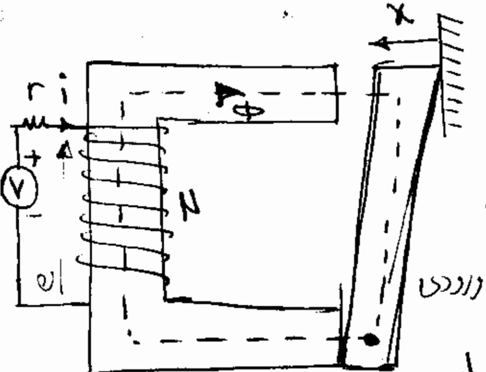
تبدیل انرژی: از دو محیط الکتریکی و مغناطیسی برای تبدیل انرژی و توان استفاده کرد.

1) تبدیل انرژی در میدان های مغناطیسی (اکثراً از این مورد استفاده می شود)

2) تبدیل انرژی در میدان های الکتریکی



تبدیل انرژی در میدان مغناطیسی:

$$\lambda = N\Phi \quad (1)$$

ولتاژ القا شده : $e = \dfrac{d\lambda}{dt}$ (2)

ولتاژ اعمالی $v = ir + e = ir + \dfrac{d\lambda}{dt}$ (3)

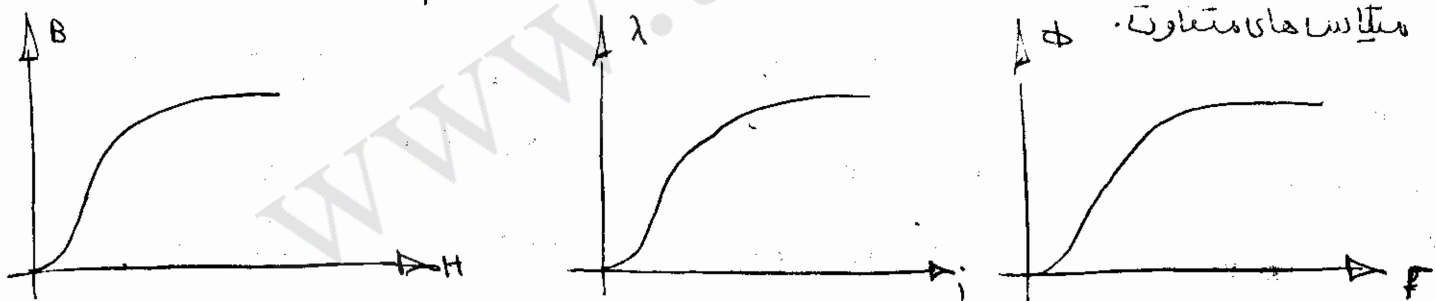
انرژی الکتریکی ورودی $dW_e = ie\,dt$ (4)

اگر x ثابت باشد:

$$dW_e = ei\,dt = dW_f \quad (5)$$

(5) در (2) $dW_e = dW_f = i\,d\lambda = f\,d\Phi \quad (f = Ni)$ (6)

* هر سه نمودار اشباع شونده با مقیاس های متفاوت.

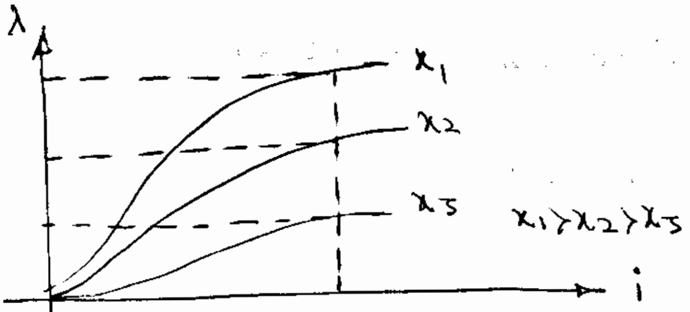


انرژی ذخیره شده توسط میدان با تغییرات جزئی در شار دور یا شار از معادله (6)

$$\Delta W_f = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda)\,d\lambda = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} f(\Phi)\,d\Phi \quad (7)$$

تلفات هیسترزیس و فوکو فعلاً به صورت یک کاسته در روابط انرژی در نظر گرفته می‌شود و از مقادیر منحنی هیسترزیس به صورت دو مقداره صرف نظر شده است.

$$W_f = \int_0^\lambda i(\lambda)d\lambda = \int_0^\Phi f(\Phi)d\Phi \quad (8)$$



مؤلفه‌های متغیر در سیستم:

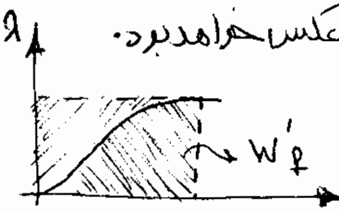
$i = i(\lambda, x)$ λ و x متغیرهای مستقل

$\lambda = \lambda(i, x)$

$$\begin{cases} W_f = W_f(\lambda, x) & 9a \\ W_f = W_f(i, x) & 9b \end{cases}$$

* تغییر در λ با x ثابت مرحله تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مغناطیسی طبق معادله 5 و 6 خواهد بود

* اگر x تغییر کند و λ ثابت نگاه داشته شود انرژی مغناطیسی به انرژی مکانیکی تبدیل خواهد شد لذا حالت عمومی تبدیل انرژی از طریق تبدیل انرژی الکتریکی به مغناطیسی به مکانیکی یا برعکس خواهد بود.

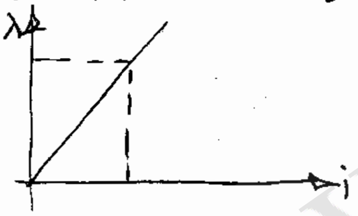


طبق معادله 8 انرژی ذخیره شده در میدان سطح محصور بین منحنی λ-i و محور λ خواهد بود

$$w_f = \int_0^\lambda i(\lambda)d\lambda$$

شبه انرژی Coenergy $W'_f(i, x) = i\lambda - W_f(\lambda, x)$ (10) $\quad W'_f = \int_0^i \lambda di$ (11)

در سیستم‌های خطی: بیشتر سیستم‌های الکترومکانیکی با فاصله هوایی می‌توانند خطی در نظر گرفته شوند.

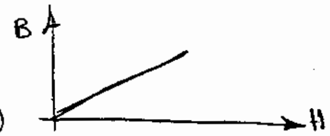


$$W_f = \frac{1}{2} i\lambda = \frac{1}{2} f\Phi = \frac{1}{2} R\Phi^2$$

(شیب خط اینست) $L = \frac{\lambda}{i}$ $\quad W_f = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L}$ (13)

L مستقل از i ولی با تغییر x تغییر خواهد کرد.

$$W_f(\lambda, x) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (14)$$



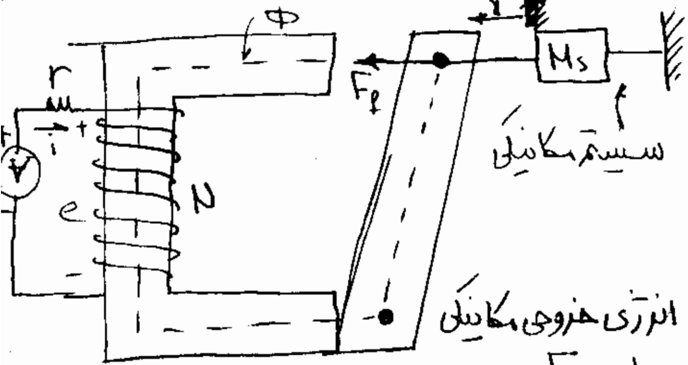
چگالی انرژی $W_f = \int_0^B H dB = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$ J/m^3 (15)

چگالی انرژی $w_f = \frac{W_f}{Al} = \int_0^\lambda \frac{iN}{l} d\frac{\lambda}{NA} = \int_0^B H dB$

$$W'_f = W_f = \frac{1}{2}\lambda i = \frac{1}{2} f\Phi = \frac{1}{2}\Phi f^2$$

$W'_f = \int_0^i (\lambda = Li)di = \frac{1}{2} Li^2$ $\quad W'_f(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2$ (17)

$$W'_f = \int_0^H B dH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \quad (18)$$



محاسبه نیرو در میدان های مغناطیسی :

انرژی مکانیکی کار انجام شده $dW_m = F_f \, dx$ (19)

انرژی مکانیکی از تغییرات میدان با تغییر x تولید می شود.

(20) تغییرات انرژی در میدان مغناطیسی − انرژی ورودی الکتریکی = انرژی خروجی مکانیکی

$$F_f \, dx = i \, d\lambda - dW_f \quad (21)$$

متغیرهای مستقل : (i, x) یا (λ, x)

با فرض متغیرهای مستقل (i, x) : $\lambda = \lambda(i, x)$

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial i} di + \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx \quad (22)$$

$$W_f = W_f(i, x) \Rightarrow dW_f = \frac{\partial W_f}{\partial i} di + \frac{\partial W_f}{\partial x} dx \quad (23)$$

روابط (22)، (23) در (21) $\Rightarrow F_f \, dx = i \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + i \frac{\partial \lambda}{\partial i} di - \frac{\partial W_f}{\partial x} dx - \frac{\partial W_f}{\partial i} di$

$$F_f \, dx = \left(i \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial W_f}{\partial x} \right) dx + \left(i \frac{\partial \lambda}{\partial i} - \frac{\partial W_f}{\partial i} \right) di \quad (24)$$

با توجه به صفر بودن ضریب di در طرف چپ $\quad i \frac{\partial \lambda}{\partial i} - \frac{\partial W_f}{\partial i} = 0 \; ; \; F_f \, dx = \left(i \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial W_f}{\partial x} \right) dx$

$$F_f = i \frac{\partial \lambda}{\partial x}(i, x) - \frac{\partial W_f}{\partial x}(i, x) \quad (25)$$

$$F_f = \frac{\partial}{\partial x} \left[i \lambda(i, x) - W_f(i, x) \right] \Rightarrow \boxed{F_f = \frac{\partial W_f'(i, x)}{\partial x}} \quad (26)$$

* تغذیه الکتریکی با جریان باشد رابطه (26) رابطه محاسبه نیرو برای میدان خواهد بود.

با فرض متغیرهای مستقل (λ, x) : $W_f = W_f(\lambda, x) \quad dW_f = \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_f}{\partial x} dx \quad (27)$

$$F_f \, dx = i \, d\lambda - \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} d\lambda - \frac{\partial W_f}{\partial x} dx$$

$$F_f \, dx = -\frac{\partial W_f}{\partial x} dx + \left(i - \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} \right) d\lambda \Rightarrow \text{ضریب } \lambda \text{ صفر است} \quad i - \frac{\partial W_f}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{\partial W_f}{\partial \lambda}(\lambda, x) \quad (28) \Rightarrow \boxed{F_f = -\frac{\partial W_f(\lambda, x)}{\partial x}} \quad (29)$$

* تغذیه الکتریکی با ولتاژ باشد از رابطه (29) استفاده می کنیم.

* نیرو همیشه در جهتی عمل می کند که انرژی را کاهش و شبه انرژی را افزایش می دهد (از معادلات 26 و 29)

جهت نیروی به وجود آمده :

1) با توجه به رابطه (29) جهت مثبت نیرو در جهت کاهش انرژی ذخیره شده میدان مغناطیسی خواهد بود.

2) با توجه به رابطه (26) جهت نیرو در جهت افزایش شبه انرژی یعنی سیستم دنبال موقعیت شبه انرژی ماکزیمم می باشد.

3) جهت نیرو در جهت کاهش رلوکتانس مدار مغناطیسی و افزایش اندوکتانس سیم پیچ در نظر گرفته می شود.

محاسبهٔ نیروی مکانیکی:

۱) سیستم غیرخطی ؛ ۲) سیستم خطی

۱) سیستم غیرخطی:

i) روش عددی: * تغییر جزئی Δx، تغییر جزئی $\Delta w_f'$ را سبب خواهد شد

$$F_f \simeq \frac{\Delta w_f'}{\Delta x}\Big|_{i=\text{ثابت}} \quad ; \quad F_f \simeq -\frac{\Delta w_f}{\Delta x}\Big|_{\lambda=\text{ثابت}}$$

* هرچه $\Delta x \to 0$ ازنظر دقت محاسبات بهتر خواهد بود.

۲) سیستم خطی:

$$w_f'(i,x) = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (17) \quad ; \quad F_f = \frac{dw_f'}{dx} = \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx} \quad (31)$$

$$w_f(\lambda,x) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (12) \qquad F_f = -\frac{dw_f}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{L(x)}\right)^2\frac{dL(x)}{dx} \quad (32)$$

$$w_f(\Phi,x) = \frac{1}{2}\mathcal{R}(x)\Phi^2 \quad (12) \qquad F_f = -\frac{dw_f}{dx} = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{\partial(\mathcal{R}(x))}{\partial x} \quad (33)$$

$$w_f(\lambda,x) = \frac{1}{2}\lambda i(x) \qquad F_f = -\frac{\partial w_f}{\partial x} = -\frac{1}{2}\lambda\frac{di(x)}{dx} \quad (34)$$

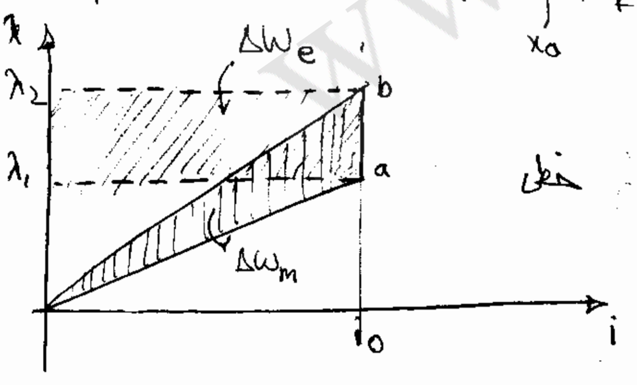
محاسبهٔ انرژی مکانیکی:

۱) با حرکت بازوی متحرک به طور خیلی آهسته یعنی جریان در سیم پیچ ثابت است.

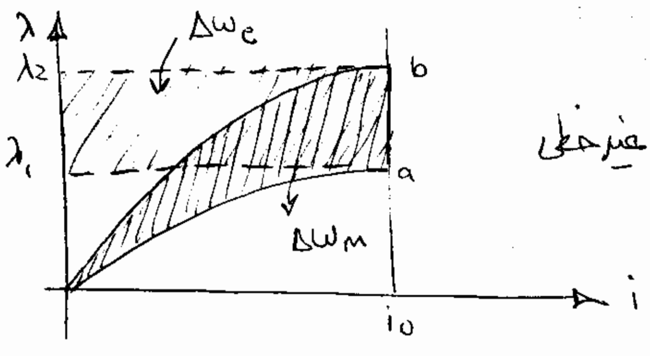
$$i = \frac{v-e}{r} = \frac{v}{r}$$

* حرکت بازو در جهت مثبت از x_a به x_b $\Leftarrow$ $\Delta W_m = \int_{x_a}^{x_b} F_f\,dx$

$$dw_f' = F_f\,dx \rightarrow \Delta W_m = \int_{x_a}^{x_b} F_f\,dx = \Delta w_f'$$ افزایش شبه انرژی



خطی



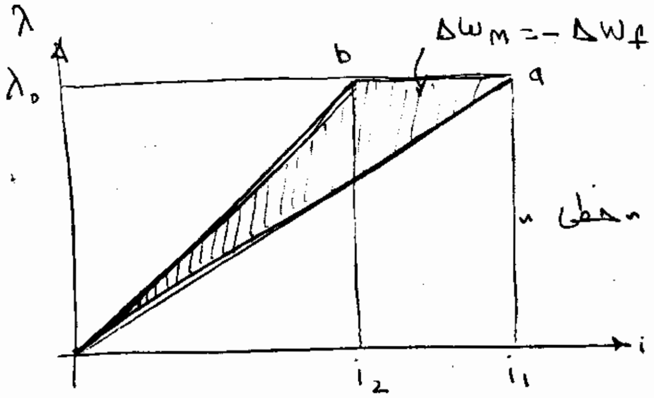
غیرخطی

در هر حالت $\Delta W_e = i_0(\lambda_2 - \lambda_1)$ (37)

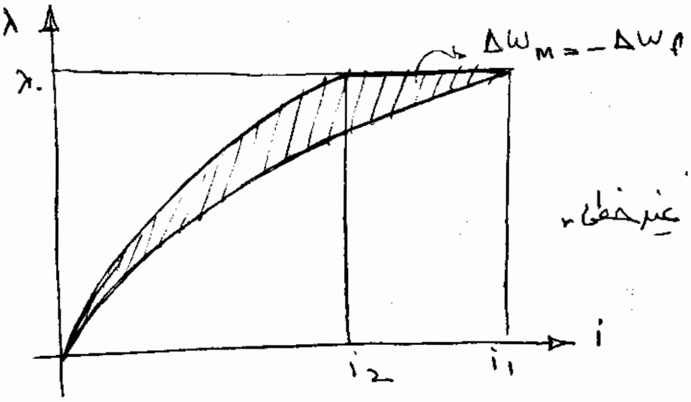
در حالت خطی $\Delta W_f = \Delta W_f' = \Delta W_m = \frac{1}{2}i_0(\lambda_2-\lambda_1) = \frac{1}{2}\Delta W_e$ (38)

۲) بازوی متحرک با سرعت خیلی زیاد (در یک لحظه) از a به b حرکت کند در این وضعیت λ ثابت خواهد بود.

$$\Delta W_m = \int_{x_a}^{x_b} F_f\,dx = -\Delta W_f(\lambda\ \text{ثابت}) \quad ; \quad \Delta W_m = -\Delta W_f\Big|_{\lambda\ \text{ثابت}}$$ کاهش انرژی میدان



« خطی »



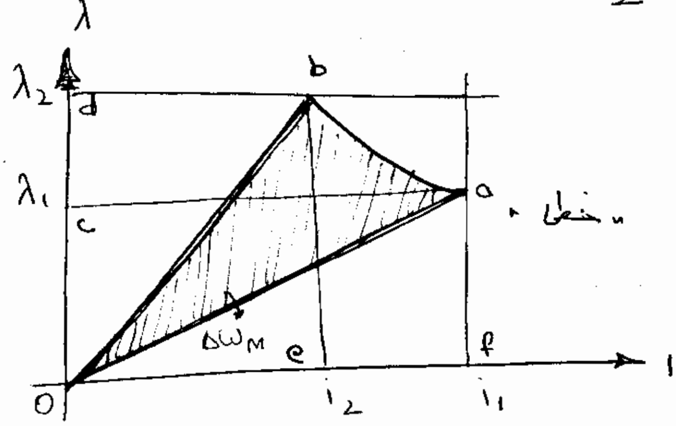
« غیرخطی »

درهمه شرایط خطی یا غیرخطی $\Delta W_e = 0$ (40)

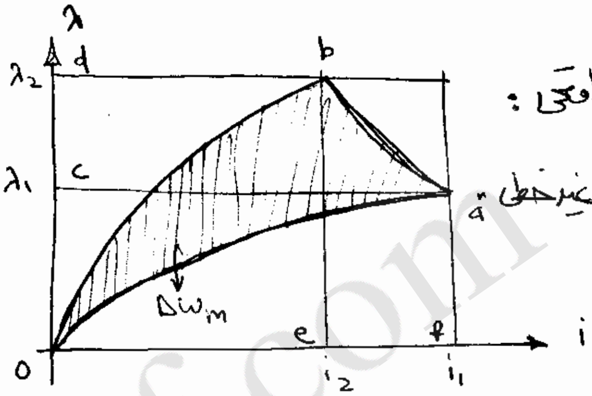
در شرایط خطی $\Delta W_m = \frac{1}{2} \lambda_0 (i_1 - i_2)$ (41)

* انرژی مکانیکی از کاهش انرژی میدان حاصل می‌شود.

3) حرکت واقعی :



« خطی »



« غیرخطی »

$\Delta W_e =$ سطح cabd ؛ $\Delta W_f =$ سطح obd − سطح oac

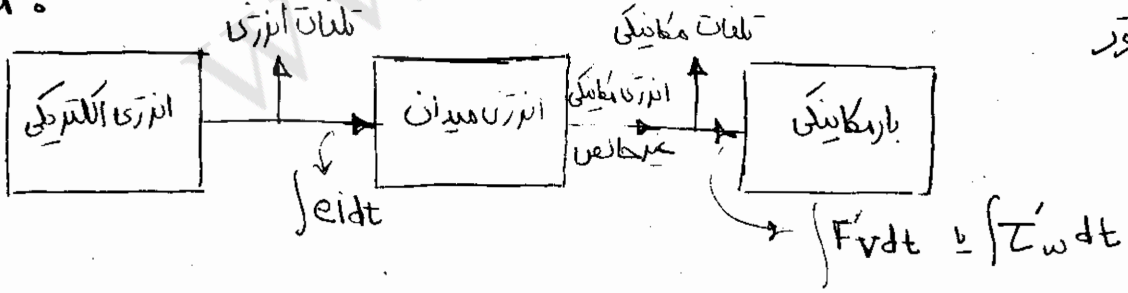
$\Delta W_m = \Delta W_e - \Delta W_f =$ سطح cabd − سطح obd + سطح oac

$\Delta W_m =$ سطح oab

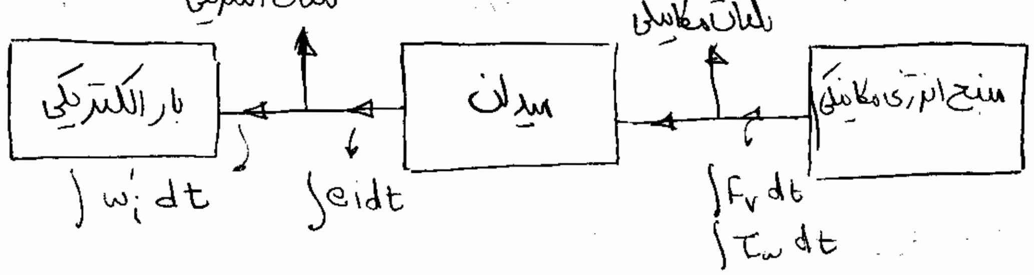
توزیع انرژی در سیستم های الکترومغناطیس :

موتور و ژنراتور

موتور :

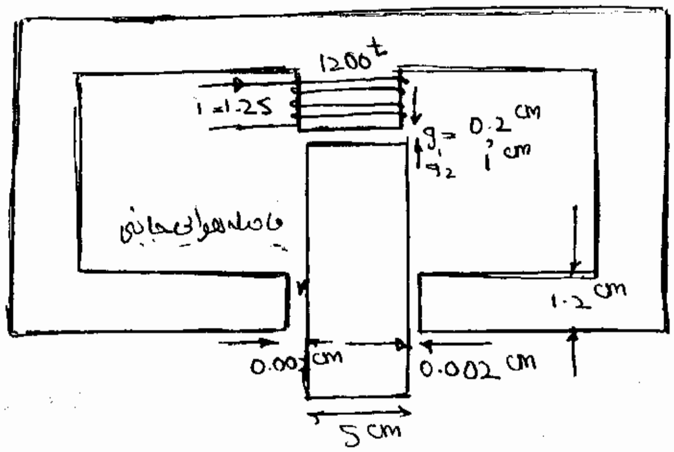


ژنراتور :



مثال ۱) درشکل نشان داده شده قسمت متحرک هسته درفاصله و قابل تنظیم می باشد سیم پیچ تحریک دارای 1200 دور و جریان ثابت برابر با 2.25A دارد منحنی مغناطیس شوندگی آهن به کار رفته با جدول زیر مشخص می باشد. اگر $g = 0.2\,cm$, $g = 1\,cm$ در دو مرحله تنظیم شود انرژی و شبه انرژی میدان را محاسبه نمایید.

$\Phi (wb)$	0.001	0.00175	0.0023	0.0025	0.0026	0.00265
mmf (A.T)	60	120	210	300	390	510



*تمام سطوح مقاطع دایره‌ای هستند.

رلوکتانس فاصله هوایی جانبی:

$$\mathcal{R}_s = \frac{0.02\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times\pi\times0.05\times0.012} = 84.4\times10^3$$

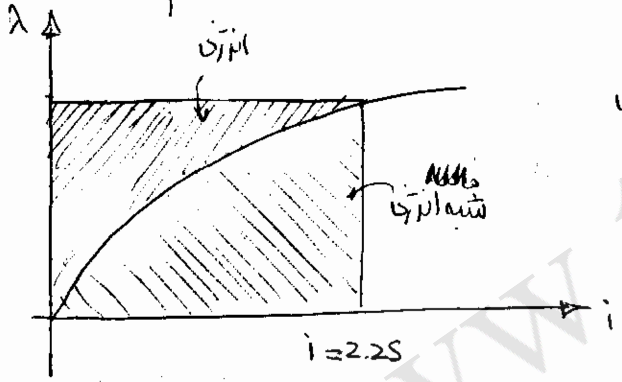
عرض فاصله هوایی — محیط قسمت دایره‌ای فاصله هوایی

$$\mathcal{R}_g = \frac{0.2\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times\frac{\pi}{4}\times(0.05)^2} = 810\times10^3$$

$$\mathcal{R}_{ag} = \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_s = 895\times10^3$$

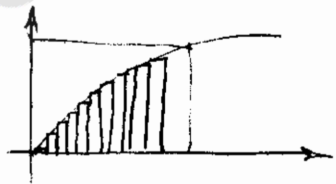
$F_{ag} = \mathcal{R}_{ag}\Phi \quad (F_{کل} = F_i + F_{ag})$ — جدول کلی مشخصه سیستم:

λ کلی	1.2	2.1	2.76	3	3.12	3.18
F کلی	955	1686	2269	2538	2717	2882
i (A)	0.769	1.405	1.891	2.115	2.264	2.4



شبه انرژی $= 3.75$ J

انرژی $= 3.26$ J



مثال 2: همچنین در فاصله $g=0.2$ cm با همان جریان تحریک 2.25 A نیروی وارده بر قسمت متحرک را محاسبه نمایید.

1 cm فاصله هوایی $\quad \mathcal{R}_g = 4052.5\times10^3$ فاصله هوایی دایره‌ای شکل $\quad \mathcal{R}_s = 84.4\times10^3$ فاصله جانبی

$$\mathcal{R}_{ag} = \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_s = 4136.7\times10^3$$

فرض می‌کنیم: $\Phi = 0.0025$ wb

$AT_{ag} = 10342 \quad ; \quad AT_i = 300$

*اگر در سیستم‌هایی با فاصله هوایی زیاد، جائیکه افت mmf روی فاصله هوایی درصد قابل توجهی از mmf ورودی باشد، از مشخصه غیرخطی آهن صرف‌نظر شود و سیستم به صورت خطی می‌تواند تحلیل گردد:

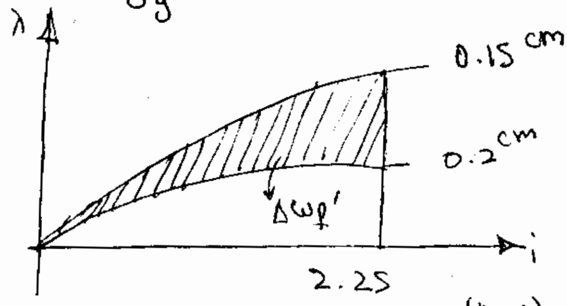
برای جریان $i=2.25$ A ؛ $F = 1200\times2.25 = 2700$ AT

$$\Phi = \frac{2700}{4136.7\times10^3} = 0.651\times10^{-3} \qquad \lambda = N\Phi = 0.784$$

انرژی میدان $= \frac{1}{2} i\lambda = \frac{1}{2}\times2.25\times0.784 = 0.882$ J

حل مثال 2: $g = 0.2$ cm و $i = 2.25$ A ؛ در حالت اول سیستم به صورت غیرخطی لحاظ شود:

$F_f = \dfrac{\partial w_f'}{\partial g}(i,g)$ $\quad \Delta g = -0.05\times10^{-2\,m}$ $\quad g+\Delta g = 0.15\times10^{-2\,m}$



برای 0.15^{cm} : $\mathcal{R}_{ag} = \underbrace{810.5\times10^3\times\dfrac{0.15}{0.2}}_{\text{قسمت دایره‌ای}} + \underbrace{84.4\times10^3}_{\text{جانبی}}$

$\mathcal{R}_g = 692\times10^3$

	NΦ λ	1.2	2.1	2.76	3	3.12	3.18
(Ag+i)	AT	752	1331	1802	2030	2189	2344
	$\frac{AT}{N} = i$	0.626	1.11	1.501	1.692	1.824	1.953

$\Rightarrow \Delta w_f' = 0.718^{J}$ $\qquad F_f = \dfrac{\Delta w_f'}{\Delta g} = -1436^{N}$

* هرچه Δg کوچکتر باشد عدد به دست آمده به مقدار واقعی آن نزدیک‌تر خواهد بود.

حالت دوم: قسمت آهن به صورت خطی در نظر گرفته شود.

* اگر در حل مسائل mmf فاصله هوایی خیلی بیشتر از mmf آهن باشد می‌توان از آهن صرف‌نظر کرد ولی وقتی که mmf آهن در مقابل mmf فاصله هوایی کوچک نباشد می‌توان مشخصه آهن را به صورت خطی در نظر گرفت.

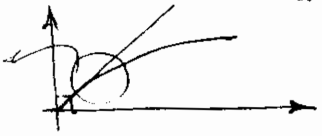
$$\text{کل } \mathcal{R} = \underbrace{\frac{60}{0.001}}_{\text{آهن}} + \underbrace{84.4\times10^3}_{\text{فواصل جانبی}} + \underbrace{\frac{g}{4\pi\times10^{-7}\times\frac{\pi}{4}(0.05)^2}}_{\text{دایره‌ای شکل}} = 144.4\times10^3 + 4053g\times10^5$$
$$= 144.4(1+28.1\times10^2 g)\times10^3$$

$$\phi = \frac{1200\,i}{144.4(1+28.1\times10^2 g)\times10^3} \qquad \lambda = N\phi = \frac{(1200)^2 i}{144.4(1+28.1\times10^2 g)\times10^3}$$

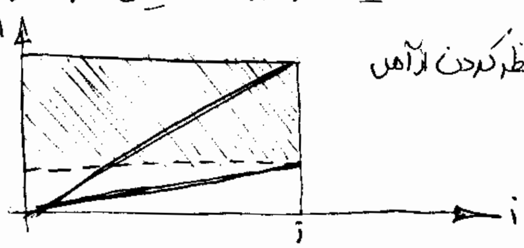
$$w_f'(i,g) = \frac{1}{2}\lambda i = \frac{1200^2\, i^2}{2\times144.4(1+28.1\times10^2 g)\times10^3} \qquad F_f = \frac{\partial w_f'}{\partial g} = \frac{1200^2 i^2 \times 28.1\times10^2}{2\times144.4(1+28.1\times10^2 g)^2\times10^3}$$

$g = 0.2\times10^{-2\,m} \Rightarrow F_f = -1617^{N}$

ناحیه خطی شده



مثال ۵) در مثال ۱، اگر رلوکتانس آهن قابل صرف‌نظر کردن باشد تحت همان جریان 2.25^{A} اجازه داده شود تا قسمت متحرک به صورت آهسته از $g=0.2^{cm}$ به $g=1^{cm}$ حرکت کند انرژی الکتریکی ورودی به سیستم و انرژی مکانیکی خروجی را محاسبه نمایید.



کل با صرف‌نظر کردن از آهن $\mathcal{R} = (84.4 + 4053\times10^2 g)\times10^3$

$$\lambda = \frac{1200^2\times2.25}{(84.4+5053\times10^2 g)\times10^3} = \frac{38.4}{1+48\times10^2 g}$$

$$\Delta w_e = i_0(\lambda_2 - \lambda_1) = 2.25\times38.4\left(\frac{1}{1+4.8\times0.2} - \frac{1}{1+4.8}\right)$$

$\Rightarrow \Delta w_e = 6.39$ ژول $\qquad \Delta w_m = \frac{1}{2}\Delta w_e = 3.195$ ژول

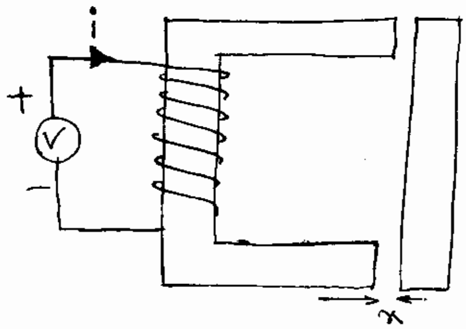
مثال ۴: چگالی شار مغناطیسی در سطح آهنی 1.6^{T} ها باشد مطلوبست محاسبه مقدار چگالی نیرو در سطح آهن (چگالی نیرو ≙ نیرو در واحد سطح) و سیستم سیستم خطی در نظر گرفته می‌شود.

$w_f(B,x) = \dfrac{1}{2}B^2 \dfrac{Ax}{\mu}$ فاصله هوایی ، سطح مقطع آهن $\quad (Ax = \text{حجم})$

$$F_f = -\frac{\partial W_f(B,x)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{B^2A}{\mu} \Rightarrow \frac{F_f}{A} = -\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

چگالی نیرو در واحد سطح $\frac{F_f}{A} = \frac{1}{2}\frac{(1.6)^2}{4\pi\times10^{-7}} = 1.02\times10^{6}\ \frac{N}{m^2}$

مثال 5) در رله الکترومغناطیسی نشان داده شده که از منبع ولتاژ تغذیه می‌شود، رابطه جریان با λ به صورت زیر می‌باشد: $i = \lambda^2 + 2\lambda(1-x)^2$ و x فاصله هوایی که کوچکتر از (1) در نظر گرفته می‌شود.



مطلوبست محاسبه نیرو روی قسمت متحرک (آرمیچر) به صورت تابعی از شار دور یا λ.

$$W_f(\lambda,x) = \int_0^\lambda i\,d\lambda = \frac{1}{3}\lambda^3 + \lambda^2(1-x)^2$$

$$F_f = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = 2\lambda^2 x(1-x)$$

مثال 6) این رله از منبع ولتاژ سینوسی تغذیه می‌شود $(V=\sqrt{2}V\sin\omega t)$ با فرض ثابت بودن رلوکتانس آهن مطلوبست تعیین رابطه نیروی متوسط روی آرمیچر، در شرایطی که آرمیچر به فاصله x از هسته ثابت نگه داشته شود.

* رلوکتانس ثابت یعنی اینکه سیستم خطی می‌باشد

$$\mathcal{R}_i = a \;;\; \mathcal{R}_{ag} = \frac{2x}{\mu_0 A} = bx \Rightarrow \mathcal{R}_T = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_{ag} = a + bx$$

$$W_f(\phi,x) = \frac{1}{2}\mathcal{R}(x)\phi^2 \;;\; F_f = -\frac{\partial W_f(\phi,x)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\phi^2\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} = -\frac{1}{2}b\phi^2 \quad (42)$$

$V = ir + L\frac{di}{dt} \;;\; i = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{r})$ (44) نیرو در جهت کاهش x می‌باشد.

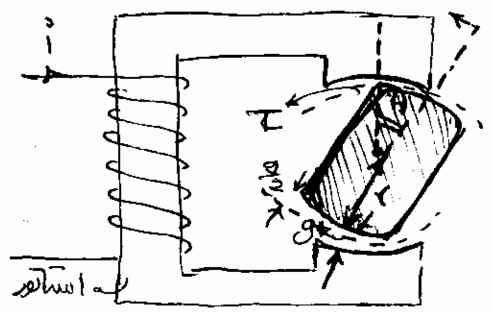
یا $I = \frac{V}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}}\angle -\tan^{-1}\frac{\omega L}{r}$ (43) ; از (21) : $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$

$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}} = \frac{\sqrt{2}NV}{\sqrt{(r\mathcal{R})^2+(N^2\omega)^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega N^2}{r\mathcal{R}}) \quad (45)$$

نیروی لحظه‌ای $F_f = -\frac{bN^2V^2}{(r\mathcal{R})^2+(N^2\omega)^2}\sin^2(\omega t - \tan^{-1}\frac{N^2\omega}{r\mathcal{R}})$ در رابطه (42)

$$F_{f(av)} = \frac{1}{T}\int_0^T F_f\,dt = -\frac{1}{2}\frac{bN^2V^2}{(r\mathcal{R})^2+(N^2\omega)^2} \quad (46)$$

مثال 7) شکل زیر یک وسیله الکترومغناطیسی چرخشی را نشان می‌دهد که شکل ساده‌ای از یک موتور رلوکتانسی است. اگر از رلوکتانس مسیر آهن صرف‌نظر شود مطلوبست محاسبه گشتاور رلوکتانسی تابعی از جریان ورودی سیم پیچ تحریک و زاویه جابجایی بین محور استاتور و روتور؟



l : طول محوری

$A = (r+\frac{1}{2}g)\theta l$ سطح عمود بر شار در فاصله هوایی

طول فاصله هوایی در مسیر مغناطیسی $2g$ می‌باشد.

$$\mathcal{R}_{ag}=\frac{2g}{\mu_0(r+\frac{1}{2}g)\theta l} \quad (47) \quad ; \quad \Phi=\frac{Ni\mu_0(r+\frac{1}{2}g)\theta l}{2g} \quad (48) \quad ;$$

$$\lambda=\Phi N=\frac{N^2 i\mu_0(r+\frac{1}{2}g)\theta l}{2g} \quad (49) \quad ; \quad W_f'(i,\theta)=\frac{1}{2}\lambda i=\frac{N^2 i^2\mu_0(r+\frac{1}{2}g)\theta l}{4g} \quad (50)$$

$$\tau_f=\frac{dW_f'(i,\theta)}{d\theta}=\frac{N^2 i^2\mu_0(r+\frac{1}{2}g)l}{4g} \quad (51)$$

$$B=\frac{\Phi}{A}=\frac{\mu_0 Ni}{2g} \quad (52) \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau_f=\frac{B^2 gl(r+\frac{1}{2}g)}{\mu_0}} \quad (53)$$

با فرض : $r=l=0.025^{m}$, $g=0.0025^{m}$, $B=1.6^{T}$ $\rightarrow$ $\tau_f=3.34$ N.m

یک ماشین کوچک خوب

تعیین گشتاور رلوکتانس از اندوکتانس سیم پیچ تحریک :

$$\lambda=\frac{N^2 i\mu_0(r+\frac{1}{2}g)\theta l}{2g} \qquad L(\theta)=\frac{\lambda}{i} \rightarrow L(\theta)=\frac{N^2\mu_0 l(r+\frac{1}{2}g)\theta}{2g} \quad (54)$$

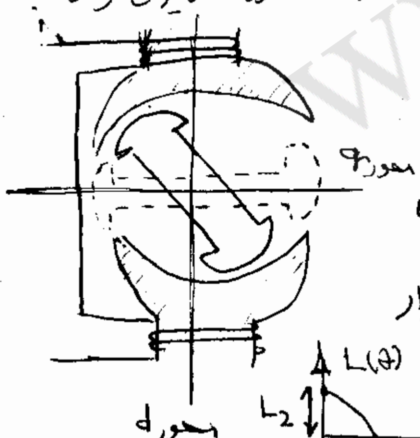
* اندوکتانس به صورت خطی با θ تغییر می‌کند تا جائیکه در همپوشانی کامل ماکزیمم L را خواهیم داشت.

در ماشین‌های رلوکتانسی واقعی :

۱) اندوکتانس سیم پیچ تحریک به صورت سینوسی تغییر می‌کند : شکل هندسی قطب‌ها و فاصله هوایی در ایجاد اندوکتانس سینوسی موثر خواهد بود.

۲) گشتاور منوط به تعداد قطب‌ها و تحریک مداوم هر یک از آن‌ها به صورت متوالی.

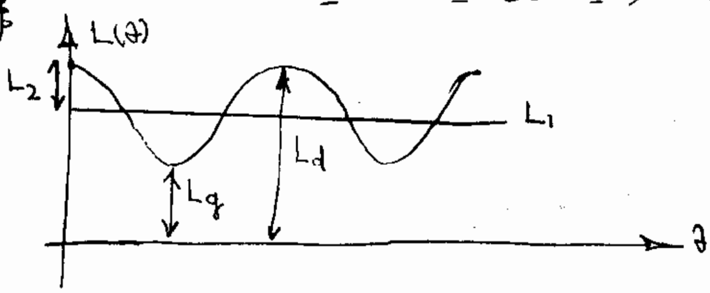
اه سطوح قطب‌ها (کفشک قطب‌ها) و فاصله هوایی بین قطب‌های استاتور و روتور به صورت زیر می‌تواند تعیین شود.



اندوکتانس سیم پیچ تحریک :

در موقعیت عمودی روتور با توجه به شکل کفشک قطب‌ها ماکزیمم اندوکتانس در سیستم تحریک را ارائه خواهد داد (محور d)

در موقعیت افقی روتور اندوکتانس تحریک در وضعیت می‌نیمم خود قرار دارد (موقعیت محور q)



$$L(\theta)=L_1+L_2\cos2\theta$$

$$L_2=\frac{1}{2}(L_d-L_q)$$

فرض بر این است که جریان تحریک سینوسی باشد

$$i=I_m\cos\omega t \quad (56)$$

شبه انرژی میدان از رابطه (17) $\Rightarrow$ $W_f'(i,\theta)=\frac{1}{2}L(\theta)i^2$

$$\tau_f=\frac{dW_f'}{d\theta}=\frac{1}{2}i^2\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=-I_m^2 L_2\sin2\theta\cos^2\omega t \quad (57)$$

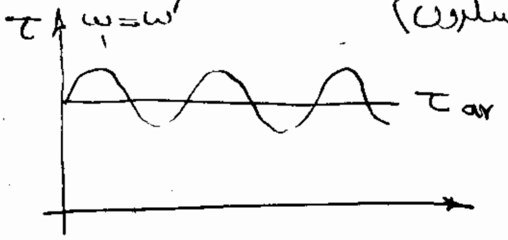
(δ زاویه روتور با محور d) در لحظه $t=0$ $\theta = \omega' t - \delta$ (58) ω' : سرعت زاویه‌ای روتور

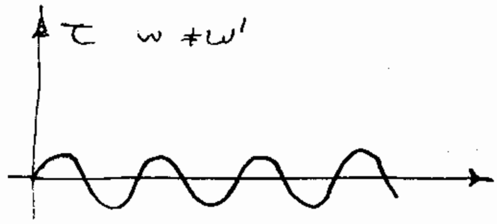
$$\tau_f = -I_m^2 L_2 \sin 2(\omega' t-\delta)\cos^2 \omega t = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \left[\sin 2(\omega' t-\delta)(1+\cos 2\omega t)\right]$$

$$\tau_f = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \left[\sin 2(\omega' t-\delta) + \sin 2(\omega' t-\delta)\cos \omega t\right]$$

$$\tau_f = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \left[\sin 2(\omega' t-\delta) + \frac{1}{2}\left(\sin 2(\omega' t+\omega t-\delta) + \sin 2(\omega' t-\omega t-\delta)\right)\right] \quad (59)$$

* اگر $\omega' = \omega$ باشد گشتاور متوسط وجود خواهد داشت (سرعت سنکرون)
* اگر $\omega' \neq \omega$ باشد گشتاور متوسط صفر خواهد بود (سرعت آسنکرون)





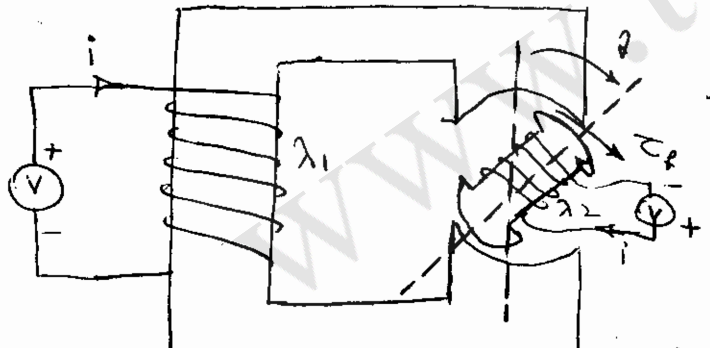
$$\tau_{av} = \frac{1}{4} I_m^2 L_2 \sin 2\delta \quad (60) \qquad L_2 = \frac{1}{2}(L_d - L_q) \rightarrow \tau_{av} = \frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q)\sin 2\delta \quad (61)$$

مثال: در یک سیستم رلوکتانسی خطی اگر جریان ماکزیمم تحریک 5^A و اندوکتانس های محور d و q به ترتیب برابر با 0.25^H , 0.15^H باشند. گشتاور متوسط را محاسبه نمایید.

* برای به دست آوردن گشتاور ماکزیمم $\sin 2\delta$ باید ماکزیمم یعنی 1 باشد پس

$\sin 2\delta = 1 \Rightarrow \delta = 45^\circ$. $\tau_f = 0.3125$ Nm

سیستم های الکترومغناطیسی چند تحریکه:



سیستم دو تحریکه

دو دسته متغیرهای مستقل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\lambda_1, \lambda_2, \theta) \ ; \ (i_1, i_2, \theta)$$

$$\tau_f = -\frac{\partial W_f(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (62)$$

$$W_f(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \int_0^{\lambda_1} i_1\, d\lambda_1 + \int_0^{\lambda_2} i_2\, d\lambda_2 \quad (63)$$

* در سیستم های خطی دو تحریکه:

$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$ (64a) $\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$ (64b) $L_{12} = L_{21}$

$$W_f(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{2}B_{11}\lambda_1^2 + B_{12}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}B_{22}\lambda_2^2 \quad (65)$$

$B_{11} = L_{22}/(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)$ $B_{22} = L_{11}/(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)$ $B_{12} = B_{21} = -L_{12}/(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)$

* L_{11} و L_{22} و L_{12} توابعی از θ هستند.
* روابط بالا برای دسته اول یعنی $(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ بدست آمد.

* برای استاد دوم (i_1, i_2, θ)

$$\tau_f = \frac{dW_f'(i_1, i_2, \theta)}{d\theta} \qquad i_1 = B_{11}\lambda_1 + B_{21}\lambda_2 \; ; \; i_2 = B_{21}\lambda_1 + B_{22}\lambda_2 \quad B_{21} = B_{12}$$

$$W_f(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \int_0^{\lambda_1} (B_{11}\lambda_1 + B_{12}\lambda_2)\, d\lambda_1 + \int_0^{\lambda_2} (B_{12}\lambda_1 + B_{22}\lambda_2)\, d\lambda_2$$

$$= B_{11}\int_0^{\lambda_1} \lambda_1 d\lambda_1 + B_{12}\left[\int_0^{\lambda_1} \lambda_2 d\lambda_1 + \int_0^{\lambda_2} \lambda_1 d\lambda_2\right] + B_{22}\int_0^{\lambda_2} \lambda_2 d\lambda_2$$

$$= B_{11}\int_0^{\lambda_1} d\lambda_1 + B_{12}\int_0^{\lambda_1, \lambda_2} d(\lambda_1 \lambda_2) + B_{22}\int_0^{\lambda_2} \lambda_2 d\lambda_2$$

$$= \frac{1}{2} B_{11}\lambda_1^2 + B_{12}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2} B_{22}\lambda_2^2$$

$$W_f'(i_1, i_2, \theta) = \int_0^{i_1} \lambda_1 di_1 + \int_0^{i_2} \lambda_2 di_2$$

* اندوکتانس ها تابعی از θ می باشند.

$$\boxed{W_f'(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2}$$

مثال: برای سیستم دو تحریکه نشان داده شده اندوکتانس های خودی استاتور، روتور و اندوکتانس متقابل به شرح زیر می باشد.

$$L_{11} = (4 + \cos 2\theta)\times 10^{-3}\,H \; ; \; L_{22} = (20 + 5\cos 2\theta)\,H \; ; \; L_{12} = 0.15\cos\theta\,H$$

مطلوبست محاسبه مقدار گشتاور حاصله در شرایطی که $i_1 = 1^A$ ، $i_2 = 0.02^A$ فرض شوند.

$$W_f'(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2}(4 + \cos 2\theta)\times 10^{-3} i_1^2 + (0.15\cos\theta) i_1 i_2 + \frac{1}{2}(20 + 5\cos 2\theta) i_2^2$$

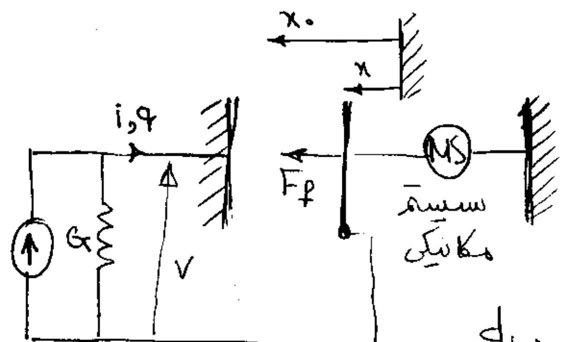
$$\tau_f = \frac{dW_f'}{d\theta} = -\sin 2\theta \times 10^{-3} i_1^2 - 0.15(\sin\theta) i_1 i_2 - 5\sin 2\theta\, i_2^2$$

$$\Rightarrow \tau_f = \underbrace{-10^{-3}\sin 2\theta}_{\text{گشتاور رلوکتانسی در ماشین قطب برجسته اتفاق می افتد.}} \underbrace{- 3\times 10^{-3}\sin\theta}_{\text{گشتاور متقابل ناشی از مؤلفه متقابل ساز.}}$$

گشتاور رلوکتانسی در ماشین قطب برجسته اتفاق می افتد.
اندوکتانس خودی تابعی از θ می باشد (مرکا نس دوبل)

گشتاور متقابل ناشی از مؤلفه متقابل ساز.

* اگر اندوکتانس خودی تابعی از θ نباشد یعنی در ماشین قطب صاف گشتاور رلوکتانسی صفر خواهد بود.
* ماشین سنکرون قطب برجسته مؤلفه های گشتاور هر دو مؤلفه رلوکتانسی و متقابل هستند.



میدان های الکتریکی:

$$q \simeq \lambda \; ; \; V \simeq i$$

میدان الکتریکی در وضعیت نشان داده شده صفحات (x ثابت) از انرژی اعمالی الکتریکی حاصل خواهد شد

$$dW_e = V dq = dW_f \qquad \text{انرژی کل میدان} = W_f = \int_0^q V dq$$

$$C = \frac{q}{V} = \text{ظرفیت سیستم} \quad \Rightarrow W_f = \int_0^q V dq = \frac{1}{2} V q \quad (70) \quad \Rightarrow W_f = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (71)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{(x_0 - x)}$$

دی‌الکتریک — ϵ_0 ؛ سطح مقطع صفحات — A

متغیرهای مستقل (q, x) یا (V, x)

* فرض می‌کنیم متغیرهای مستقل $(x \text{ و } q)$ باشند:

$$w_f(q,x) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C(x)} \quad (73) \qquad , \quad w_f' = \frac{1}{2}Vq = \frac{1}{2}C(x)V^2 = w_f'(V,x)$$

$$\boxed{W_f = \int_0^D E\,dD = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon_0}}$$

چگالی انرژی در میدان الکتریکی

تبدیل انرژی در میدان های الکتریکی:

با تغییر x فاصله دو صفحه موازی

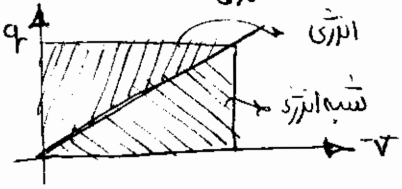
$$F_f\,dx = V\,dq - dw_f \quad (75)$$

1) متغیرهای مستقل V و x ; $q = q(V,x)$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial V}\,dV + \frac{\partial q}{\partial x}\,dx \quad (76) \qquad w_f = w_f(V,x) \qquad \partial w_f = \frac{\partial w_f}{\partial V}dV + \frac{\partial w_f}{\partial x}dx \quad (77)$$

$$F_f\,dx = \left(V\frac{dq}{dx} - \frac{\partial w_f}{\partial x}\right)dx + \left(V\frac{\partial q}{\partial V} - \frac{\partial w_f}{\partial V}\right)dV \quad (78)$$

$$F_f\,dx = V\frac{dq}{dx}(V,x) - \frac{dw_f}{\partial x}(V,x) \quad (79) \qquad F_f = \frac{d}{dx}\left[Vq(V,x) - w_f(V,x)\right]$$



اگر سیستم خطی باشد

$$w_f'(V,x) = Vq - w_f \quad (80)$$

$$\boxed{F_f = \frac{\partial w_f'(V,x)}{\partial x}} \quad (81)$$

2) متغیرهای مستقل (q, x) ; $w_f = w_f(q,x)$

$$dw_f = \frac{\partial w_f}{\partial q}dq + \frac{\partial w_f}{\partial x}dx \quad (82)$$

در معادله (75) جایگزین شود →

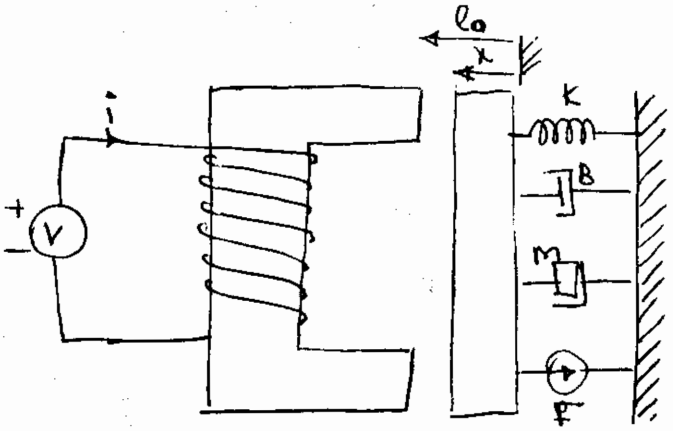
$$F_f\,dx = \left(V - \frac{dw_f}{dq}\right)dq - \frac{\partial w_f}{\partial x}dx \quad (83) \quad , \quad F_f\,dx = -\frac{\partial w_f}{\partial x}dx \Rightarrow \boxed{F_f = -\frac{\partial w_f}{\partial x}} \quad (84)$$

چگالی شبه انرژی به صورت زیر خواهد بود →

$$q = CV \qquad w_f'(V,x) = \frac{1}{2}C(x)V^2$$

$$w_f' = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

معادلات دینامیکی سیستم های الکترومکانیکی:



با فرض سیستم مغناطیسی خطی می باشد

اندوکتانس خودی سیم پیچ متحرک $L = L(x)$

معادله ولتاژ برای سیستم الکتریکی $V = ir + \frac{d\lambda}{dt}$

$$= ir + \frac{d}{dt}(L(x)i) = \underbrace{ir}_{\text{افت اهمی سیم پیچ متحرک}} + \underbrace{L(x)\frac{di}{dt}}_{\text{ولتاژ القایی سلف}} + \underbrace{i\frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}}_{\text{ولتاژ سرعت (حرکتی)}} \quad (88)$$

$$W'_f(i,x)=\frac{1}{2}L(x)\,i^2 \quad , \quad F_f=\frac{\partial W'_f}{\partial x}=\frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx} \qquad (89)$$

توان مکانیکی خروجی $\quad P_m=F_f\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}i\left(i\cdot\frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right)$

$P_m=\frac{1}{2}\cdot$ جریان . ولتاژ سرعت $\quad (90)$ رابطه 90 در همه حالات برقرار است (ماشین‌های الکتریکی)

* اگر جریان مخالف ولتاژ سرعت باشد، سیستم موتوری است یعنی تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی
* اگر جریان موافق ولتاژ سرعت باشد، عمل ژنراتوری یعنی تبدیل انرژی مکانیکی به الکتریکی است.

$$F_f=M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+kx+F \quad (91a) \quad , \quad \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dx}=M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+kx+F \quad (91b)$$

پرمیننس مغناطیسی $\quad \mathcal{P}=\frac{\mu_0 A}{2(l_0-x)} \quad , \quad L(x)=N^2\mathcal{P}=\frac{\mu_0 A N^2}{2(l_0-x)}$

$$\frac{dL(x)}{dx}=\frac{\mu_0AN^2}{2(l_0-x)^2} \Rightarrow V=ir+\frac{\mu_0AN^2}{2(l_0-x)}\cdot\frac{di}{dt}+\frac{\mu_0AN^2 i}{2(l_0-x)^2}\cdot\frac{dx}{dt} \qquad (92)$$

$$\frac{\mu_0AN^2i^2}{4(l_0-x)^2}=M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+kx+F \qquad (93)$$

* معادله روبرو باید به صورت عددی حل شود.

اما با حرکت جزئی بازوی متحرک از حالت ساکن می‌توان معادلات (92)، (93) را حل کرد.

با فرض در حالت ساکن (نقطه تعادل سیستم): تمام مشتقات صفر خواهد بود: V_0, I_0, x_0, f_0

معادله (92) $\Rightarrow V_0=I_0 r$, معادله (93) $\quad \frac{\mu_0AN^2I_0^2}{4(l_0-x_0)^2}=kx_0+f_0$

حال با تغییرات جزئی در بازوهای سیستم: V_1, i_1, x_1, f_1 معادلات ولتاژ و نیرو به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$V_0+V_1=(I_0+i_1)r+\frac{\mu_0AN^2}{2(l_0-x_0-x_1)}\cdot\frac{di_1}{dt}+\frac{\mu_0AN^2(I_0+i_1)}{2(l_0-x_0-x_1)^2}\cdot\frac{dx_1}{dt} \qquad (94)$$

$$\frac{\mu_0AN^2(I_0+i_1)^2}{4(l_0-x_0-x_1)^2}=M\frac{d^2x_1}{dt^2}+B\frac{dx_1}{dt}+k(x_0+x_1)+f_0+f_1 \qquad (95)$$

حال برای تحلیل روابط ولتاژ، نیرو و با جابجایی جزئی از فرضیات زیر استفاده می‌کنیم:

i) از حاصلضرب تغییرات کوچک صرفنظر شود.

ii) از تغییرات کوچک در مقابل مقادیر پایدار حالت صرفنظر گردد.

iii) عبارات حالت تعادل در معادلات (93) و (92) از معادله تغییرات حذف گردد.

$$V_1=i_1r+\frac{\mu_0AN^2}{2(l_0-x_0)}\cdot\frac{di_1}{dt}+\frac{\mu_0AN^2I_0}{2(l_0-x_0)^2}\cdot\frac{dx_1}{dt} \qquad (96)$$

$$\frac{2\mu_0AN^2I_0i_1}{4(l_0-x_0)^2}=M\frac{d^2x_1}{dt^2}+B\frac{dx_1}{dt}+kx_1+f_1 \qquad (97)$$

* معادلات 93 و 92 برای کلیه حالات است ولی معادلات 96 و 97 برای تغییرات جزئی است.