روش تحقق موازی، آن را تحقق قطری نیز می نامند.

نکته: در صورتی که $m < n$ در نمایش معادلات فضای حالت سیستم، $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ خواهد شد.

البته تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت بلوک دیاگرام (موازی) زیر نیز می توان بازسازی کرد:



که براساس آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - p_1 x_1 = u \\ \dot{x}_2 - p_2 x_2 = u \\ \quad\quad \vdots \\ \dot{x}_n - p_n x_n = u \end{cases}$$

$$y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n + b_0 u$$

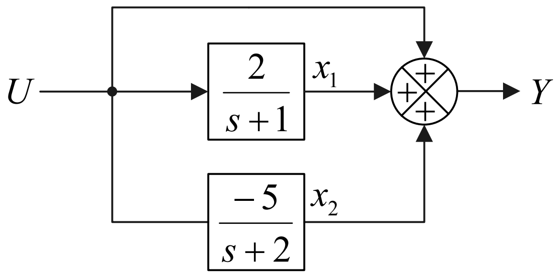
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

مثال:

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s^2+3s+2}$$

$$= 1 + \frac{-3s-1}{s^2+3s+2} = 1 - \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{2}{s+1} + \frac{-5}{s+2}$$



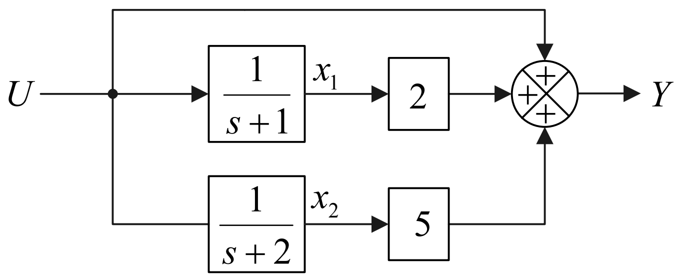
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-1)x_1 + 2u \\ \dot{x}_2 = (-2)x_2 - 5u \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1] u$$

به عنوان راه حل دوم معادلات فضای حالت را به صورت زیر نیز می توان به دست آورد:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-1)x_1 + u \\ \dot{x}_2 = (-2)x_2 + u \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = 2x_1 - 5x_2 + u \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]u$$

تحقق سری:

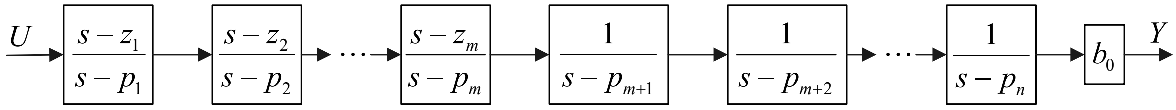
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad m \le n$$

$$= \frac{b_j \prod_{j=1}^{m} \left(s - z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(s - p_i\right)}$$

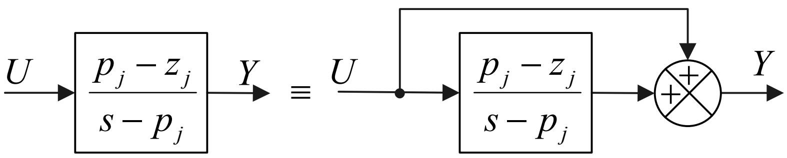
با فرض اینکه تابع تبدیل سیستم دارای قطبها و صفرهای حقیقی باشد داریم:

$$G(s) = \left(\frac{s - z_1}{s - p_1}\right)\left(\frac{s - z_2}{s - p_2}\right)\cdots\left(\frac{s - z_m}{s - p_m}\right)\left(\frac{1}{s - p_{m+1}}\right)\left(\frac{1}{s - p_{m+2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{s - p_n}\right)b_0$$

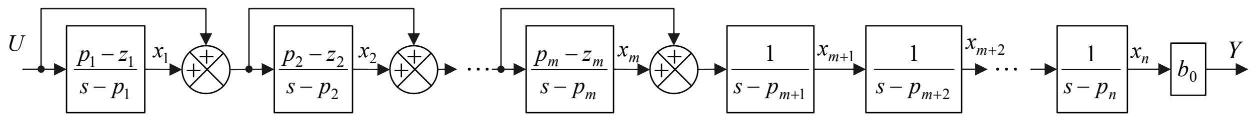
به این ترتیب سیستم با تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت بلوک دیاگرام (سری) زیر می توان بازسازی کرد:



به منظور به دست آوردن معادلات فضای حالت، بلوکهایی که در آنها درجه صورت و مخرج باهم برابرند را به صورت زیر معادل می کنیم:



به این ترتیب خواهیم داشت:



$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = p_1 x_1 + (p_1 - z_1)u \\
\dot{x}_2 = p_2 x_2 + (p_2 - z_2)[x_1 + u] \\
\vdots \\
\dot{x}_m = p_m x_m + (p_m - z_m)[x_1 + \cdots + x_{m-1} + u] \\
\dot{x}_{m+1} = p_{m+1} x_{m+1} + (1)[x_1 + \cdots + x_m + u] \\
\dot{x}_{m+1} = p_{m+2} x_{m+2} + (1) x_{m+1} \\
\vdots \\
\dot{x}_n = p_n x_n + (1) x_{n-1}
\end{cases}
$$

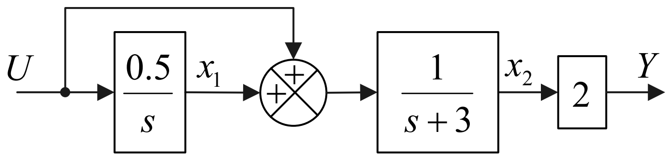
$$y = b_0 u$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \dot{x}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
(p_2 - z_2) & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(p_m - z_m) & (p_m - z_m) & \cdots & p_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 1 & p_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 & p_{m+2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & p_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} p_1 - z_1 \\ p_2 - z_2 \\ \vdots \\ p_m - z_m \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+ [0] u
$$

مثال:

$$G(s)=\frac{2s+1}{s^2+3s}=\frac{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}{s(s+3)}=\left(\frac{s+0.5}{s}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)2$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=(0)x_1+0.5u\\ \dot{x}_2=(-3)x_2+1(x_1+u)\end{cases} \qquad y=2x_2$$

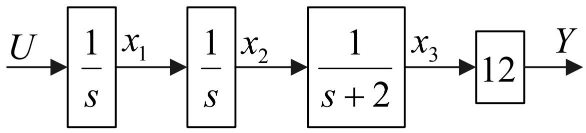
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

مثال:

$$G(s)=\frac{12}{s^3+2s^2}$$

تحقق سری:

$$G(s)=\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)12$$

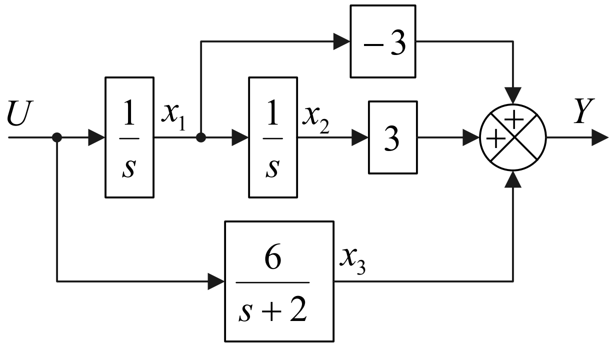


$$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=x_1\\ \dot{x}_3=-2x_3+x_2\end{cases} \qquad y=12x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

تحقق سری-موازی:

$$G(s)=\frac{-3}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{6}{s+2}$$



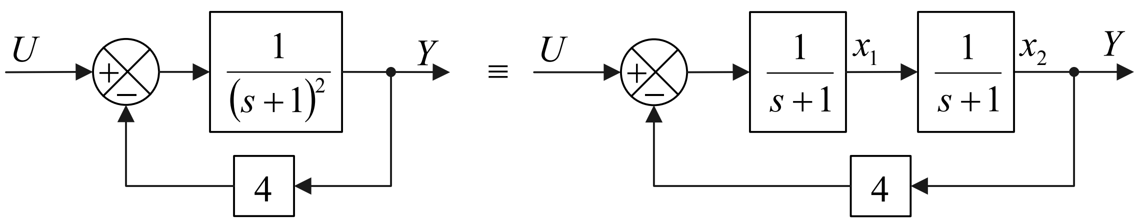
$$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=x_1\\ \dot{x}_3=-2x_3+6u\end{cases}\qquad\qquad y=-3x_1+3x_2+x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\6\end{bmatrix}u\qquad\qquad y=\begin{bmatrix}-3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$$

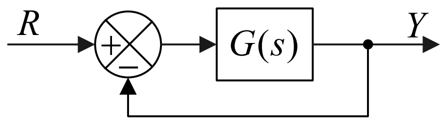
$$G(s)=\frac{1}{(s+1)^2+4}=\frac{\dfrac{1}{(s+1)^2}}{1+4\dfrac{1}{(s+1)^2}}$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+(u-4x_2)\\ \dot{x}_2=-x_2+x_1\end{cases}\qquad\qquad y=2x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

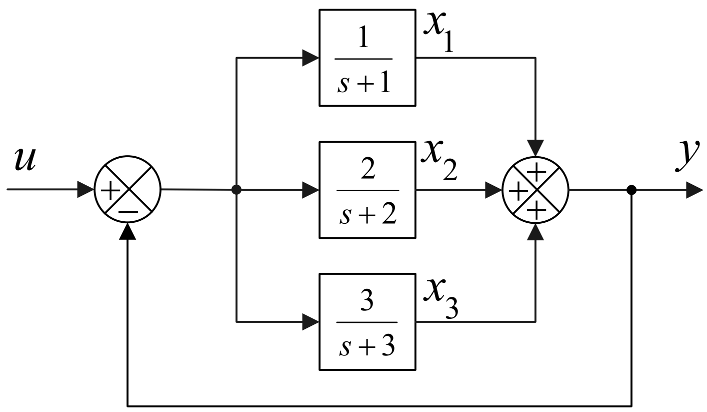
مثال: با تجزیه تابع تبدیل $G(s)$ یک معادله فضای حالت برای شکل زیر ارائه کنید.



$$G(s)=\frac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

با تجزیه تابع تبدیل $G(s)$ به کسرهای جزئی داریم:

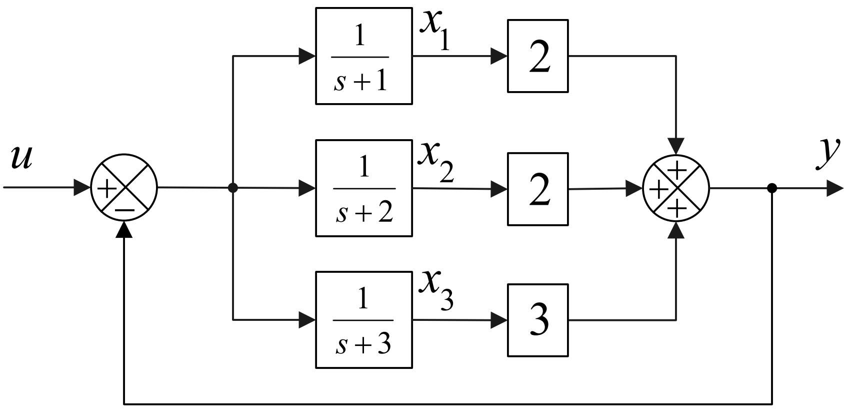
$$G(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=(-1)x_1+(1)[u-x_1-x_2-x_3]\\ \dot{x}_2=(-2)x_2+(2)[u-x_1-x_2-x_3]\\ \dot{x}_3=(-3)x_3+(3)[u-x_1-x_2-x_3]\end{cases} \qquad y=x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -2 & -4 & -2\\ -3 & -3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

یا:



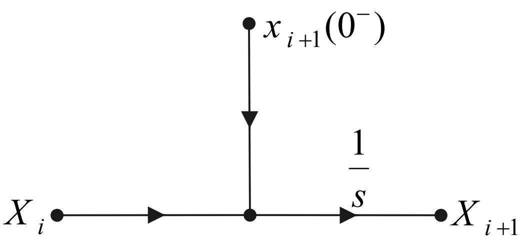
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-1)x_1 + (1)[u - x_1 - 2x_2 - 3x_3] \\ \dot{x}_2 = (-2)x_2 + (1)[u - x_1 - 2x_2 - 3x_3] \\ \dot{x}_3 = (-3)x_3 + (1)[u - x_1 - 2x_2 - 3x_3] \end{cases} \qquad y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

۷. نمودار گذر حالت(State Flow Graph):

$$\dot{x}_{i+1} = x_i \Rightarrow sX_{i+1}(s) - x_{i+1}(0^-) = X_i(s)$$

$$\Rightarrow X_{i+1}(s) = \frac{1}{s}\left[X_i(s) + x_{i+1}(0^-)\right]$$



بهره شاخه ها در این نمودار یا $\frac{1}{s}$ است یا عدد ثابت.

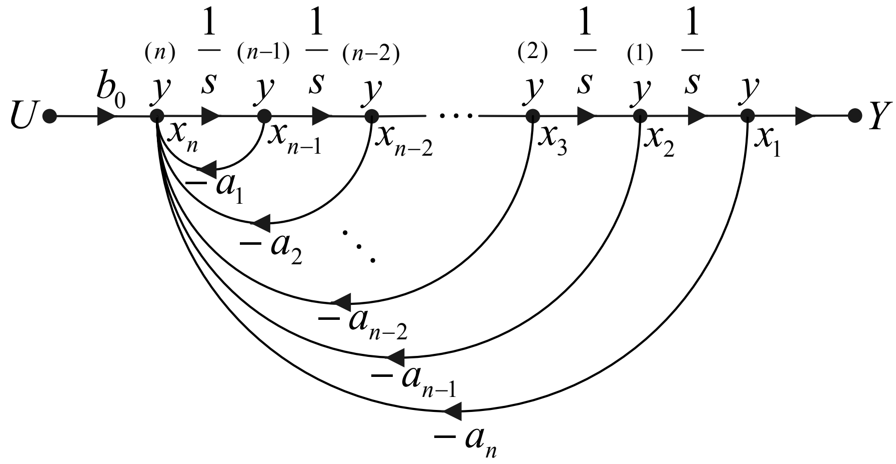
الف $m = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$= \frac{b_0 s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \ldots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$

$$\Leftrightarrow a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 u$$

به این ترتیب می توان نمودار گذر حالت زیر را برای این سیستم رسم کرد:



به راحتی می توان با استفاده از قاعده میسون صحت نمودار گذر حالت فوق را بررسی کرد:

$$G(s) = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \left[-a_1 s^{-1} - \ldots - a_{n-1} s^{-(n-1)} - a_n s^{-n} \right]$$

$$P_1 = b_0 s^{-n}$$

$$\Delta_1 = 1$$

برای به دست آوردن معادلات فضای حالت داریم::

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = b_0 u - a_n x_1 - a_{n-12} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + b_0 u \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

ب. $m \neq 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

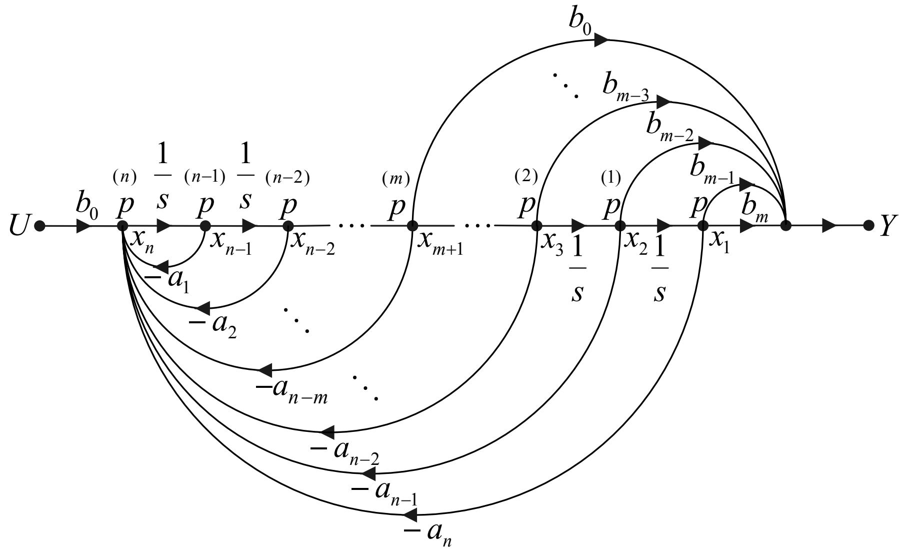
$$= \frac{b_0 s^{-(n-m)} + b_1 s^{-(n-m+1)} + \ldots + b_{m-1} s^{-(n-1)} + b_m s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \ldots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$

$$\Leftrightarrow \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1} \overset{(1)}{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1} \overset{(1)}{u} + b_n u$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{N(s)}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{P(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{D(s)} \\ \dfrac{Y(s)}{P(s)} = \dfrac{N(s)}{1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(s) = \dfrac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s) \\ Y(s) = \left[b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m \right] P(s) \end{cases}$$

به این ترتیب می توان نمودار گذر حالت زیر را برای این سیستم رسم کرد:



برای به دست آوردن معادلات فضای حالت داریم::

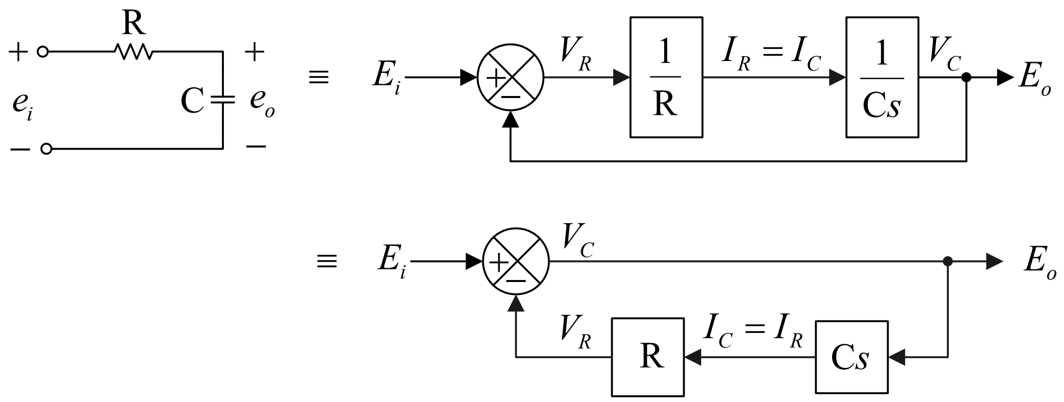
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_m = x_{m+1} \\ \dot{x}_{m+1} = x_{m+2} \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = b_0 u - a_n x_1 - a_{n-12} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + b_0 u \end{cases} \qquad y = b_0 x_{m+1} + \cdots b_m x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y=\begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

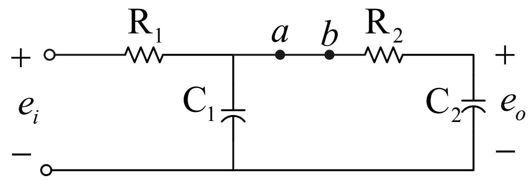
مدلسازی سیستمهای الکتریکی و مکانیکی و دو گانی بین آنها:

مدلسازی سیستمهای الکتریکی:

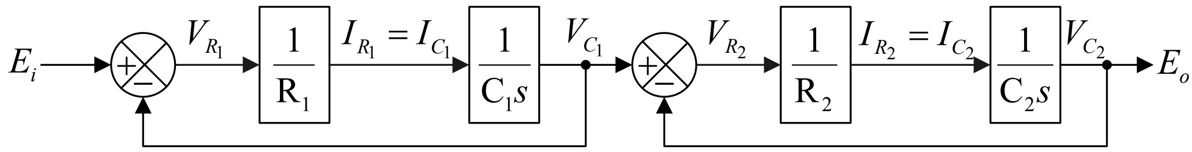


همانطور که ملاحظه می شود در هر یک از بلوک دیاگرامهای معادل به دست آمده برای مدار تمامی ولتاژها و جریانهای مدار به صورت سیگنالهایی مشخص شده اند.

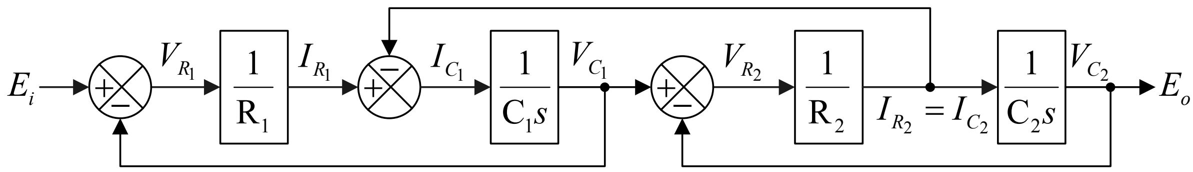
مثال:



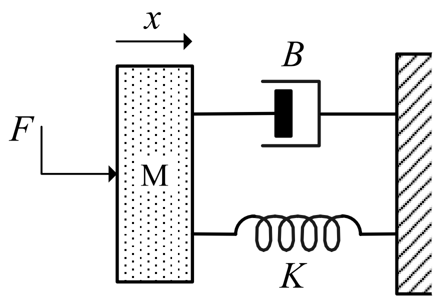
اگر بین نقاط(a,b) ، بافروجود داشته باشد:



اگر بین نقاط(a,b) ، بافروجود نداشته باشد:



دوگانی سیستمهای مکانیکی و الکتریکی:

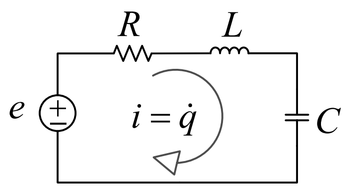


$$Mx'' + B\left(x - 0\right)' + K\left(x - 0\right) - F = 0$$

$$\Rightarrow Mx'' + Bx' + Kx = F$$

$$x' = v \Rightarrow Mv' + K\int_{-\infty}^{t} v\left(\tau\right) d\tau + Bv = F$$

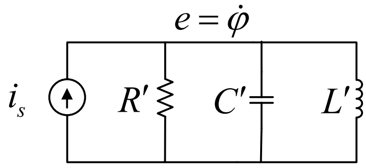
دو گانی سری



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\left(\tau\right) d\tau = e(t) \xrightarrow{i = q'} Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = e(t)$$

الکتریکی		مکانیکی	
e	منبع ولتاژ	F	نیرو
$\frac{1}{C}$	خازن	K	فنر
L	سلف	M	جرم
R	مقاومت	B	ضربه گیر
q	بار الکتریکی	x	جابجایی
i	جریان الکتریکی	$v=\dot{x}$	سرعت

دو گانی موازی



$$\frac{v}{R'}+C'\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L'}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau=i_s \xrightarrow{v=\phi'} C'\phi''+\frac{1}{R'}\phi'+\frac{1}{L'}\phi=i_s$$

الکتریکی		مکانیکی	
i_s	منبع جریان	F	نیرو
$\frac{1}{L'}$	سلف	K	فنر
C'	خازن	M	جرم
$\frac{1}{R'}$	مقاومت	B	ضربه گیر
φ	شار الکتریکی	x	جابجایی
v	ولتاژ الکتریکی	$v=\dot{x}$	سرعت