بسم الله الرحمن الرحیم

نام جزوه :

الکترومغناطیس

استاد : شاهی

تهیه کننده : حامد مظاهری

۱

جلسهٔ اول — ۸۶/۷/۸

سرفصل های آموزشی :

۱- تجزیه و تحلیل بردار

۲- شدت میدان الکتریکی
- قانون کولن
  - بار نقطه ای
  - بار خطی
  - بار سطحی
- قانون گوس
  - شار الکتریکی
  - نتیجه گیری قانون کولن
  - دیورژانس (واگرایی)

۳- انرژی در میدان الکتریکی - اختلاف پتانسیل الکتریکی

رابطهٔ میدان با پتانسیل $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (گرادیان)

۴- رسانا
- جریان الکتریکی
- شرایط مرزی
- مقاومت
  - طولی
  - عرضی

عایق
- ظرفیت
- شرایط مرزی

تئوری تصویر

۵- معادلات لاپلاس و پواسون.

لاپلاس $\nabla^2 V = 0$

پواسون $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ (دل، لاپلاسین)

۶- شدت میدان مغناطیسی
- قانون بیوساوار
- قانون آمپر
  - کرل (همگرایی)
  - دستور استوکس
- پتانسیل های مغناطیسی اسکالر و برداری

۷-
- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی
- مدار مغناطیسی
- القا مغناطیسی
- انرژی در میدان مغناطیسی

۸- معادلات ماکسول
- حالت استاتیک
- حالت دینامیک

نکات اولیه:

- انرژی در داخل میدان ذخیره می‌شود. بنابراین ابتدا باید میدان ایجاد شود تا سپس انرژی به وجود آید.

همگرایی: خطوطی که به مرور به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

واگرایی: خطوطی که به مرور از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

گرادیان مفهوم بردار عمود را دارد (توسط آن می‌توان بردار عمود را به دست آورد).

منابع و مآخذ:

- الکترومغناطیس دانشگاهی (مهندسی) - مترجم دیانی - Hayt
- الکترومغناطیس، میدان و موج - مترجم: دکتر جبه‌دار و دکتر قوامی - cheng
- الکترومغناطیس - مسائل حل شده همراه با خلاصه درس - Edminister
  - دکتر ابریشمیان و دکتر کرانیا

انتگرال های کاربردی :

* ۱) $\int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{Arc\,tan} \frac{x}{y} \leftarrow x = y\tan\theta$

۲) $\int \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \leftarrow x^2+y^2 = u^2$

۳) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+y^2} = x - y\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{x}{y}\right) \leftarrow x = y\tan\theta$

* ۴) $\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right| = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

۵) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

۶) بی کاربرد

* ۷) $\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$

۸) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۹) $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

* تغییر متغیرهای به کار رفته در بقیه حالات نیز همانند ۱، ۲ و ۳ است .

اثبات برای نمونه :

$$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int \frac{y\sec^2\theta\,d\theta}{(y^2\tan^2\theta+y^2)^{3/2}}$$

$y^2(\tan^2\theta+1)$

$y^2\sec^2\theta$

$$\begin{cases} x = y\tan\theta \\ x = y\sec^2\theta\,d\theta \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{cases}$$

(۴)

ادامه $= \int \frac{y\sec^2\theta\, d\theta}{y^3\sec^3\theta} = \frac{1}{y^2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{y^2}\int \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{y^2}(\sin\theta) = \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$\boxed{\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{x^2/y^2}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

* تجزیه و تحلیل بردارها:

$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

هر بردار = اندازهٔ بردار × جهت بردار

$$\vec{AB} = \underbrace{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}_{\text{اندازهٔ بردار}} \times \underbrace{\left\{\frac{(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\right\}}_{\text{جهت}}$$

تغییر نام برای بردارهای یکه

$\vec{i} = \vec{a}_x$

$\vec{j} = \vec{a}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \underbrace{A}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_A}_{\text{جهت}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A}}$

$\vec{k} = \vec{a}_z$

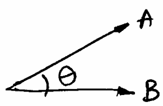
شرط $\rightarrow \left|\vec{a}_A\right| = 1$ ← اندازهٔ بردار یکه همواره ۱ است

روش نمایش بردار $\Rightarrow \vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + \underbrace{B_z \vec{a}_z}_{\text{sub Vector}}$$

بردار $\rightarrow$ Vector

ضرب داخلی (نقطه‌ای یا اسکالر):
dot Product



$$\vec{A} \cdot \vec{B} \triangleq AB\cos\theta$$

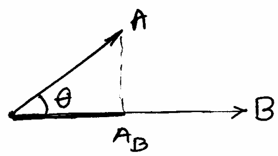
* در ضرب داخلی ترتیب مهم نیست.

* نتیجه:

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

* توسط ضرب داخلی می‌توان سایهٔ یک بردار را بر روی بردار دیگر به دست آورد (پیدا کردن نقاط مشترک دو بردار).



$$\cos\theta = \frac{A_B}{A} \Rightarrow A_B = A\cos\theta$$

مجاور
وتر

$$\vec{A} \cdot \vec{a}_B = A\cos\theta$$

$$\boxed{{}^{*}A_B = \vec{A} \cdot \vec{a}_B}$$

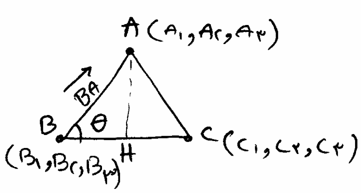
تصویر عددی A روی B

جهت بردار B

$$\Rightarrow \vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B)\,\vec{a}_B$$

تصویر برداری A روی B

مثال: محاسبهٔ مساحت مثلث به روش ضرب داخلی



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH)(BC)$$

$$BC = \sqrt{(C_1 - B_1)^2 + (C_2 - B_2)^2 + (C_3 - B_3)^2}$$

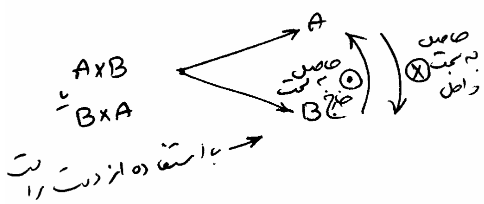
② ادامه

$$\vec{BH} = \left(\vec{BA}\cdot\vec{a}_{BC}\right)\vec{a}_{BC}$$

$$\vec{HA} = \vec{BA} - \vec{BH}$$

ضرب خارجی (برداری) :

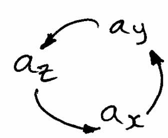
$$\vec{A}\times\vec{B} \triangleq \underbrace{AB\sin\theta}_{\text{اندازه}}\ \underbrace{\vec{a}_n}_{\text{جهت}}$$



نتیجه :

$$\begin{cases} a_x\times a_x = 0 \\ a_y\times a_y = 0 \\ a_z\times a_z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} a_x\times a_y = a_z \\ \vdots \end{cases}$$

- روش محاسبه جهت :



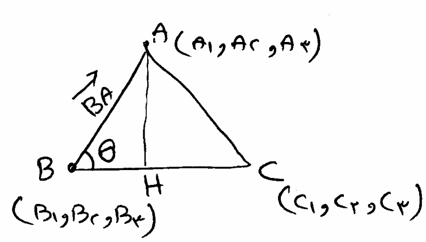
در جهت موافق ← +

در جهت مخالف ← −

$$A\times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \vec{a}_y\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \vec{a}_z\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

* حاصل در ضرب خارجی بر هر دو بردار A و B عمود است . (normal = عمود)

مثال :



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{BA}\times\vec{BC}\right|$$

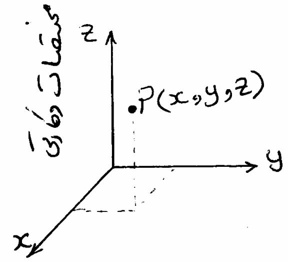
$$\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$$

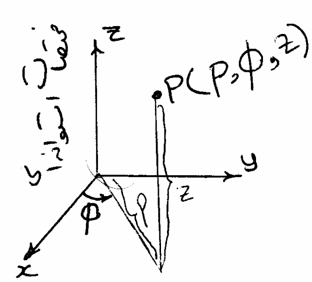
$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + \cancel{\underbrace{B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z}_{\text{فرض} = 0}} \Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x$$

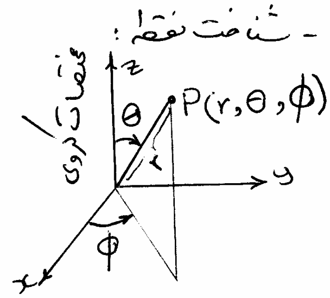
* در ضرب داخلی دو بردار، ابتدا برداری که جملات کمتر را پیدا کرده (تعداد جملات کمتر) و سپس با توجه به آن می‌توان جملات اضافی بردار بزرگتر را حذف کرد.

سیستم‌های مختصات (متداول):
- دکارتی
- استوانه‌ای
- کروی

- شناخت نقطه:







$-\infty < x, y, z < \infty$

$0 \le \rho < \infty$

$0 \le \phi \le 2\pi$

$-\infty < z < +\infty$

ρ: فاصله از مبدا (بر محور z عمود است)

ϕ: زاویه با محور xها

$0 \le r < \infty$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \phi \le 2\pi$

r: فاصله مبدأ تا نقطه (مبدا را به نقطه وصل می‌کند)

θ: زاویه با محور zها

ϕ: زاویه با محور xها

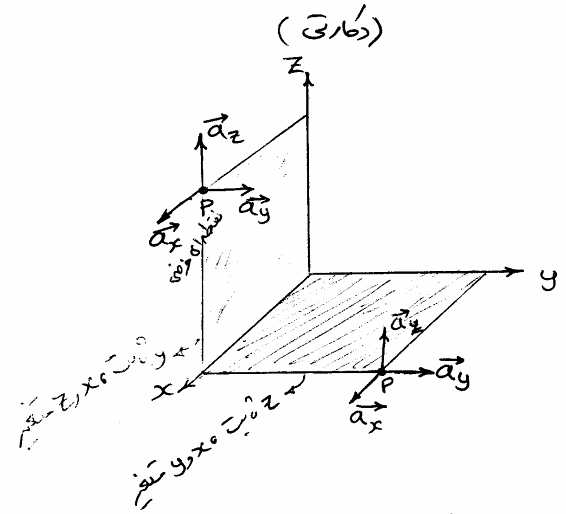
توجه:

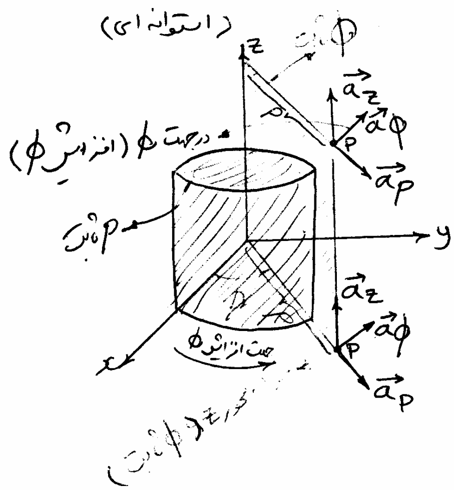
در حالت دکارتی سه سطح x و y و z، دو به دو برهم عمودند.

در حالت استوانه‌ای سه سطح ρ، ϕ و z برهم دو به دو عمودند.

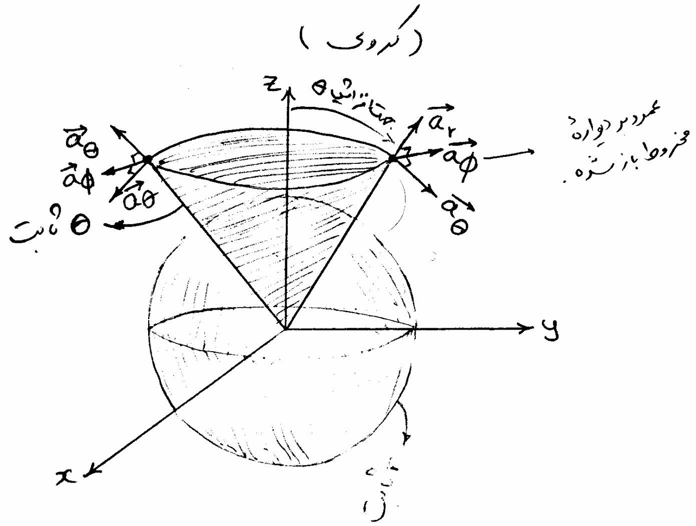
در حالت کروی نیز سه سطح ϕ، θ، r دو به دو برهم عمودند.

پارامترهای ثابت :





* در شکل های بالا بردارهای واحد (یکه) نیز بررسی شده اند



* بردارهای یکه :

در شکل ها بردارهای یکه مربوط به هر نقطه نشان داده شده است. بردارهای یکه مستقل از موقعیت نقطه هستند. جهت این بردارها همواره در جهت افزایش کمیت مورد نظر است. به طور مثال $\vec{a}_z$ ، همواره در جهت افزایش محور z است (مثبت محور z).

(۹)

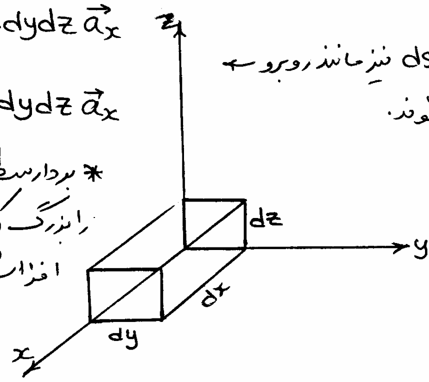
- شناخت دیفرانسیل های حجم، سطح و طول :

الف) دکارتی

$$dv = dx\,dy\,dz$$

$$ds_x = dy\,dz \Rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_x^{+} = +dy\,dz\,\vec{a}_x \\ \vec{ds}_x^{-} = -dy\,dz\,\vec{a}_x \end{cases}$$

ds_y و ds_z نیز مانند روبرو محاسبه می شوند.



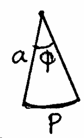
* بردار سطح همیشه به جهتی اشاره می کند که حجم را بزرگ کند. بنابراین نشانهٔ بردار سطح، افزایش سطح است.

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

* $\vec{dl}$ همواره به صورت ۳ جمله ای است.

dl (بدون علامت بردار) همواره تک جمله ای است
$\begin{cases} dx \\ \text{یا}\; dy \\ \text{یا}\; dz \end{cases}$

یادآوری:

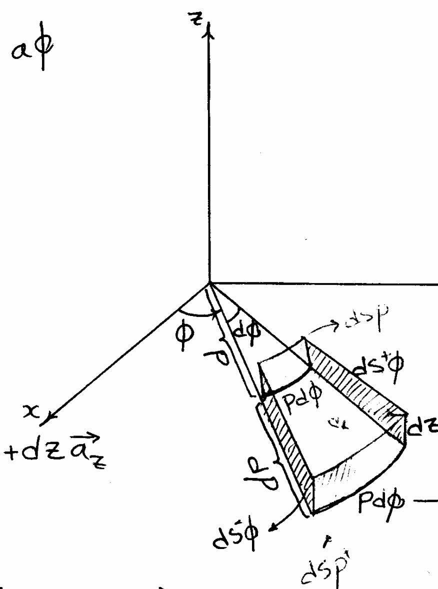


p = طول هر کمان = زاویه × شعاع = $a\phi$

ب) استوانه ای

$$dv = \rho\,d\phi\,d\rho\,dz$$

دیفرانسیل مربوط به ϕ همواره $\rho d\phi$ است (البته تقریباً)



$$(\rho + d\rho)d\phi = \rho d\phi + \underbrace{\cancel{d\rho d\phi}}_{\simeq 0}$$

همواره ۳ جمله ای

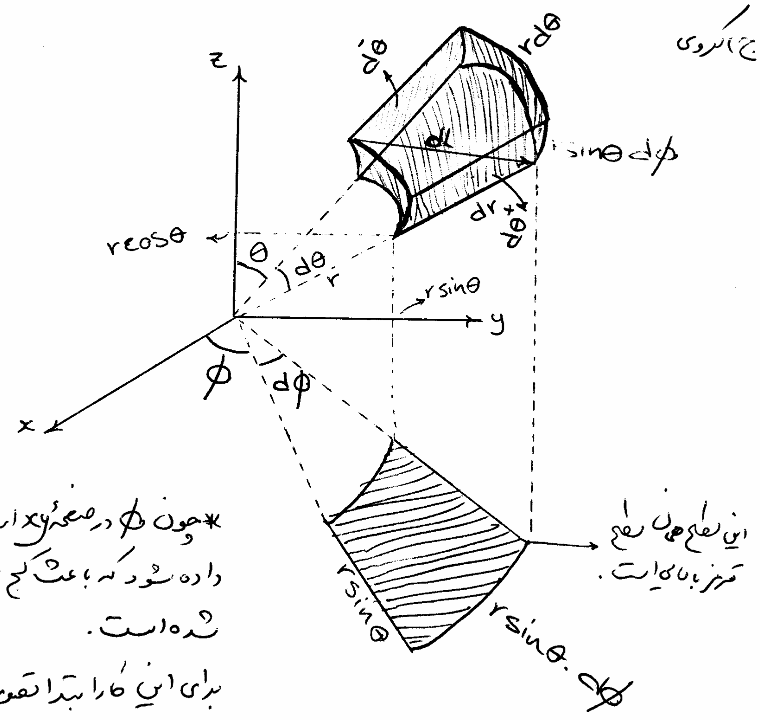
$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$$

$$dl = \begin{cases} d\rho \\ \text{یا}\; \rho d\phi \\ \text{یا}\; dz \end{cases}$$

$$ds_\phi = d\rho.dz \quad \begin{cases} \vec{ds}_\phi^{+} = d\rho.dz\,.\,\vec{a}_\phi \\ \vec{ds}_\phi^{-} = -\,d\rho dz.\vec{a}_\phi \end{cases}$$

ds_ρ , ds_z نیز همین ترتیب هستند.

ج) کروی



* چون ϕ در صفحه xy است، باید ابتدا به بالا انتقال داده شود که باعث کج شدن و تا حدی دوران شکل شده است.

برای این کار ابتدا تصویر در صفحه xy به دست آورده شده و سپس به بالا انتقال داده شده.

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \longrightarrow (r d\theta \cdot r \cdot \sin\theta \cdot d\phi \cdot dr)$$

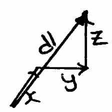
$$ds_\theta = r\sin\theta \, dr \, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{\theta^-} = -r\sin\theta \, dr \, d\phi \, \vec{a}_\theta \\ \vec{ds}_{\theta^+} = +r\sin\theta \, dr \, d\phi \, \vec{a}_\theta \end{cases}$$

$$ds_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \rightarrow \begin{cases} \vec{ds}_{r^+} = +r^2\sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{a}_r \\ \vec{ds}_{r^-} = -r^2\sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{a}_r \end{cases}$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + \underbrace{r\,d\theta}_{d\theta}\,\vec{a}_\theta + \underbrace{r\sin\theta\,d\phi}_{d\phi}\,\vec{a}_\phi$$

$$dl = \begin{cases} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\phi \end{cases}$$

نکته‌ای در مورد dL :

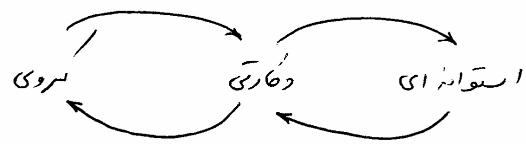


در شکل مقابل برای رسیدن از نقطهٔ اول به نقطهٔ دوم، به ترتیب ۳ بردار در جهت های x، y و z طی شده است. اما نتیجه یک بردار مستقیم است که از ابتدا به انتها می رسد و آن را dL نامیده شده است. به عبارت دیگر، بردار dL که دو نقطه را به هم وصل کرده است از ۳ بردار در جهت های x، y و z تشکیل شده است. پس:

$$\vec{dL} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + dz\,\vec{a}_z$$

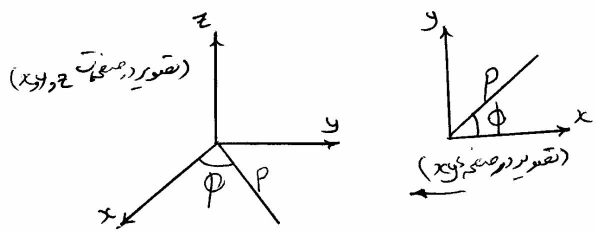
---

* تبدیل سیستم‌های مختصات:



تبدیل { - تبدیل نقاط
- تبدیل بردارها }

الف) استوانه ای به دکارتی و برعکس:



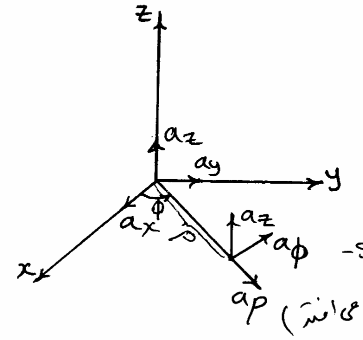
تبدیل نقاط دکارتی به استوانه ای
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

نقطه استوانه ای تبدیل به دکارتی
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right) \longrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, 2\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$$

تبدیل بردارها:

$$\vec{A} = A_\rho\,\vec{a}_\rho + A_\phi\,\vec{a}_\phi + A_z\,\vec{a}_z$$
$$\vec{A} = A_x\,\vec{a}_x + A_y\,\vec{a}_y + A_z\,\vec{a}_z$$



$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = \left(A_\rho\vec{a}_\rho + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{a}_z\right)\cdot\vec{a}_x$$

$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_x}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_x}_{0=\cos 90^\circ}$$

زاویه بین x و z

$-\sin\phi = \cos(90+\phi) =$ زاویه بین ϕ و x (۹۰ درجه بچرخد روی x می‌افتد)

$$A_y = A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho\cdot\vec{a}_y}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z\cdot\vec{a}_y}_{0}$$

$\sin\phi$ ← همانند A_x است اما با این فرق که در محور y ها $\sin$ است.

$= \cos\phi$

$A_z = A_z$ ← A_z در دکارتی و استوانه ای برابر است

تبدیل برداری استوانه ای به دکارتی

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازه $-\phi$)

بردار دکارتی ← بردار استوانه ای

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

(دوران به اندازه ϕ)

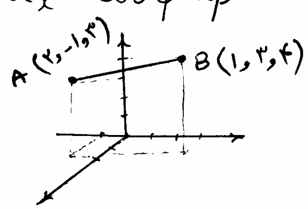
بردار استوانه ای ← بردار دکارتی

* روابط بالا برای بردارهای یکه نیز برقرار است.

$$\vec{a}_\rho = \cos\phi\,\vec{a}_x + \sin\phi\,\vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = \cos\phi\,\vec{a}_\rho - \sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

مثال:



$$\vec{AB} = \underbrace{-1}_{AB_x}\vec{a}_x + \underbrace{4}_{AB_y}\vec{a}_y + \underbrace{1}_{AB_z}\vec{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} AB\rho \\ AB\phi \\ ABz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

* در پیدا کردن ϕ تنها نقطهٔ ابتدای بردار (A) کافی است.

$$AB\rho = -\cos\phi + ۴\sin\phi$$

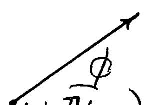
$$AB\phi = \sin\phi + ۴\cos\phi$$

$$ABz = ۱$$

$$\phi = \text{Arc}\tan\left(\frac{-۱}{۲}\right)$$

$$\vec{AB} = AB\rho\,\vec{a}_\rho + AB\phi\,\vec{a}_\phi + ABz\,\vec{a}_z$$

مثال مهم: بردار زیر داده شده است. تبدیل زیر را انجام دهید:



$(۲, \pi/۴, ۰)$

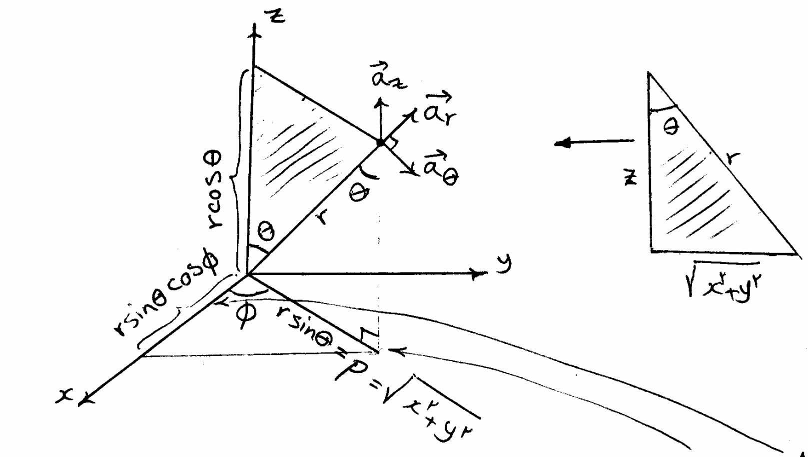
$$\underset{\text{استوانه‌ای}}{\vec{A}} = ۲\vec{a}_\rho + ۳\vec{a}_\phi + \vec{a}_z \longrightarrow \underset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = ?$$

نکته: در تبدیل بردارها به یکدیگر، ϕ نقطهٔ ابتدایی باشد (مختص دوم)، یعنی حتماً باید نقطهٔ ابتدای بردار داده شده باشد.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{دکارتی}}{\vec{A}} = \overset{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۰٫۷}\,\vec{a}_x + ۳٫۵\,\vec{a}_y + \vec{a}_z$$

(۱۴)



تبدیل نقطه‌ی دکارتی به کروی

$$
\begin{cases}
r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\theta = \cos^{-1} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\phi = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}
\end{cases}
$$

تبدیل نقطه‌ی کروی به دکارتی

$$
\begin{cases}
x = \underbrace{r\sin\theta}\,\underbrace{\cos\phi} \\
y = r\sin\theta\,\sin\phi \\
z = r\cos\theta
\end{cases}
$$

ابتدا بر روی صفحه‌ی xy تصویر می‌شود (به صفحه‌ی افق می‌آید) و سپس بر روی محور x ها

* تبدیل بردارها:

$$\overset{\text{کروی}}{\vec{A}} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$$

$$\overset{\text{دکارتی}}{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

تصویر A بر روی محور x ها

$$A_x = \overset{\text{کروی}}{\vec{A}} \cdot \vec{a}_x = A_r \underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta \underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90+\theta)\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)}$$

a_θ ابتدا باید ۹۰ درجه بچرخد تا منطبق با θ شود و سپس در افق تصویر شود.

تصویر A بر روی محور y ها

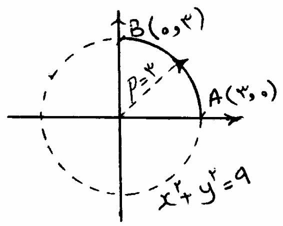
$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r \underbrace{a_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta \underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\theta)\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)}$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r \underbrace{a_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta \underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90+\theta)} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

ماتریس تبدیل کروی به دکارتی

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

* اگر در ماتریس سطر با ستون عوض شود و $\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$ با $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ عوض شود، آنگاه تبدیل دکارتی به کروی است (ترانهاده شود).



مثال: $\vec{F} = xy\,\vec{a}_x - 2x\,\vec{a}_y$

مطلوبست: $\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ در امتداد ربع دایرهٔ نشان داده شده.

نکته: F در دکارتی داده شده است، اما مسیر در شکل (الف) استوانه‌ای است.

روش حل ①: حل دکارتی

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a}_x + dy\,\vec{a}_y + \cancel{dz\,\vec{a}_z}$$

چون در ضرب نقطه‌ای بردار واحد مدنظر است و چون F مولفهٔ z ندارد، پس $dz\vec{a}_z$ حذف می‌شود.

$$\vec{F}\cdot\vec{dl} = xy\,dx - 2x\,dy$$

$$W_{AB} = \int_{x_A=3}^{x_B=0} x\underbrace{y}_{\sqrt{9-x^2}}\,dx - 2\int_{y_A=0}^{y_B=3} \underbrace{x}_{\sqrt{9-y^2}}\,dy$$

حل ②: حل استوانه‌ای

تنها F_ϕ محاسبه می‌شود چون تنها ϕ وجود دارد (خاصیت ضرب داخلی)

$$\begin{bmatrix} F_\rho \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^2\sin\phi\cos\phi \\ -2\rho\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون در صفحهٔ z نیست، پس $dz=0$

شعاع ثابت است، پس تغییرات ρ ($d\rho$) هم صفر است

$\Rightarrow dl = \rho\,d\phi\,\vec{a}_\phi$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\rho^2\sin^2\phi\cos\phi - 2\rho\cos^2\phi\right)\underbrace{\rho}_{3}\,d\phi =$$

٭ در بحث زاویه:

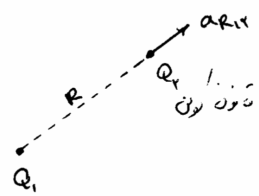
$\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x$: a_r اول باید $\sin\theta$ شود تا به افق (y) برسد و بعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

$\vec{a}_\theta \cdot \vec{a}_x$: θ باید ۹۰ درجه بچرخد تا به ۲ برسد (۲ در واقع خط افق است) و بعد $\cos\phi$ تا به x برسد.

$a_\phi \cdot \vec{a}_x$: فقط کافی است θ $(\phi+90)$ بچرخد یعنی $\cos(90+\phi)$
که در محور x و y سنجیده می‌شود.

- فصل دوم:

شدت میدان الکتریکی در اطراف بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی:



قانون کولن $F_{12} = \dfrac{K Q_1 Q_2}{R^2}$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2}\vec{a}_{12}$$

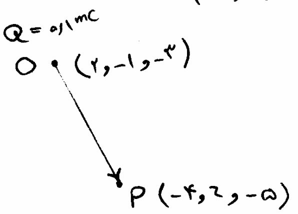
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^{9}$$

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R^2}\vec{a}_{R_{12}} \Rightarrow E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{R^2}\vec{a}_R$$

E_i نسبت به Q_i رابطه خطی دارد.

مثال: مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در نقطه $P(-4,6,-5)$ در فضای آزاد که به وسیله بار $0/1^{mC}$ که در نقطه $O(2,-1,-3)$ واقع شده است.



$$\vec{R} = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$$

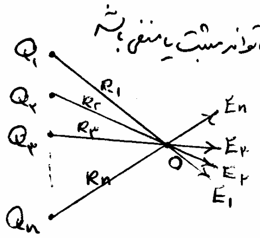
$$\vec{E}_{op} = 9\times 10^{9}\,\frac{0/1\times 10^{-3}}{89}\times\frac{-6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z}{\sqrt{89}} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_R = -6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 2\vec{a}_z \\ R^2 = 89 \end{cases}$$

$$= M_1\vec{a}_x + M_2\vec{a}_y + M_3\vec{a}_z$$

$$\boxed{\underset{\text{جهت}}{\vec{a}_E} = \frac{M_1\vec{a}_x + M_2\vec{a}_y + M_3\vec{a}_z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}}$$

- شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای:

٭ Q می‌تواند مثبت یا منفی باشد



اگر بخواهیم شدت میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای را به دست آوریم:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdots + \vec{E}_n \rightarrow E_t = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{R_i^2}\vec{a}_{R_i}$$

فرمول شدت میدان برای n بار نقطه‌ای

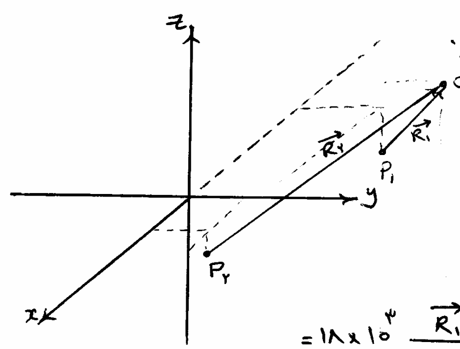
دوری از منابع آورده شده است $\rightarrow \vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$

اگر $n \rightarrow \infty$ ، Q ها به هم چسبیده شده و توده‌ای از بارهای پیوسته شکل می‌گیرد.

مثال: بار نقطه‌ای $Q_1 = 2\mu C$ در موقعیت $P_1(-3,7,-4)$ و بار $Q_2 = 5\mu C$ در نقطهٔ $P_2(2,4,-1)$ قرار دارد. با در نظر گرفتن $O(12,15,18)$ مطلوبست محاسبه:

الف) $\vec{E}_O$

ب) E_O را به مختصات کروی و استوانه‌ای تبدیل کنید.



$$\vec{R}_1 = 15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z$$

$$\vec{R}_2 = 10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_1 = 9\times10^9 \frac{2\times10^{-6}}{R_1^2}\vec{a}_{R_1}$$

$$= 18\times10^3 \frac{\vec{R}_1}{(R_1^2)^{3/2}} = 18\times10^3 \frac{15\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 22\vec{a}_z}{(15^2+8^2+22^2)^{3/2}} = \dots$$

$$E_2 = 9\times10^9 \times (-5\times10^{-6}) \frac{10\vec{a}_x + 11\vec{a}_y + 19\vec{a}_z}{(10^2+11^2+19^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \dots\vec{a}_x + \dots\vec{a}_y + \dots\vec{a}_z$$

ب) برای بردن E_O به استوانه‌ای ابتدا باید E_1 و E_2 را به صورت جداگانه به استوانه‌ای برده و سپس استوانه‌ای با هم جمع شوند. برای بردن E_O به کروی نیز به همین ترتیب.

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow \underset{\text{بار گسسته}}{\sum} \longrightarrow \underset{\text{بار پیوسته}}{\int} \Rightarrow d\vec{E}_1 = \frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}}$$

$dQ = \rho_v dv$ حجمی

$dQ = \rho_s ds$ سطحی

$dQ = \rho_L dl$ خطی

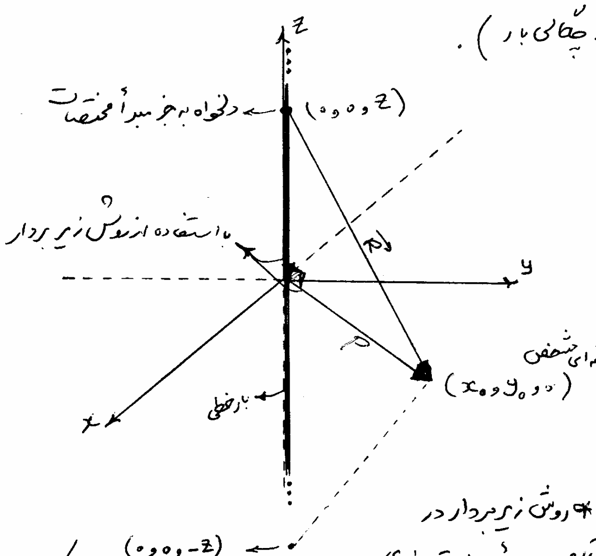
$$\Rightarrow \vec{E}_t = \begin{cases} \iiint \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای حجمی (۳ بعدی)} \\ \iint \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای سطحی (۲ بعدی)} \\ \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{3/2}} & \text{بارهای خطی} \end{cases}$$

چگالی ← یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود

چگالی ← غیر یکنواخت ← طول محدود / طول نامحدود

* تنها در دکارتی است که یک بردار را با کم کردن ابتدا از انتها به دست می آوریم.

مثال: بار خطی با چگالی ρ_L یکنواخت و با طول نامحدود روی محور z قرار گرفته است. مطلوبست شدت میدان الکتریکی در نقطه $(x_0, y_0, 0)$ (ρ_L ← چگالی بار).



$$\frac{\vec R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = ?$$

چون بار خطی یک نوع بار استوانه ای می باشد، پس بهتر است مسئله را در سیستم استوانه ای بررسی کنیم.

$$\vec R = \overset{(0,-z)}{-z\vec a_z} + \rho \vec a_\rho = -z\,\vec a_z + \sqrt{x_0^2+y_0^2}\;\vec a_\rho$$

* روش زیر بردار در تمامی مسائل استوانه ای قابل اجرا است.

دارای تقارن است. هر باری که در بالا است، متقارن آن در پایین هست و به همین دلیل مولفه z در میدان خنثی و حذف می شود.

هر مسئله ای داده شده و شدت میدان الکتریکی خواسته شد، به این صورت عمل می شود:

- قدم اول ← نقطه مبدأ و مقصد مشخص شود (نقطه انتها داده می شود، نقطه مبدأ به جز مبدأ مختصات هر نقطه ای می تواند داده شود).

- قدم دوم ← کسر $\frac{R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ تشکیل داده می شود:

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-z\vec a_z + \rho_0 \vec a_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- قدم سوم ← dE تشکیل داده شود:

به دلیل تقارن بارها

$$\vec{dE} = \frac{\overbrace{\rho_L dl}^{dQ}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec R}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\cancel{-z\vec a_z} + \rho_0 \vec a_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

* چون خط روی محور z قرار دارد ← $dl = dz$

$dy, dx = 0$

قدم ۴ ← درصورت وجود تقارن آنرا بررسی خواهیم کرد. که معمولا باعث حذف یکی از قسمتهای برداری خواهد شد.

قدم ۵ ← عمل انتگرال گیری انجام می شود. همه مقادیر ثابت (درصورتی که ρ_L یکنواخت نباشد؛ یعنی به z وابسته باشد، از انتگرال بیرون نخواهد رفت) از انتگرال بیرون خواهد رفت.

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overset{\text{بعلت تقارن}}{\cancel{-z\vec{a}_z}} + \rho_0 \vec{a}_\rho}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_L(\rho_0 \vec{a}_\rho)}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+\rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{طول خط}} \longrightarrow \text{همواره در این نوع انتگرال} = \frac{2}{\rho_0^2}$$

مقدار ثابت

عنصری که در اینجا است

$$\left.\frac{z}{\rho_0^2\sqrt{z^2+\rho_0^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\rho_0^2} - \left(\frac{-1}{\rho_0^2}\right) = \frac{2}{\rho_0^2}$$

$$z \to \infty \Rightarrow \sqrt{z^2+\rho_0^2} \simeq \sqrt{z^2} = |z| = \begin{cases} z & z>0 \\ -z & <0 \end{cases}$$

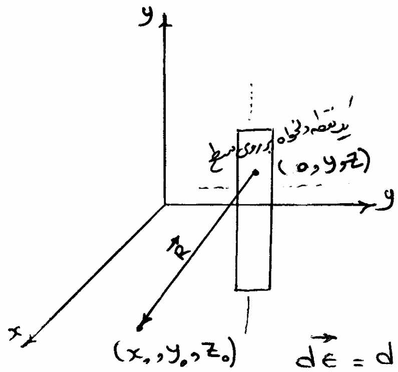
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho_0}\vec{a}_\rho}$$

نتیجه ← میدان الکتریکی بر خط عمود خواهد بود (a_ρ) به فاصله نسبت عکس دارد.

← در انگونه خطوط بلند (نسبت طول به سطح مقطع خیلی زیاد)

میدان الکتریکی ناشی از بار سطحی :

(فرض : ρ_s یکنواخت و ابعاد نامحدود)



$$\vec{R} = x_0\vec{a}_x + (y_0-y)\vec{a}_y + (z_0-z)\vec{a}_z$$

$$\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_0\vec{a}_x + (y_0-y)\vec{a}_y + (z_0-z)\vec{a}_z}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z^2)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_s dydz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

به دلیل تقارن

$$= \frac{\rho_s dydz}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x_0\vec{a}_x + \cancel{(y_0-y)\vec{a}_y} + \cancel{(z_0-z)\vec{a}_z}}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

و $ds = dydz$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_s(x_0\vec{a}_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dydz}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec{a}_x)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\left\{x_0^2 + (y_0-y)^2 + (z_0-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}}_{\frac{2}{x_0^2 + (z_0-z)^2}}\right]dz$$

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{x_0^2 + (z_0-z)^2} \qquad \begin{aligned} z_0 - z &= u \\ dz &= -du \end{aligned}$$

که منفی برای تغییر جهت انتگرال گیری با منفی du - از بین می رود.

$$= \frac{\rho_s(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{x_0^2 + u^2}}_{\frac{\pi}{\sqrt{x_0^2}}} = \frac{\rho_s(x_0\vec{a}_x)}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{x_0}\operatorname{Arctan}\frac{u}{x_0}\right\}_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_x$$

تمرین: چگالی بار سطحی روی مربع با ابعاد $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ و $z=0$ عبارت است از $\rho_s = |x| \ \frac{nC}{m^2}$. مطلوب است محاسبه $\vec{E}$ در $P(0,0,1)$.

تمرین ۲: اگر در مسئلهٔ قبل $\rho_s = e^{-|x|} \, \frac{nC}{m^2}$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ میدان در
$P(0/5 ,\ 0/5 ,\ 1)$

* بررسی قانون گوس:

شار الکتریکی: مجموعه خطوط میدان الکتریکی که از یک سطح عبور می‌کند.

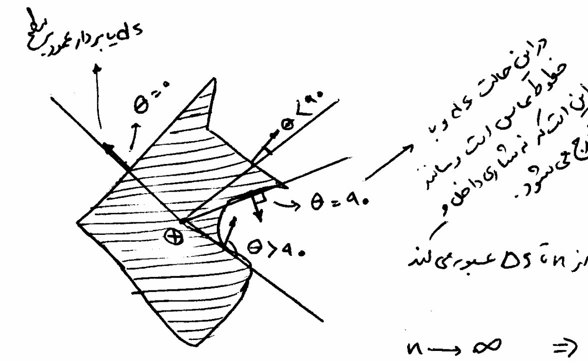
چگالی شار الکتریکی: $\text{چگالی شار الکتریکی} \leftarrow D = \dfrac{\Psi_E \rightarrow \text{شار الکتریکی کل}}{\underbrace{S}_{\text{مساحت سطح}}}$

سطح بسته: سطحی که یک حجم را در خود احاطه کرده باشد.

قانون گوس.

قضیهٔ دیورژانس

هدف بررسی این رابطه است $\rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$



زاویهٔ بین میدان و خط عمود بر سطح $= \theta$

$\Delta\Psi_E =$ شاری که از سطح ΔS می‌گذرد $= D_S\,\Delta S\cos\theta = \vec{D}_S\cdot\vec{\Delta S}$

شاری که از n تا ΔS عبور می‌کند $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D}_{S_i}\cdot\vec{\Delta S_i}$

$$n\rightarrow\infty \;\Rightarrow\; \Psi_E = \iint \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

شاری که از یک سطح بسته خارج می‌شود $\Psi = \oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{enc}$ ← بار محصور شده در سطح بسته.

← با توجه به قانون گوس که در مورد بارهای ساکن است

$\Rightarrow \Psi_E = Q_{enc}$ ← خروجی سطح بسته

← بارهای ساکن تنها میدان الکتریکی دارند (نه مغناطیسی).

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint_{\text{محیطی که توسط سطح بسته احاطه شده}} \underbrace{\rho_v}_{\text{بار حجمی}}\, dv = Q_{enc}$$

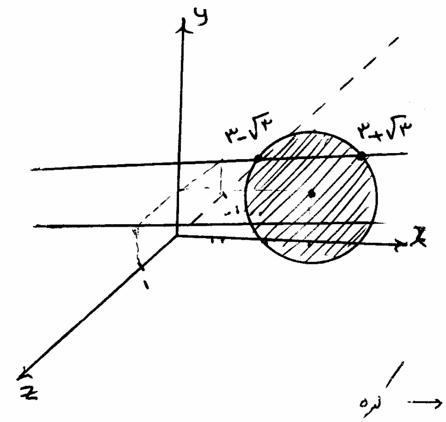
مسئله ۶ - فصل ۳: دو بار یکنواخت در $y=1$ ، $z=\pm 1m$ قرار دارند.

شار خروجی از کره به شعاع $R = 2^m$ و مرکز

$\rho_L = 20 \frac{nC}{m}$

الف) $A(3,1,0)$

ب) $B(3,2,0)$



$Q = \int \rho_L \, dl$

ابتدا باید طول خطوط به دست آید

برای این کار باید معادله کره با خط قطع داده شود.

کره $\rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$

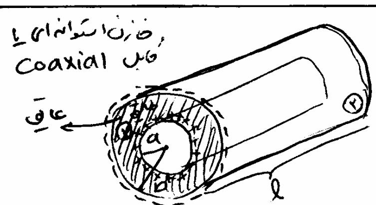
خط ۱ $\begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (x-3)^2+1 &= 4 \\ x-3 &= \pm\sqrt{3} \\ x &= 3\pm\sqrt{3} \end{aligned}$

خط ۲ $\begin{cases} y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

$$Q_1 = \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} 20\times 10^{-9}\, dx \rightarrow Q_2 = Q_1 \longrightarrow$$

چون $z^2=1$ و چه $z=1$ و چه $z=-1$ یکی است.

$Q = 2Q_1 =$ شار خروجی



- توضیحات تکمیلی برای مثال کتاب

طبق قانون گوس ← در داخل اجسام رسانا و هادی‌ها میدان صفر است.

فرض ← بارهای + و - برابرند.

- چون بارهای + به خاطر جذب بارهای - ، بر روی استوانه داخلی جمع می‌شوند، پس $Q_{enc}=0$

و در نتیجه $E=0$ ← در خارج از استوانه‌ها (به ناحیه ۴)

E تنها در حالت ② وجود دارد $\Rightarrow \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{encL}$

- برای حالتی که هم جهت هستند: $\vec{D}\cdot\vec{ds} = D.ds$

$$\underset{\text{سطح جلو}}{\iint} 0 + \underset{\substack{\text{سطح جانبی}\\\text{استوانه}}}{\iint} + \underset{\text{سطح پشت}}{\iint} 0 = \rho_L \, 2\pi a l$$

$$D 2\pi \rho L = \rho_s 2\pi a l \Rightarrow D = \rho_s \frac{a}{\rho}$$

معادلات ماکسول:

دیورژانس به معنای واگرایی

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

میدان مغناطیسی واگرایی ندارد

میدان الکتریکی همگرایی ندارد

کرل به معنای همگرایی

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{dt}$$

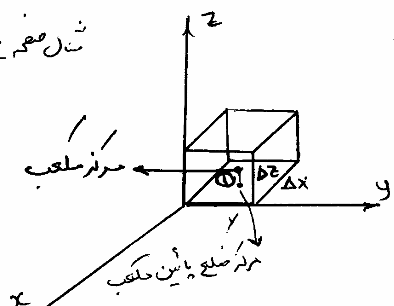
برای حالت استاتیک

برای حالت دینامیک

- کاربرد قانون گوس: مسئله‌ای که تقارن ندارد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

شکل صفحه ۳۴



چگالی شار مرکز

$$\vec{D}_0 = D_{x_0} \vec{a}_x + D_{y_0} \vec{a}_y + D_{z_0} \vec{a}_z$$

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc} \qquad \text{قانون گوس}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{جلو}}{\iint} + \underset{\text{پشت}}{\iint} + \underset{\text{راست}}{\iint} + \underset{\text{چپ}}{\iint} + \underset{\text{بالا}}{\iint} + \underset{\text{پائین}}{\iint} = Q_{enc}$$

سیر ۱ روی شکل

$$\underset{\text{جلو}}{\iint} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta S \to 0} D \cdot \vec{\Delta S}_{\text{جلو}} = \lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!} \frac{\partial D_x}{\partial} \right) \vec{a}_x \right) \cdot \underbrace{\Delta y \, \Delta z \, \vec{a}_x}_{\vec{\Delta S}}$$

با توجه به بسط تیلور

$$= \lim_{\Delta x, \Delta z \to 0} \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{۲} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

چون از x بیشتر به سمت x کمتر رفتیم (منبع جلو و پشت معکوس) و $\varepsilon = x - x_0$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \vec{D} \cdot \vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{۲} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \vec{a_x} \right) \cdot \left(-\Delta y \Delta z \vec{a_x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{۲} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

$$\iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \lim \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta x \right)$$

که می‌توان حذف نمود

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

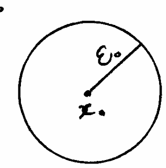
$$\iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta V} = \rho_v \longrightarrow \text{چگالی بار حجمی}$$

بسط تیلور حول x_0: $f_{(x)} = f_{(x_0)} + \frac{\varepsilon}{۱!} \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x}\Big|_{x_0} + \frac{\varepsilon^۲}{۲!} \frac{\partial^۲ f_{(x)}}{\partial x^۲}\Big|_{x_0} + \cdots$

اگر ε بسیار کوچک باشد $\Rightarrow f_{(x)} \simeq f_{(x_0)} + \frac{\varepsilon}{۱!} \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x}\Big|_{x_0}$



اسپین به قانون گوس توسط دیورژانس:

$$\text{در } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\vec{D} = D_x\vec{a}_x + D_y\vec{a}_y + D_z\vec{a}_z$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v}$$ قانون گوس

در قوانین ماکسول — محصول = منبع

قضیهٔ دیورژانس:

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v \, dv = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dv$$

$\rho_v = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dv} = Q_{enc} = \psi_E$$

مثال: فرض کنید در میان یک مخروط ناقص که به وسیلهٔ

$2 \leq r \leq 5$ کره‌های ۲ و ۵ شعاع

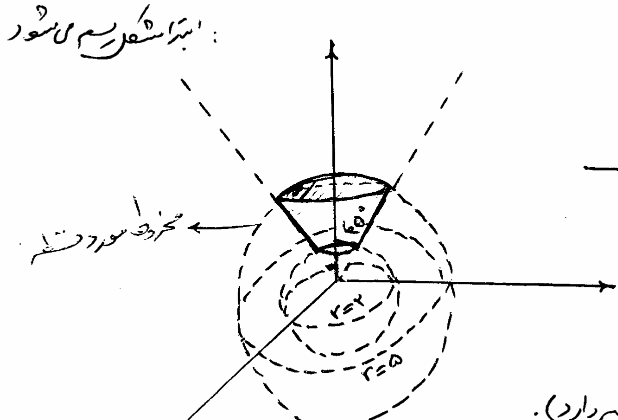
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ زاویهٔ مخروط با محور z

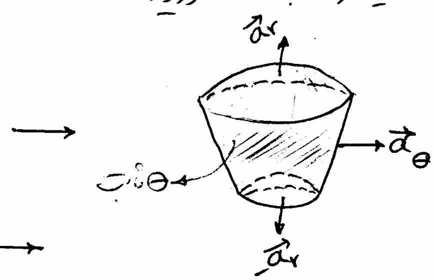
$0 \leq \phi \leq 2\pi$ دایرهٔ مقطع ۰ تا ۲π

مشخص شده داشته باشیم

$\vec{D} = \frac{0/1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta$ ، از طریق محاسبهٔ هر دو طرف قضیهٔ دیورژانس، کل بار واقع در میان ناحیهٔ مخروط را بدست آورید:

ابتدا شکل رسم می‌شود:





چون D نسبت به θ تغییر دارد،

پس ds_θ را می‌گیریم. (در سطح مورد نظر θ تغییر ندارد).

به علت اینکه D مولفه‌ای در جهت $\vec{a}_r$ و $\vec{a}_r$- ندارد.

$$\text{سمت چپ} = \cancel{\iint_{\text{بالا}}} 0 + \cancel{\iint_{\text{پایین}}} 0 + \iint_{\text{جانب}} = \iint \frac{0/1}{r}\cos\theta\,\vec{a}_\theta \cdot r\sin\theta\,dr\,d\phi\,\vec{a}_\theta$$

۲۹

چون در جهت جانبی θ ثابت است، از انتگرال بیرون می آید.

$$= 0/1 \underbrace{\sin\theta \cos\theta}_{} \int_2^5 dr \int_0^{2\pi} d\phi = 0/1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(5-2)2\pi$$

$\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{0/1}{2} \times 6\pi = \boxed{0/3\pi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right)} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(D_\theta \sin\theta\right) + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D\phi}{\partial\phi}}$$

چون $\rightarrow \vec{D} = \underbrace{\frac{0/1}{r}\cos\theta}_{D_\theta}\ \vec{a}_\theta$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{0/1}{r}\cos\theta\sin\theta\right) \leftarrow (uv)' = u'v + v'u$$

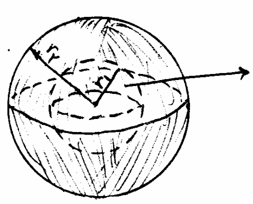
$$= \frac{0/1}{r^2\sin\theta}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$\text{سمت راست} = \iiint \frac{0/1}{\cancel{r^2\sin\theta}}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\cancel{r^2\sin\theta}\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 0/1 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)d\theta}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_2^5 dr}_{3} = \boxed{0/3\pi}$$

تمرین از ضمیمه:

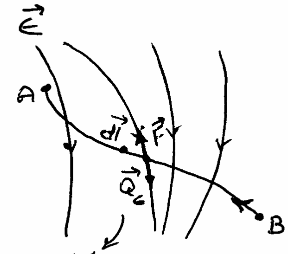
فرض کنید میدان برداری $\vec{D} = K r \vec{a}_r$ داده شده است. مطلوبست بررسی درستی قضیه دیورژانس در محدوده ناحیه محصور به سطوح کروی بین $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ و مبدأ مختصات.



حجم درون کره داخلی خالی است.

- کار و انرژی پتانسیل الکتریکی:
- گرادیان پتانسیل
- انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

Q بار + فرض شود



قصد حرکت بار Q از نقطه B به A را داریم.

بردار نیروی وارده توسط $\vec{E}$ به بار منفی می‌شود در برای جلوگیری از آن باید نیروی $\vec{F}$ را وارد کنیم تا Q را جابجا کند.

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$W_{AB} = \int_B^A dw \Rightarrow W_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_P$$

انرژی پتانسیل

کار لازم برای حرکت یکنواخت بار Q در میدان $\vec{E}$

انرژی پتانسیل (کار انجام شده می‌تواند به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره شود)

مثال: فرض کنید یک میدان الکتریکی داریم:

$$\vec{E} = y\vec{a_x} + x\vec{a_y} + 2\vec{a_z}$$

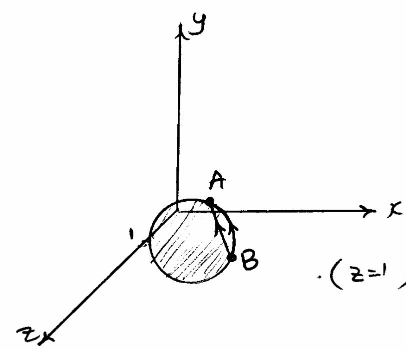
می‌خواهیم از نقطه $B(1,0,1)$ به نقطه $A(0.8, 0.6, 1)$ برویم.

کار لازم برای انتقال $Q = 2C$ در امتداد

الف) قوس کوچکتر دایره $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

ب) خط مستقیم بین A و B

ابتدا شکل رسم می‌شود.



$$\vec{dl} = dx\vec{a_x} + dy\vec{a_y}$$

dz برابر 0 است. زیرا روی دایره z همواره ثابت است ($z=1$).

$$w_{AB} = -2\int y\,dx + x\,dy = -2\int_{x_B}^{x_A} y\,dx - \int_{y_B}^{y_A} x\,dy =$$

$$= -2\int_{1}^{0.8}\sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_{0}^{0.6}\sqrt{1-y^2}\,dy = -0.96\ J$$

یعنی انرژی آزاد شده است.

که منفی بیانگر این است که B دارای پتانسیل بیشتری نسبت به A بوده است.

ب)

$$\begin{cases} y - y_B = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \rightarrow y = -3(x-1) \rightarrow x = 1 - \dfrac{y}{3} \\ z - z_B = \dfrac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B) \rightarrow z = 1 \\ x - x_B = \dfrac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B) \end{cases}$$

برای حل باید مقادیر را برحسب x و y نوشته و در انتگرال‌های قبلی جایگذاری کنیم (همان مقدار قبل به دست خواهد آمد).

ج) به دلیل اینکه کار به مسیر وابسته نیست، پس نیرو کنسرواتیو است.

میدان یک بار خطی در جهت a_ρ است

میدان یک بار دایره‌ای در جهت a_ϕ خواهد بود

$\longrightarrow$ اگر یک بار خطی باشد و در دایره‌های اطراف آن حرکت کنیم، کار انجام شده صفر خواهد بود. به عبارت دیگر در دوایر اطراف بار الکتریکی، پتانسیل برابر و در نتیجه کار صفر است.

اختلاف پتانسیل:

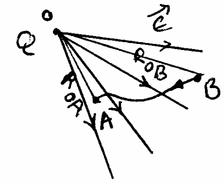
$$V_{AB} \triangleq \frac{W_{AB}}{Q}$$

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}}$$

مثال: مطلوبست محاسبه اختلاف پتانسیل در اطراف بار نقطه‌ای Q

حل:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{a}_r}{R^2}$$



یک روش برای حل:

یک بار آزمون را از A به B حرکت می‌دهیم و سپس مقدار کار را بر بار Q آزمون تقسیم می‌کنیم.

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{a}_r}{r^2}\cdot\left(dr\,\vec{a}_r + \cdots\right)$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{a}_r + \cdots$$

$$\vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_A - V_B = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_{oB}}^{R_{oA}}\frac{dr}{r^2}$$

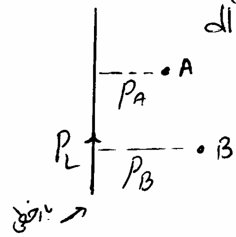
$$\boxed{V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{oA}} - \frac{1}{R_{oB}}\right)}$$

در بار خطی:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\vec{a}_\rho$$

$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a}_\rho + \cdots$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dl} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,d\rho$$



$$V_B - V_A = -\int_{\rho_B}^{\rho_A}\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,d\rho = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln\rho\,\Big|_{\rho_B}^{\rho_A}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln\frac{\rho_{oB}}{\rho_{oA}}$$

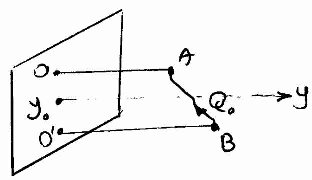
اگر خط بار روی محور z باشد، باید در حالت کلی‌تر $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\rho_{0B}=\sqrt{(x_B-x_0)^2+(y_B-y_0)^2}$$

$$\rho_{0A}=\sqrt{(x_A-x_0)^2+(y_A-y_0)^2}$$

* بار سطحی:

$$E=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_n$$



مثلاً اگر در صفحهٔ $y=y_0$ باشیم، $\vec{E}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\vec{a}_y$

O و O' از نظر z متفاوتند، و چون در فرمول x و y ظاهر نمی‌شود، پس می‌توان آنها را با یک نام مشابه (O) نام‌گذاری کرد.

$$\vec{E}\cdot\vec{dl}=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}dy$$

$$V_A-V_B=-\int_{y_{0B}}^{y_{0A}}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}dy$$

$$V_A-V_B=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(y_{0B}-y_{0A}\right)$$

* محاسبهٔ V زمانی که به میدان E دسترسی نداریم:
(برای بار نقطه‌ای)

هر بار کروی و ... را طبق قانون گوس می‌توان نقطه‌ای در نظر گرفت (دور آن یک سطح کروی کشیده و به صورت نقطه‌ای می‌گیریم).

$$V_{AB}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{0A}}-\frac{1}{R_{0B}}\right)$$

اگر B نقطه‌ای در بی‌نهایت باشد، $(V_B=0)$
در آن صورت $V_B\to\infty$ و $\frac{1}{R_{0B}}\to\infty$

$$\Rightarrow\quad V_A-V_B=V_A=\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{0A}}}$$

پتانسیل مطلق نقطهٔ A اطراف بار نقطه‌ای

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

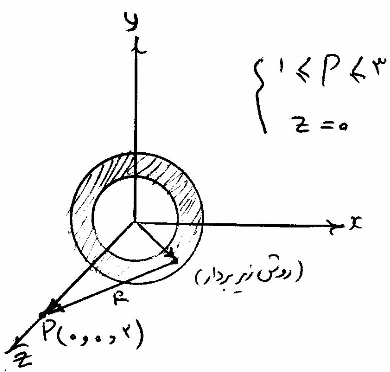
$$dQ = \rho_L\, dl \Rightarrow dV = \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V = \int \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ = \rho_s\, ds \Rightarrow dV = \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V = \iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dQ = \rho_v\, dv \Rightarrow dV = \frac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V = \iiint \frac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

* اگر $\in$ معلوم نباشد باید از این فرمولها استفاده شود، اما اگر معلوم بود از فرمولهای قبل.

* بررسی مسئلهٔ ۱۹ - از فصل ۴ :



$$\begin{cases} 1 \leq \rho \leq 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \rho_s = 5\rho \ \frac{nC}{m^2}$$

$V_P = ?$

حل: $V_P = \iint \frac{\rho_s\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\vec{R} = -\rho\vec{a}_\rho + 2\vec{a}_z$$

$$ds = \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$V_P = \iint \frac{(5\times10^{-9}\rho)\,\rho\, d\rho\, d\phi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+4}} = 5\times10^{-9}\times9\times10^{9}\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^3 \frac{\rho^2\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+4}}$$

بررسی یک تست ارشد

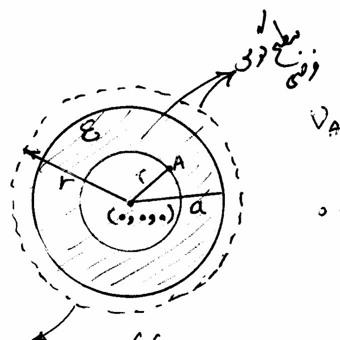
- چگالی بار الکتریکی یکنواخت $\rho_0 \frac{C}{m^3}$ در حجم کره‌ای از عایق کامل به شعاع a و ضریب دی‌الکتریک ε حضور دارد. مطلوب است پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای در داخل عایق.

۱) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}a^2 - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2$

۲) $\frac{\rho_0}{6(\varepsilon-\varepsilon_0)}(a^2-r^2)$

۳) $\frac{\rho_0}{6}\left[\frac{a^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+\frac{r^2}{\varepsilon_0}\right]$

۴) $\frac{\rho_0}{6\varepsilon}(a^2-r^2)+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0}$



چون کره عایق است، درون آن هم میدان دارد. $V_A = ?$

$$0<r<a \Rightarrow \oint\!\!\oint \varepsilon \vec{E}\cdot\vec{ds} = \underbrace{Q_{enc}}_{\text{حجم اشغال شده}}$$

$$\varepsilon E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}\vec{a}_r}$$

$$r>a : \oint\!\!\oint \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) =$$

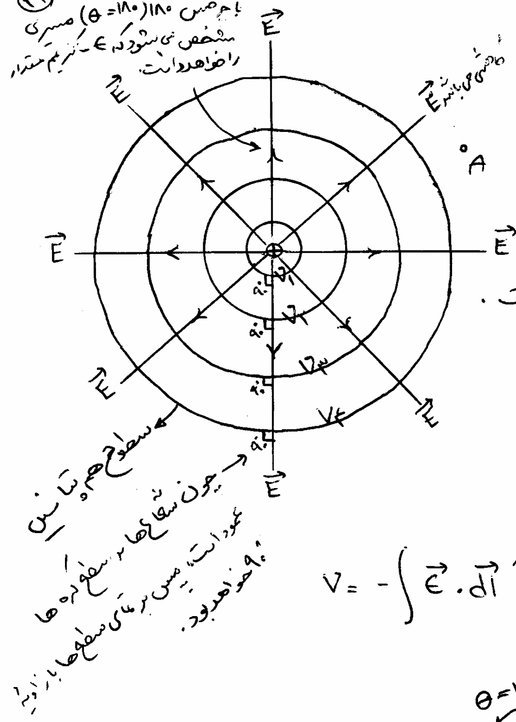
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{a}_r$$

$$V_A = V_A - V_\infty = \underbrace{(V_A - V_a)}_{\text{داخل کره}} + \underbrace{(V_a - V_\infty)}_{\text{خارج کره}}$$

$$-\int_a^r \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon}dr - \int_\infty^a \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon}\left(\frac{r^2}{2}\right)_a^r - \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_\infty^a$$

$$= \frac{-\rho_0}{6\varepsilon}(r^2-a^2) + \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\right)$$

گزینه ۴ ✓



شیب یا گرادیان پتانسیل:

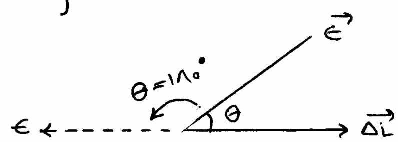
$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{0A}}$$

یک مقدار ثابت $= R_{0A} \leftarrow$ نشان دهندهٔ یک پوستهٔ کروی است.

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R \longrightarrow$$ هرچه از مرکز دور شویم، ϵ کم می‌شود $\longrightarrow$ ϵ کاهشی است.

$$V = -\int \vec{\epsilon}\cdot\vec{dl} \xrightarrow{\text{اگر مسیر کوتاه باشد}} \Delta V = -\vec{\epsilon}\cdot\vec{\Delta L} = -\epsilon\,\Delta L\cos\theta$$



$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta L} = \boxed{-E\cos\theta} \qquad \Rightarrow \left.\frac{\Delta V}{\Delta L}\right|_{max} = E$$

$\rightarrow \theta = 180°$

* یعنی بیشترین افزایش پتانسیل را داریم و به منبع تولیدکنندهٔ پتانسیل نزدیک خواهیم شد.

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| = \epsilon_x \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{a}_x = -\epsilon_x\vec{a}_x$$

* افت پتانسیل تولیدکننده میزان است.

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta y}\right| = \epsilon_y \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta y}\vec{a}_y = -\epsilon_y\vec{a}_y$$

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta z}\right| = \epsilon_z \longrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta z}\vec{a}_z = -\epsilon_z\vec{a}_z$$

حال اگر Δx و Δy و Δz به سمت صفر میل کند تغییرات ΔV نیز به صورت ∂V خواهد بود. پس با لحاظ کردن این موضوع و جمع کردن روابط بالا داریم:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z = -\left(\epsilon_x\vec{a}_x + \epsilon_y\vec{a}_y + \epsilon_z\vec{a}_z\right) = \boxed{-\vec{E}}$$

$$\underset{\text{یک رویه}}{f(x,y,z) = C}$$

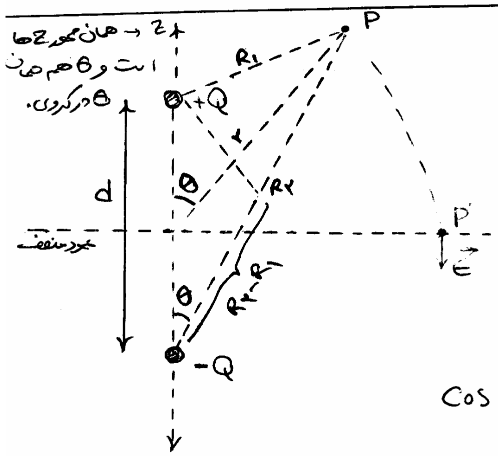
گرادیان $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{a_z}$

اپراتور دل

که برداری عمود بر رویه در نقطه (x,y,z) می باشد. $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

چون گرادیان گرفتن از تابع یک بردار عمود در جهت افزایش می دهد، به همین دلیل منفی است.

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a_z}$$



دوقطبی: دو بار + و − که با یک عایق به هم وصل شده اند.

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$\cos\theta = \frac{R_2-R_1}{d}$$

$$R_2 - R_1 = d\cos\theta \quad , \quad R_1R_2 \simeq r^2$$

به خصوص برای نقاط دور دست: $r \gg d$

$$\Rightarrow V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \vec{P}\cdot\vec{a_r}$$

گشتاور دوقطبی

در دستگاه کروی

$$\vec{P} = Q\vec{d}$$

روی محور منصف $\underbrace{R_2 - R_1 = 0}_{\theta = 90}$ یعنی $R_2 = R_1$ پس: $V_P = 0$ یعنی سطح شامل محور منصف سطحی هم پتانسیل با $V = 0$ می باشد.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a_\theta} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a_\phi}}\right)$$

چون در شکل بالا، به ϕ وابستگی ندارد.

$$= -\left(\frac{-Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_r} - \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a_\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{a_r} + \sin\theta\,\vec{a_\theta}\right)$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_\theta}$$

دلیل اینکه مشتق ۰ نیست درحالیکه خودش ۰ است ← اختلاف پتانسیل میدان را ایجاد می‌کند.

- انرژی پتانسیل در میدان الکترواستاتیک :

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_{\text{محیط}} \varepsilon_0 E^2 \, dv$$

شدت میدان ، حجم

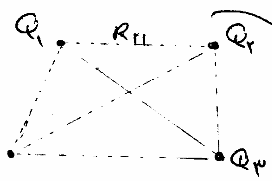
هدف :

که نشان دهنده این است که :
انرژی در میدان ذخیره می‌شود.

$$\boxed{V_{12} \triangleq \frac{W_{12}}{Q_0}}$$

W_{12} : کار لازم برای آوردن بار ۲ به نزدیکی بار ۱

* در محیط خالی از بار ، برای آوردن یک بار به داخل آن کاری لازم نمی‌شود.



$$W_{21} = V_{21}Q_2 \quad \text{و} \quad V_{21} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}}$$

که

پتانسیلی که بار ۱ در محل ۲ ایجاد کرده است.

کار لازم برای آوردن Q_3 به نزدیکی Q_1 و Q_2 → $W_{31} + W_{32} = V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3$

کار لازم برای آوردن n تا بار Q_1 ، Q_2 ، ..... و Q_n :

$$W_E = V_{21}Q_2 + V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3 + V_{41}Q_4 + V_{42}Q_4 + V_{43}Q_4 + \cdots$$

← به جای اینکه اول بار ۱ را آورده و سپس بار دیگری را به آن نزدیک کنیم ، می‌توانستیم ابتدا آن یکی بار را بیاوریم و سپس بار ۱ و ... را به آن نزدیک کنیم. پس:

$$V_{12}Q_2 = V_{21}Q_1$$

نتیجه می‌شود :

$$W_E = V_{12}Q_1 + V_{13}Q_1 + V_{23}Q_2 + V_{14}Q_1 + V_{24}Q_2 + V_{34}Q_3 + \cdots$$

← حال دو طرف را باهم جمع می‌کنیم (W_Eهای به دست آمده)

V_1 : پتانسیل بقیه بارها در محل Q_1

$$2W_E = Q_1\overbrace{(V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots)}^{V_1} + Q_2(\underbrace{V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots}_{V_2}) + Q_3(\underbrace{V_{31} + V_{32} + V_{34} + \cdots}_{V_3}) + \cdots$$

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \underset{\text{پتانسیل}}{V_i}} = E_p$$

← فرم گسسته

انرژی پتانسیل که در n بار Q ذخیره خواهد شد.

(۳۷)

$$\text{if} \quad n \to \infty \quad \begin{cases} Q_i \longrightarrow dQ = \rho_v\, dv \\ \sum_i \longrightarrow \iiint \end{cases} \Rightarrow \boxed{w_\epsilon = \frac{1}{2} \iiint \rho_v V\, dv} = E_p$$

فرم ماکروسکوپی

پتانسیل

اگر $n \to \infty$، آنگاه R، شعاع کره هم به سمت ∞ میل می‌کند.

$$w_\epsilon = \frac{1}{2} \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})\, V\, dv$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (V\vec{D})}_{\text{دیورژانس یک گرادیان}} \equiv V(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} V)$$

$$\Rightarrow w_\epsilon = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D}) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V \right\} dv$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \iiint \vec{\nabla} \cdot (V\vec{D})\, dv}_{\text{براساس قضیه دیورژانس :}} - \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} V}_{-\vec{E}}\, dv$$

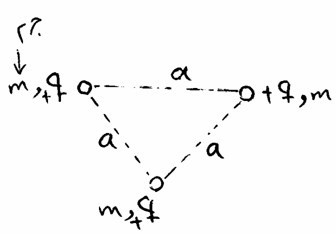
$$\cancel{\frac{1}{2} \oint\!\!\oint V\vec{D} \cdot d\vec{s}} \to 0 \longrightarrow R \to \infty \text{ چون}$$

$V = \frac{1}{R}$ ، $\alpha\, \frac{1}{R^2}$ ، $\alpha\, R^2$ ، تناسب

این دو همدیگر را خنثی می‌کنند

$$\Rightarrow w_\epsilon = \frac{1}{2} \iiint \underbrace{\vec{D}}_{\varepsilon_0 \vec{E}} \cdot \vec{E}\, dv = \boxed{\frac{1}{2} \iiint \varepsilon_0 E^2\, dv = \epsilon_p}$$

بررسی یک تست :



اگر یکی از بارهای q مجاز به حرکت باشد و فقط نیروهای کولنی حضور داشته باشند (اصطکاک و ... = ۰)، سرعت ذره q در نقاط بی‌نهایت دور کدام گزینه است.

۱) $\dfrac{\sqrt{3}\, q}{\sqrt{m a \pi \varepsilon_0}}$

۲) $\dfrac{q}{\sqrt{m a \pi \varepsilon_0}}$

۳) $\dfrac{q}{\sqrt{2 m a \pi \varepsilon_0}}$

۴) $\dfrac{q}{\sqrt{3 m a \pi \varepsilon_0}}$

* چون برای قرار دادن بارها کنار هم باید کار انجام شود، پس دارای انرژی پتانسیل ذخیره شده هستند.

انرژی پتانسیل اول = انرژی جنبشی بار آزاد شده + انرژی پتانسیل باقیمانده

حالت ① اول ← هر ۳ بار حضور دارند.

جنبشی

$$E_{c_1} = 0$$

$$E_{p_1} = 3\left(\frac{1}{2} q v_1\right)$$

$$= \frac{3}{2} q \underbrace{\left(v_{12} + v_{13}\right)}_{2v_{12}}$$

$$= 3q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\right) = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

حالت دوم ② ← یکی از بارها آزاد شده (دور شده) و ۲ بار دیگر حضور دارند.

$$E_{p_2} = qv = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} m v^2$$

با مقایسه ① و ②

$$\Rightarrow \quad E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

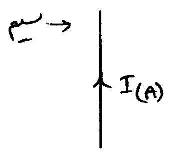
$$\Rightarrow v^2 = \frac{q^2 / \pi\varepsilon_0 a}{m}$$

$$v = \frac{q}{\sqrt{m\pi\varepsilon_0 a}}$$

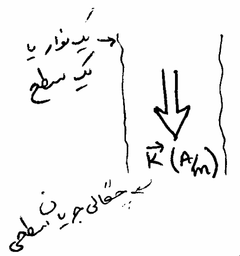
$\boxed{\text{گزینه ۲ } \checkmark}$

فصل ۵

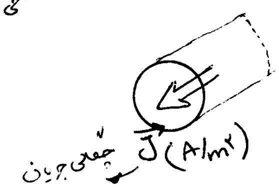
شدت جریان، هادی ها، مقاومت الکتریکی:



$$I \triangleq \frac{dQ}{dt}$$

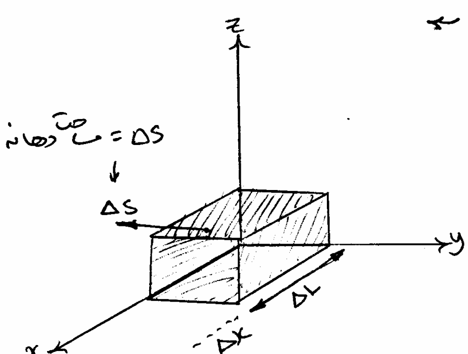


$$\rightarrow \quad I = \int K\,dy$$



$$\rightarrow \quad I = \iint \vec{J}\cdot\vec{ds}$$

قصد حرکت حجم با اندازهٔ Δx را داریم



$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_v\,\Delta s\,\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت متوسط روی محور x ها

$$\Delta I = \rho_v\,\Delta s\,V_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta I}{\Delta s}}_{J_x} = \rho_v V_x$$

$$\rightarrow J_y = \rho_v V_y$$

$$J_z = \rho_v V_z$$

اگر یک بردار ۳ بعدی باشد $\rightarrow \quad \vec{J} = J_x\vec{a}_x + J_y\vec{a}_y + J_z\vec{a}_z$

$$V = V_x\vec{a}_x + V_y\vec{a}_y + V_z\vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \rho_v \vec{V}$$

سرعت

پیوستگی شدت جریان : طبق اصل بقای بارهای الکتریکی می توان گفت بار الکتریکی نه به وجود می آید و نه از بین می رود و اینکه اگر زمانی تعداد مساوی بار منفی و مثبت به وجود بیایند، از طریق جدا شدن از یکدیگر به دست آمده اند و با ملحق شدن به یکدیگر از بین می روند. معادله پیوستگی نتیجه این اصل است و می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$I = \oiint \vec{J}\cdot\vec{ds} = -\frac{d\overset{\text{موجودی بار اولیه}}{Q_i}}{dt}$$

انتگرال بسته به این معناست که جریان وارد می شود و از تمام سطوح می گذرد و سپس خارج می شود (نه اینکه فقط خارج شود)

$$\underbrace{\oiint \vec{J}\cdot\vec{ds}}_{\text{با استفاده از قضیه دیورژانس}} = \frac{-d}{dt}\iiint \rho_v\, dv$$

به جای انتگرال و مشتق عوض شود

$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

اگر جریان از نوع dc باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$ یعنی ρ_v ثابت (ct) است.

و $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ یعنی $\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$

اگر جریان از نوع Ac باشد، پس $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \neq 0$ و $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \neq 0$

توضیح بیشتر:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

رابطه $\vec{J} = \overset{\text{هدایت ویژه (رسانایی)}}{\sigma}\vec{E}$ را نیز داریم و نیز $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\sigma\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

(۴۰)

با فرض اینکه $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ = ثابت ، پس :

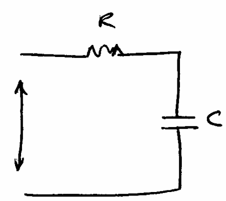
$$\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})}_{\rho_v}\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

با فرض اینکه $\rho_v\Big|_{t=0} = \rho_0$

$$\boxed{\Rightarrow \rho_v = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}}$$

که $\frac{\varepsilon}{\sigma} = \tau$ ثابت زمانی مدار :



$$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{RC}$$

$$\boxed{\Rightarrow RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

عمق نفوذ :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$$

از جنس مسافت است .

فرکانس موج

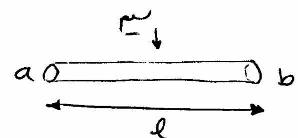
$$J_x = \sigma E_x e^{-z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}\right)$$

مس: $\sigma = ۵٫۸ \times ۱۰^{۷}\ \frac{℧}{m}$

$$\Rightarrow \delta_{cm} = \frac{0/066}{\sqrt{f}}$$

$$f = 60 \ \text{Hz} \longrightarrow \delta_{cn} = 8/54 \ \text{mm}$$

$$f = 10 \ \text{GHz} \longrightarrow \delta_{cn} = 6/61 \times 10^{-4} \ \text{mm}$$



طول سیم

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\iint \sigma \vec{E}\cdot\vec{ds}}$$

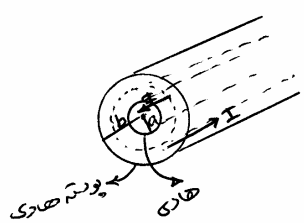
دهانه سیم

مثال از چنگ
ص ۲۵۹ ۵-۵
ص ۲۶۱ ۵-۶

مقاومت طولی سیم :

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

مقاومت عرضی کابل کواکسیال (coaxial) :



$$R^* = \frac{V_{ab}}{I^*} =$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\Rightarrow \varepsilon E\left(2\pi \rho L\right) Q$$

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\, \vec{a_\rho}\cdot \underbrace{d\rho\, \vec{a_\rho}}_{dl} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\rho l\varepsilon} = \frac{\rho_L L}{2\pi\rho L\varepsilon} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\vec{a_\rho}$$

$$I^* = \iint \sigma^* \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\vec{a_\rho}\cdot \rho\, d\phi\, dz\, \vec{a_\rho}$$

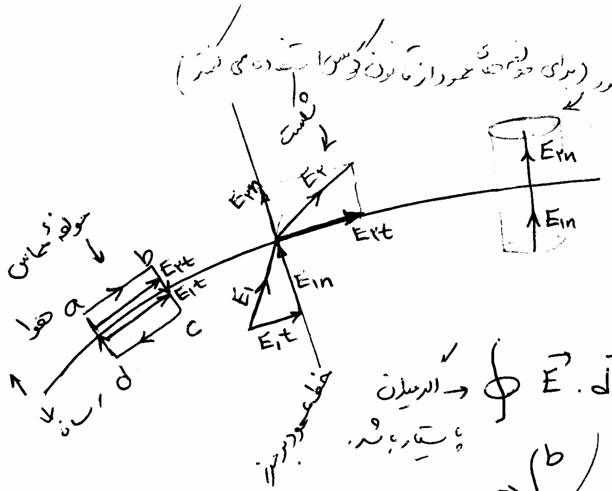
$$= \sigma^* \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \times 2\pi l = \frac{\sigma \rho_L l}{\varepsilon} \qquad \Rightarrow R^* = \frac{\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} Ln \frac{b}{a}}{\frac{\sigma^* \rho_L L}{\varepsilon}}$$

برای عایق‌ها با * و برای هادی‌ها بدون * است.

$$\Rightarrow R^* = \frac{Ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma^* L}$$

$$\boxed{RC^* = \frac{\varepsilon}{\sigma^*}}$$

رسانا و شرایط مرزی:



$$\oint \vec{E}\cdot \vec{dl} = 0$$ ← الزاماً پایستار باشد.

$$\Rightarrow \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

$\int_a^b$ ← چون مسیر در اشتراک دیگر است، ۰ یکی این هم باید ۰ باشد.

$\int_b^c$ ← محدودیت

$\int_c^d$ ← ۰ چون داخل رسانا هستیم

$\int_d^a$ ← چون محدود است

$$\Rightarrow E_{2t} = 0$$

برای مولفه عمودی → $\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc} \Rightarrow \underbrace{\iint}_{\text{هوا}} + \underbrace{\iint}_{\text{هادی}\ \to\ 0} + \underbrace{\iint}_{\text{جانبی}\ \to\ 0} = Q_{enc}$

$$\Rightarrow D_{2n}\Delta s = \rho_s \Delta s$$

$$\Rightarrow D_{2n} = \rho_s \quad \text{یا} \quad \boxed{E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}}$$

← بر طبق این مطالب، میدان‌های بازتاب شده از سطوح یک رسانا، بر سطح آن عمود خواهد بود. (همانند آینه‌ها (تخت، محدب و...) می‌توانند خطوط بازتاب شده را به همان صورت، به طور محدب و یا ... منعکس کنند. به عبارت دیگر سطوح یک رسانا در برابر خطوط میدان همانند آینه‌ها عمل می‌کند).

* روش تصویر:

$$D_n = \rho_s \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \varepsilon_0 E_n$$

- اگر E_n متغیر با زمان باشد، ρ_s هم متغیر با زمان خواهد بود که در این حالت جریانی در هادی القا خواهد شد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

توسط معادله لاپلاس

هدف پیدا کردن پتانسیل است ←

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

چون حل معادله لاپلاس منتهی به معادلات دیفرانسیل پیچیده می‌شود، از روش جانگذینی (روش تصویر) استفاده می‌شود.

$$V = V(x, y, z)$$

روش تصویر: این روش جانگذینی برای پیدا کردن پتانسیل مثلاً در تمام نقاط بالای صفحه رسانای $y > 0$ می‌باشد. همان طور که گفته شد، روش رسمی برای انجام این کار حل معادله لاپلاس است. ولی روش تصویر برای $y > 0$ به جز در محل بار نقطه‌ای تحت شرایط زیر قابل استفاده است.

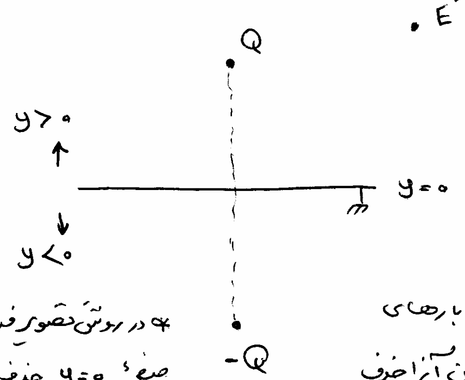
۱- در تمام نقاط روی صفحه رسانا، پتانسیل صفر باشد (صفحه به زمین وصل شود).

۲- در نقاط بسیار نزدیک به Q، پتانسیل به سمت پتانسیل یک بار نقطه‌ای تنها میل می‌کند.

۳- در نقاط بسیار دور از Q پتانسیل صفر باشد.

۴- تابع پتانسیل نسبت به x و z تابعی زوج باشد.

$\vec{E} = ?$



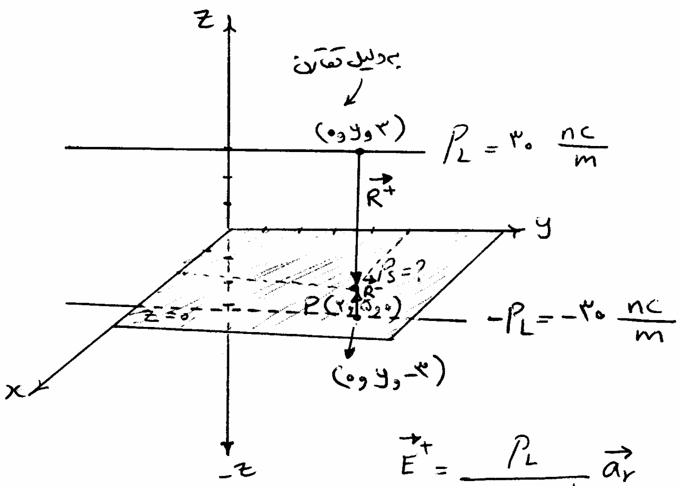
* Q علاوه بر ایجاد میدان E، یک ρ_s القایی نیز بر روی ورق y = ۰ ایجاد می‌کند. در این حالت دیگر نمی‌توان گفت میدان ایجاد شده تنها ناشی از بار Q است.

* در روش تصویر فرض می‌شود صفحهٔ y = ۰ حذف شده و به جای آن بار قرینهٔ Q - قرار گرفته است. حال با این فرض میدان را محاسبه می‌کنیم.

* چون صفحهٔ y = ۰ جاذب بارهای منفی خواهد بود، پس می‌توان آن را حذف و جای آن Q - را جایگزین نمود.

* مثال از هیت:

(درس نامه‌ها سیان مزم عمودی داشت)



$$\vec{E}^+ = \frac{\rho_L}{۲\pi \varepsilon_0 R^+} \vec{a}_r$$

$$\vec{R}^+ = (۲ - ۰)\,\vec{a}_x + (۰ - ۳)\,\vec{a}_z$$

$$\vec{E}^+ = \frac{۳۰ \times ۱۰^{-۹} \times ۱۸ \times ۱۰^{۹}\,(۲\vec{a}_x - ۳\vec{a}_z)}{(۲^۲ + ۳^۲)}$$

$$\vec{E}^- = \frac{-۳۰ \times ۱۰^{-۹} \times ۱۸ \times ۱۰^{۹}\,(۲\vec{a}_x + ۳\vec{a}_z)}{(۲^۲ + ۳^۲)}$$

$$\vec{E}_n = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = -۲۴۹\,\vec{a}_z$$

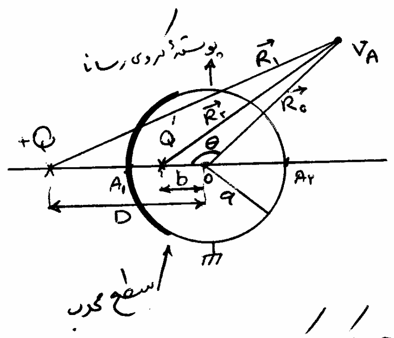
چون بر صفحه عمود است، پس همان نرمال می‌گیریم.

$$\rho_s = \varepsilon_0 \vec{E}_n = -۲۴۹ (\varepsilon_0) \quad \frac{C}{m^۲}$$

- مثال ازچند

الف) تصویر بار $+Q$ که به فاصله D از مرکز کره قرار دارد؟

ب) پتانسیل یک نقطه درخارج از کره به چه صورت خواهد بود؟



$b = ?$

$Q' = ?$

* فرض می کنیم قسمتی از کره که روبروی بار Q است ، همانند آینهٔ محدب عمل می کند ، پس تصویر Q در فاصلهٔ کانونی آینه تشکیل می شود. دراین حالت Q با تصویرش یعنی Q' برابر نخواهد بود وچون سطح محدب است پس : $Q' < Q$

$$V_{A_۱} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_0 (D-a)} + \frac{Q'}{۴\pi\varepsilon_0 (a-b)} = 0$$

$\Rightarrow$ ط و Q' مجهول است.

$$V_{A_۲} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_0 (D+a)} + \frac{Q'}{۴\pi\varepsilon_0 (a+b)} = 0$$

$$\times ۴\pi\varepsilon_0 \longrightarrow \text{مخرج مشترک} \rightarrow \begin{cases} Q(a-b) + Q'(D-a) = 0 \\ Q(a+b) + Q'(D+a) = 0 \end{cases} \Leftarrow \text{بعد از حل}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q' = -Q \dfrac{a}{D} \\ b = \dfrac{a^۲}{D} \end{cases}$$

مشاهده می شود که Q' منفی است واندازهٔ آن از Q کوچکتر است.

$$V_A = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_0 R_۱} - \frac{Q\frac{a}{D}}{۴\pi\varepsilon_0 R_۲}$$

$$R_۱ = \left(D^۲ + R_0^۲ - ۲R_0 D \cos\theta\right)^{۱/۲}$$

$$R_۲ = \left(b^۲ + R_0^۲ - ۲ b R_0 \cos\theta\right)^{۱/۲}$$

فرض می‌کنیم $R_0 \to 0$

این قضیه را بررسی می‌کنیم که $\lim_{R\to a} V_A = 0$ صحیح است یا خیر؟

$$\Rightarrow \lim_{R_0\to a} \frac{a}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2+a^2-2aD\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0\left(b^2+a^2-2ab\cos\theta\right)^{1/2}}$$

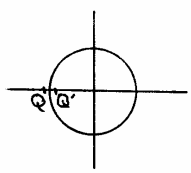
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2+a^2-2aD\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{Q\frac{a}{D}}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a^4}{D^2}+a^2-2a\frac{a^2}{D}\cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(D^2+a^2-2aD\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{Q\alpha}{\frac{\cancel{D}4\pi\varepsilon_0\alpha}{\cancel{D}}\left(a^2+D^2-2aD\cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$= 0$$

اثبات شد ✓

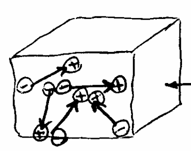
ـ اگر D به سمت بی‌نهایت میل کند، Q' به سمت مرکز کره میل خواهد کرد که در این حالت Q' به سمت صفر میل می‌کند و اگر D به سمت نقطهٔ A_1 میل کند، Q' در آن سوی کره و در بیشترین مقدار خود یعنی میل به سمت مساوی شدن با Q خواهد بود.



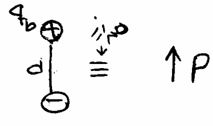
* بررسی عایق‌ها:

یک جسم دی الکتریک در میدان الکتریکی می‌تواند به صورت آرایشی از Dipole های الکتریکی (دوقطبی‌های الکتریکی) در فضای آزاد و متشکل از بارهای الکتریکی + و − که مراکزشان کاملاً بر هم منطبق نیستند، باشد. ضمناً این بارها به صورت آزاد نبوده و نمی‌توانند نقشی در هدایت الکتریکی داشته باشند.

یک قطعه عایق



دارای آرایش‌های متفاوت هستند و به همین دلیل، همدیگر را خنثی می‌کنند.



$$\vec{P_i} = Q\,\vec{d_i}$$

پلاریزاسیون $\rightarrow \vec{P} \triangleq \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n\Delta V} \vec{P_i}$ برداری

$n \rightarrow$ تعداد P_i ها در واحد حجم

$\Delta V \rightarrow$ حجم مورد نظر

$n\Delta V \rightarrow$ تعداد P_i ها در حجم مورد نظر

* چون در حالت عادی برآیند P_i ها صفر خواهد بود، پس پلاریزاسیون صفر خواهد شد. مگر در حالت‌های خاص مانند قرار گرفتن در بین صفحات خازن، تا تأثیر میدان حاصله از آن که پلاریزاسیون را صفر نخواهد کرد.

کل بارهای داخل حجم

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{بار آزاد}}$$

بار مقید (جمع بارهای مثبت)

قانون گوس برای بار آزاد $\rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc\ \text{آزاد}}$ ①

پس $\Rightarrow \oiint \vec{P} \cdot \vec{ds} = -Q_b$ ②

$$\oiint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q_T \quad ③$$

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{بار آزاد}} \xRightarrow{①,②,③} \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_b \\ \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_T \end{cases}$$

وقتی بارهای مثبت به صورت واگرا به بیرون از ناحیه حرکت کنند، بار درون به صورت قوی منفی خواهد بود.

معادله واگرایی طبق قانون گوس

گذردهی عایق $\leftarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$\vec{P}$ دیورژانس

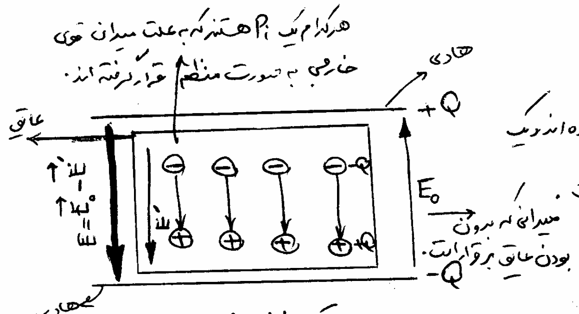
بار مقید دو نوع است: $\begin{cases} \rho_b \text{ - بار مقید با چگالی} \\ \rho_{sb} \text{ - بار سطحی مقید با چگالی} \end{cases}$

بردار سطح

$$\Leftarrow \boxed{\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a_n}}$$

* اگر جمع P_i ها را در بردار سطح ضرب کنیم، ρ_{sb} بدست می‌آید.

توضیحات بیشتر:



(یک خازن)

Q = بارهایی است که روی سطح عایق آمده اند و یک بار سطحی با چگالی ρ_{sb} تشکیل شده است.

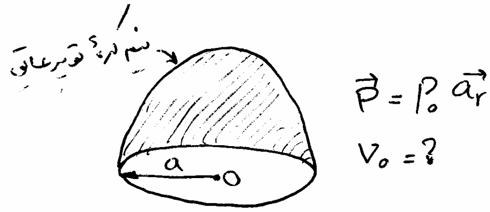
$\Leftarrow$ هرچه E قوی‌تر باشد، $\vec{P}$ هم قوی‌تر خواهد بود.

$$\vec{P} \triangleq \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \chi_e = \varepsilon_r - 1$$

$$\boxed{\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}}$$

* $\vec{P}$ برای هوا، صفر است و هوا تنها عایقی است که پلاریزاسیون آن صفر است.

* بررسی یک تست ارشد:



$$\vec{P} = \rho_0 \vec{a}_r$$

$$V_0 = ?$$

۱) $V_0 = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon}$

۲) $V_0 = \frac{-\rho_0 a}{2\varepsilon}$

۳) $V_0 = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon}$

۴) $V_0 = \frac{-\rho_0 a}{\varepsilon}$

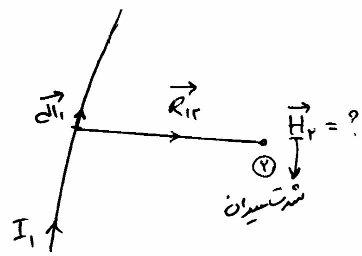
$$\rho_b = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{2\rho_0}{r} \longleftarrow$$ فقط برای r را در نظر می‌گیریم.

$$\rho_{sb} = \vec{P} \cdot \vec{a}_r = \rho_0$$

$$V_0 = \iint \frac{\rho_{sb}\, ds}{4\pi\varepsilon_0 R} + \iiint \frac{\rho_s\, dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

ρ_{sb} و ρ_b $\xrightarrow[\text{و انتگرال گیری}]{\text{جایگذاری}}$ $= -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon}$

* فصل ۸ - میدان مغناطیسی ناشی از جریان یکنواخت :



طبق قانون بیوساوار :

$$d\vec{H_2} = \frac{I_1 \vec{dl_1}}{4\pi R_{12}^2} \times \vec{a_{12}}$$

$$\Rightarrow \vec{H_2} = \int dH_2$$

چون

$$I\vec{dl} = \vec{K} ds = \vec{J} dv$$

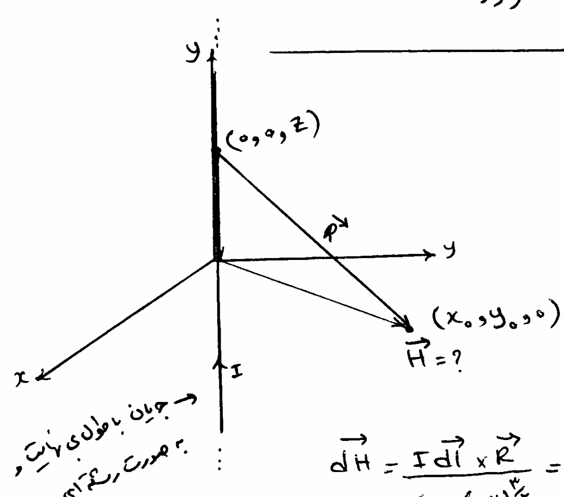
$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{K} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} ds \qquad \text{بردار جریان } \vec{K}$$

$$\Rightarrow d\vec{H} = \frac{\vec{J} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} dv \qquad \text{بردار جریان } \vec{J}$$

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} ds$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a_R}}{4\pi R^2} dv$$

مثال :



$$\vec{R} = -z\vec{a_z} + \rho \vec{a_\rho}$$

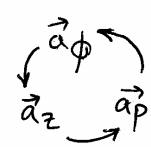
که

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

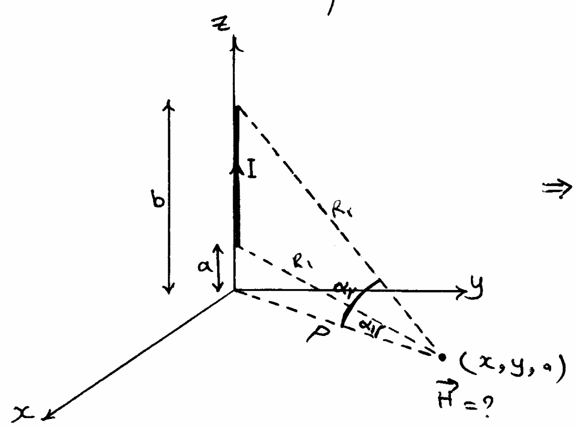
$$\vec{dl} = dz\,\vec{a_z}$$

$$d\vec{H} = \frac{I\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I dz \vec{a_z} \times (-z\vec{a_z} + \rho \vec{a_\rho})}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{I dz (\rho\, \vec{a_\phi})}{4\pi (z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I(\rho \vec{a}_\phi)}{4\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\frac{2}{\rho^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$



* بررسی مثال قبل برای طول محدود :

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{a}_\phi$$

$$\frac{b}{R_2} - \frac{a}{R_1} \rightarrow R_1 R_2 \simeq R^2$$

$$\vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

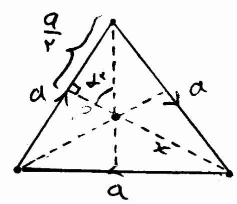
$$d\vec{l} = dz\,\vec{a}_z$$

اثبات : $\vec{H} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\int_a^b \frac{dz}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I(\rho\vec{a}_\phi)}{4\pi}\left\{\frac{z}{\rho^2\sqrt{z^2+\rho^2}}\right\}_a^b$

$$= \frac{I(\vec{a}_\phi)}{\rho 4\pi}\left\{\underbrace{\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_2} - \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}}}_{\sin\alpha_1}\right\}$$

* بررسی یک تست ارشد :

هادی فیلامانی به صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است . طول هر ضلع این مثلث برابر با یک متر $(a=1^m)$ و جریان $I=1^A$ در این فیلامان روان است. مطلوبست محاسبهٔ $|\vec{H}|$ در مرکز مثلث .

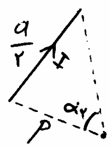


۱) $0/72\ \frac{A}{m}$ ۲) $1/18\ \frac{A}{m}$

۳) $1/43\ \frac{A}{m}$ ۴) $2/36\ \frac{A}{m}$

$a = 1^m$

$I = 1^A$



$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 60$

$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

* ابتدا میدان مغناطیسی را برای نیمی از یک ضلع می یابیم و سپس در ۶ ضرب می کنیم.

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{6} \times 1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{3}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = 6\vec{H}_1 = \frac{6 \times 3}{4\pi} = \frac{18}{4\pi}$$

* راه ساده‌تر این بود که مثلث را به ۳ قسمت تبدیل کنیم و در آخر در ۳ ضرب می کردیم.

← طبق قانون دست راست، در مرکز تمامی میدان‌ها با هم جمع می‌شوند.

* قانون مداری آمپر:

محدودیت‌های قانون آمپر:
- مسیر همواره باید به صورت مستقیم باشد (اگر نبود باید به تکه‌های مستقیم و چند تکه تقسیم کنیم).
- طول سیم نسبت به فاصله باید زیاد باشد.

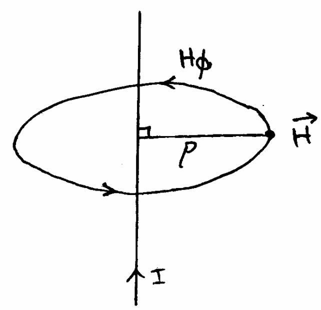
$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{enc}$$

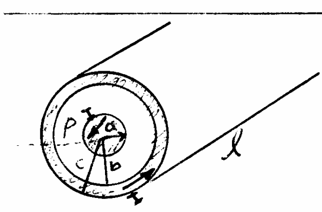
$$\Rightarrow \oint H_\phi \cancel{\vec{a}_\phi} \cdot \rho d\phi \cancel{\vec{a}_\phi} = I$$

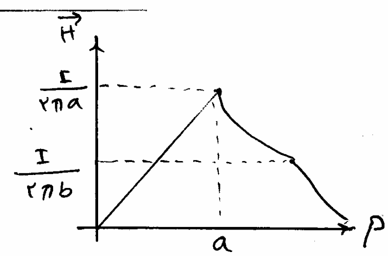
$$\Rightarrow H_\phi(\rho) \oint d\phi = I_{enc}$$

$$H_\phi = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I_{enc}}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

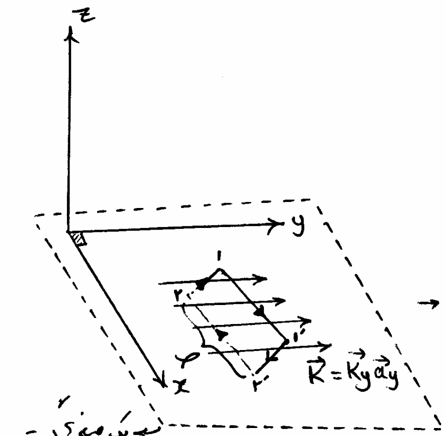






صفحه ۱۱۳
(در کتاب خوانده شود)

۵۲



یک صفحه گسترده در افق xy

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc}$$

$$\rightarrow \int_{1}^{1'} + \int_{1'}^{2'}\Big|_{H_z=0} + \int_{2'}^{2} + \int_{2}^{1}\Big|_{H_z=0} = I_{enc}$$

$$\Rightarrow H_{x_1} l + H_{x_2}(-l) = K_y l$$

$$H_{x_2} \equiv H_{x_1}$$

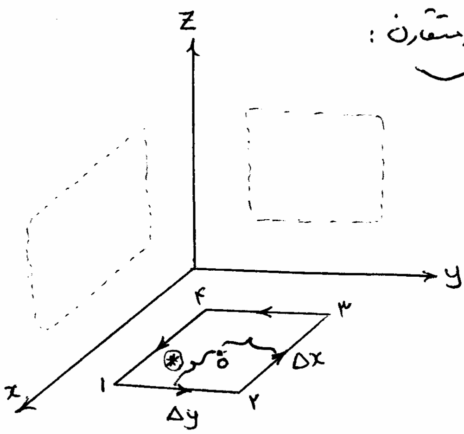
$$\Rightarrow 2H_{x_1} l = K_y l$$

$$H_{x_1} = \frac{1}{2} K_y$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K}\times\vec{a_n}}$$

بردار عمود بر سطح

* کرل (curl): کاربرد آمپر برای مسیرهای غیر متقارن:



$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc}$$

$$\vec{H_0} = H_{x_0}\vec{a_x} + H_{y_0}\vec{a_y} + H_{z_0}\vec{a_z}$$

$$\int_{1}^{2} + \int_{2}^{3} + \int_{3}^{4} + \int_{4}^{1} = I_{enc}$$

$$\int_{1}^{2}\vec{H}\cdot\vec{dl} = \vec{H}\cdot\vec{\Delta L}_{1-2} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(\left(H_{y_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!}\frac{\partial H_y}{\partial x} + \cdots\right)\cancel{\vec{a_y}}\right)\cdot \Delta y\,\cancel{\vec{a_y}}$$

زمانی می‌توان این کار را کرد که مسیرها کوتاه باشند.

نسبت به x تغییر دارد ⊛

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(H_{y_0} + \frac{\Delta x}{2}\;\frac{\partial H_y}{2}\;\frac{\partial H_y}{\partial x} + (\cdots)\right)\Delta y$$

برای حذف این قسمت‌ها از سطح استفاده شده است.

$$\int_{2}^{3} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \vec{H}\cdot\Delta L_{2-3} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(\left(Hx_0 + \frac{\frac{\Delta y}{2}}{1!}\frac{\partial Hx}{\partial y} + \cdots\right)\vec{a_x}\right)\cdot\left(-\Delta x\,\vec{a_x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(-Hx_0 - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial Hx}{\partial y} + \cdots\right)\Delta x$$

$$\int_{3}^{4} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \vec{H}\cdot\vec{\Delta L}_{3-4} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(\left(Hy_0 + \frac{\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{1!}\frac{\partial Hy}{\partial x} + \cdots\right)\vec{a_y}\right)\cdot\left(-\Delta y\,\vec{a_y}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(-Hy_0 + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial Hy}{\partial x} + \cdots\right)\Delta y$$

$$\int_{4}^{1} \cdots \xrightarrow{\text{ادامه}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\left(\frac{\partial Hy}{\partial x} - \frac{\partial Hx}{\partial y} + \cancel{\cdots}\right)\Delta x\,\Delta y = I_{enc}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Hy}{\partial x} - \frac{\partial Hx}{\partial y} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{I_{enc}}{\Delta x\,\Delta y} = J_z$$

تعمیم مسئله:

$$\frac{\partial Hz}{\partial y} - \frac{\partial Hy}{\partial z} = Jx$$

$$\frac{\partial Hx}{\partial z} - \frac{\partial Hz}{\partial x} = Jy$$

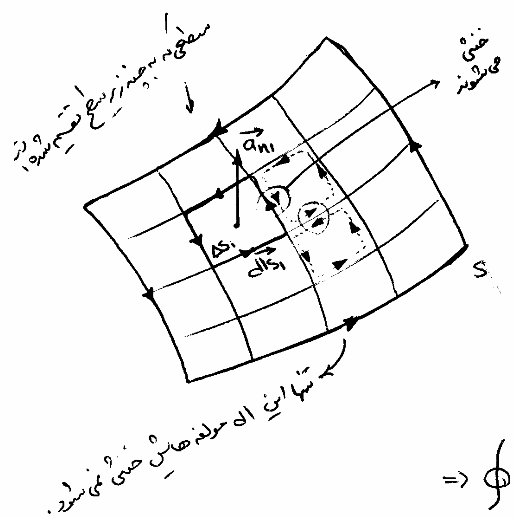
$$\vec{J} = J_x\vec{a_x} + J_y\vec{a_y} + J_z\vec{a_z} \leftarrow \text{در حالت کلی}$$

$$\vec{H} = H_x \vec{a_x} + H_y \vec{a_y} + H_z \vec{a_z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a_x} & \vec{a_y} & \vec{a_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a_x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \cdots \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$$

قانون آمپر یا قانون سوم ماکسول



* قضیهٔ استوکس : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$

$\vec{dl}_{\Delta s}$: مسیری که Δs را احاطه کند.

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1}}{\Delta s_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)_{n_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \cdot \vec{a_{n_1}}$$

I

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot \vec{dl}_{\Delta s_1} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \cdot \Delta s_1 a_{n_1} \quad \vec{\Delta s_1}$$

- از جمع کردن dl ها، برخی از جملات با معادل‌های خود حذف می‌شوند. در نتیجه :

$$\vec{I} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)}_{\vec{J}} \cdot \vec{ds}$$

$$I = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

$$I_{enc} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} \qquad \text{آمپر}$$

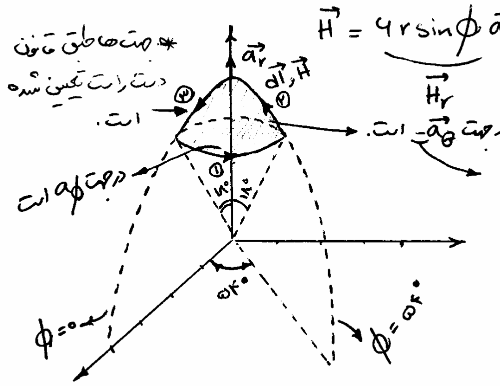
* در مورد توابع sin و cos اگر بخواهیم dl بگیریم، باید دورهٔ تناوب 2π باشد. (اگر 4π بود، ۲ بار می‌گیریم ...)

** تمرین :

مطلوبست بررسی دو طرف قضیهٔ استوکس برای

$$\vec{H} = \underbrace{6 r \sin\phi\, \vec{a}_r}_{\vec{H}_r} + \underbrace{18 r \sin\theta \cos\phi\, \vec{a}_\phi}_{\vec{H}_\phi}$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ 0 \le \theta \le \underset{18^\circ}{0.1\pi} \\ 0 \le \phi \le \underset{54^\circ}{0.3\pi} \end{cases}$$



این منفی در حدود انتگرال اثر می‌کند که به جای اینکه از ۰ تا به پایین حرکت کنیم، از پایین به بالا حرکت می‌کنیم تا $-a_\theta$ ، $-(-a_\theta)$ شود و - حذف شود.

چون مولفهٔ $\vec{H}_\theta$ نداریم.

طرف اول :

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{①} \vec{H}\cdot \underbrace{d\vec{l}}_{r\sin\theta\, d\phi\, \vec{a}_\phi} + \cancel{\int_{②} \vec{H}\cdot \underbrace{d\vec{l}}_{r\,d\theta\, \vec{a}_\theta}} + \cancel{\int_{③} \vec{H}\cdot \underbrace{d\vec{l}}_{r\,d\theta\, \vec{a}_\theta}}$$

$$= \int H_\phi\, r \sin\theta\, d\phi = \int (18 r \sin\theta \cos\phi)\, r \sin\theta\, d\phi$$

$$= 18 \underbrace{r^2}_{4} \sin^2 \underbrace{\theta}_{0.1\pi} \int_0^{0.3\pi} \cos\phi\, d\phi = 22.2^{A}$$

طرف دوم :

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec{a}_r}$$

پس تنها مولفهٔ a_r کرل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi \sin\theta) - \cancel{\frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}}\right]\vec{a}_r + \cdots$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\, \frac{\partial}{\partial\theta}\left(18 r \sin^2\theta \cos\phi\right)\vec{a}_r$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(36\, r \sin\theta \cos\theta \cos\phi\right)\vec{a}_r = 36 \cos\theta \cos\phi\, \vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \iint 36\cos\theta\cos\phi\, \cancel{\vec{a}_r} \cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \cancel{\vec{a}_r}$$

$$= 36 r^2 \int_0^{0.1\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{0.3\pi} \cos\phi\, d\phi = 22.2^{A}$$

* مسئله‌های ۲۶ تا ۲۸ از هیت حل شود (۲۸ و ۲۷ و ۲۵ مهم).

* پتانسیل مغناطیسی اسکالر:

یادآوری:

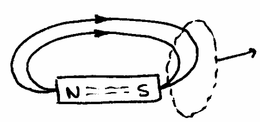
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V_m) = 0$$

مغناطیس

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{B} \triangleq \mu_0 \vec{H} \rightarrow \varphi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

چگالی شار مغناطیسی



سطح گوسی فرضی

$$\Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dv = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

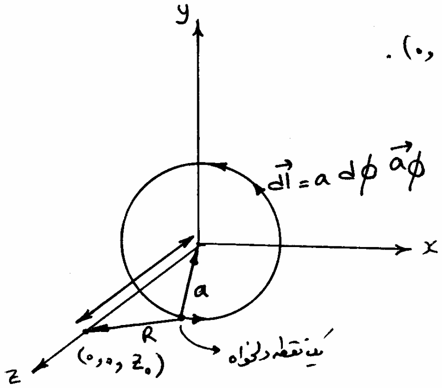
طبق قانون گوس

طبق قضیهٔ دیورژانس

قانون گوس در مغناطیس

مثال از چنگ :

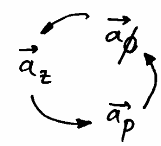
مطلوبست چگالی شار مغناطیسی میدان مغناطیسی در نقطهٔ $(0,0,z_0)$.



- از قانون بیوساوار استفاده می‌کنیم:

$$\vec{dB} = \mu_0 \left(\frac{I\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{3/2}} \right)$$

$$\vec{R} = -a\vec{a}_\rho + z_0 \vec{a}_z$$



$$\rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 I a\,d\phi\, a_\phi \times \left(-a\vec{a}_\rho + z_0 \vec{a}_z\right)}{4\pi \left(a^2 + z_0^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a\,d\phi \left(+a\vec{a}_z + \cancel{z_0 \vec{a}_\rho}\right)}{4\pi \left(a^2 + z_0^2\right)^{3/2}}$$

به علت تقارن

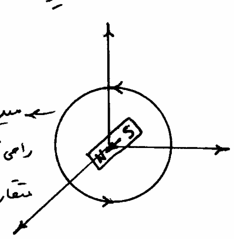
تقارن را بررسی می‌کنیم.

میدان های نیم دایرهٔ سمت راست ، میدان‌های نیم دایرهٔ چپ را خنثی می‌کنند و فقط میدان‌های ناشی از جمع میدان ها در مرکز که به سمت a_z اشاره دارند ، باقی می‌مانند و باهم جمع می‌شوند .

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a \left(a\vec{a}_z\right)}{4\pi \left(a^2 + z_0^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I a^2 \vec{a}_z}{2\left(a^2 + z_0^2\right)^{3/2}}$$

$$\text{if } z=0 \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{\underbrace{2a}_{\text{قطر دایره}}} = \mu_0 \underbrace{\frac{I}{D}\vec{a}_z}_{\vec{H}}$$

← نتیجه : میدان مغناطیسی در مرکز دایره یک میدان یکنواخت است و جهت آن به سمت بیرون است .



← میدان معادل یک حلقهٔ سیم را می‌توان با یک آهن ربای متقارن معادل گذاری کنیم .

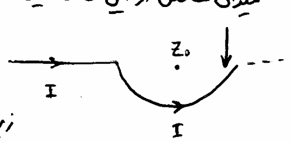
← نتیجه : هر حلقهٔ جریان مانند یک آهن ربا عمل می‌کند و برعکس .

* نکته :

سیم های مستقیم در راستای خودشان میدانی تولید نمی کنند.

میدان حاصل از این نصف میدان دایره کامل است یعنی:

$$\vec{H} = \left(\frac{I}{D}\vec{a}_z\right)\frac{1}{2}$$



زیرا $\frac{1}{2}$ محیط کل را در بر گرفته است.

$$d\vec{H} = \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

طبق بیوساوار

چون هم راستا هستند و دو بردار هم جهت تولید می شود، در ضرب خارجی صفر خواهد شد.

---

* در یک ناحیه بدون جریان الکتریکی (مثلاً در داخل یک آهن ربا)، $J=0$ بوده پس:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

پس چگالی B بدون کرل بوده یعنی قابل بیان به صورت گرادیان یک میدان عددی است:

$$\vec{B} \triangleq -\mu_0 \vec{\nabla} V_m \quad \text{یا} \quad \vec{H} = -\vec{\nabla} V_m$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$
$$\vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V$$

* گرچه بارهای مغناطیسی مجزا وجود ندارند، ولی مثلاً با مشاهده مسیر براده های آهن در اطراف یک آهن ربا می توان چنان تصور کرد که:

قطب های شمال و جنوب (N و S) به ترتیب محل استقرار بارهای مغناطیسی + و - هستند.

پس میدان داخل آهن ربا ناشی از یک پتانسیل اسکالر است و به همین دلیل بدون جریان، میدان وجود دارد.

* اما نکته ای که می توان به آن اشاره کرد آن است که گرچه پتانسیل مغناطیسی اسکالر بسیار شبیه به پتانسیل الکتریکی اسکالری باشد، اما با آن تفاوت های مهم دارد. مهمترین تفاوت آن است که تابع اسکالر V_m تابعی تک مقدار نیست، در حالی که پتانسیل الکتریکی تابعی تک مقدار است.

برای مطالعه بیشتر به صفحه ۱۳۲ کتاب مراجعه شود.

* پتانسیل مغناطیسی برداری:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \longrightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\underbrace{\vec{A}}_{\text{پتانسیل مغناطیسی برداری}}$$

$$\Rightarrow d\vec{B}=\vec{\nabla}\times d\vec{A}$$

طبق بیوساوار

$$\frac{\mu_0 I d\vec{l}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2} \qquad\qquad \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

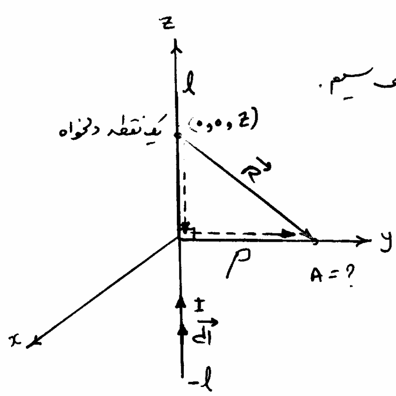
$$d\vec{A}=\frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R} \rightarrow \vec{A}=\int\frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi R}$$

A برداری است که در جهت جریان تولید می‌شود، اما مقدار آن ضعیف‌تر است. یعنی A نسخهٔ ضعیف‌شده‌ای از I خواهد بود. همین طور می‌توان گفت:

$$\vec{A}=\iint\frac{\mu_0\vec{K}ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A}=\iiint\frac{\mu_0\vec{J}dv}{4\pi R}$$

*** مثال از چنگ



مطلوبست چگالی مغناطیسی B در نقطه‌ای به فاصلهٔ ρ روی عمود منصف سیم.

الف) با استفاده از محاسبهٔ بردار A و سپس تعیین B

ب) با کاربرد مستقیم بیوساوار در مورد B

$$\vec{R} = -z\vec{a}_z + \rho\vec{a}_\rho$$

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R_{\vec{dl}}}$$

$$= \int \frac{\mu_0 I \overbrace{dz\,\vec{a}_z}}{4\pi\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dz}{\sqrt{z^2+\rho^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I \vec{a}_z}{4\pi} \operatorname{Ln}\left\{\frac{z+\sqrt{\rho^2+z^2}}{\rho}\right\}_{-l}^{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}+L}{\sqrt{\rho^2+L^2}-L}\,\vec{a}_z$$

برای محاسبه B مشتق از کرل را به کار می‌بریم که در جهت z باشد.

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \underset{\text{در استوانه ای}}{=\!=\!=} \vec{\nabla}\times(A_z\vec{a}_z) = \frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial\phi}}\,\vec{a}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\,\vec{a}_\phi$$

چون A تابعی از ρ است و مشتق نسبت به ϕ صفر می‌شود.

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi\rho\sqrt{l^2+\rho^2}}\,\vec{a}_\phi$$

$$\text{if} \quad L\to\infty \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\vec{a}_\phi}$$

همانند قانون بیوساوار ← برای سیم با طول بی‌نهایت.

$$\vec{dl} = dz\,\vec{a}_z \quad , \quad \vec{R} = \rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}\times\vec{R}}{4\pi(R^2)^{3/2}} \rightarrow \vec{B} = \int_{-l}^{l}\frac{\mu_0 I\,dz\,\vec{a}_z\times(\rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z)}{4\pi(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I\rho\vec{a}_\phi}{4\pi}\left(\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)_{-l}^{l} = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi}\left(\frac{l}{\rho^2\sqrt{\rho^2+l^2}}\right)\vec{a}_\phi$$

* فصل نهم: نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی:

معادله نیروی لورنس $\rightarrow$ $\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$ $\leftarrow$ بیانگر این است که به یک ذره‌ی Q هم نیروی مغناطیسی وارد می‌شود و هم الکتریکی. نیروی مغناطیسی هم با این شرط وارد می‌شود که ذره دارای سرعت باشد.

$$\vec{F} = Q\vec{V} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = dQ\,\vec{V} \times \vec{B} = \rho_v \vec{V} \times \vec{B}\,dv = \vec{J} \times \vec{B}\,dv$$

$$dQ = \rho_v\,dv$$

$$\vec{J} = \rho_v \vec{V}$$

چون $\vec{J}dv = \vec{K}ds \equiv I\vec{dl}$

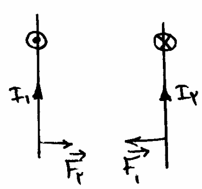
پس:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{میدان خارجی}}\,dv$$

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B}\,ds$$

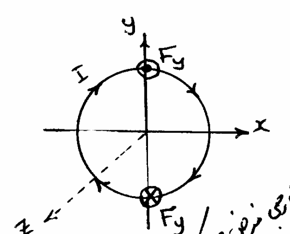
$$d\vec{F} = I\vec{dl} \times \vec{B}$$

مثال:



انگشتان دست راست در جهت جریان، کف دست میدان، شست جهت نیرو را نشان می‌دهد.

- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقه‌ی جریان:



$$\vec{B} = \underbrace{B_x\vec{a_x} + B_y\vec{a_y}}_{B_{\parallel}} + \underbrace{B_z\vec{a_z}}_{B_{\perp}}$$

یک میدان خارجی فرض می‌کنیم.

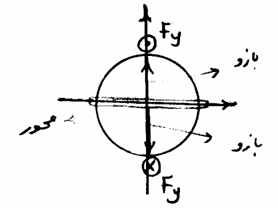
$B_{\parallel}$ موازی (چون حلقه موازی محور x و y است).

$B_{\perp}$ عمود (چون حلقه عمود بر محور z است).

در این شکل، این قسمت نیروی به حلقه در سمت فشرده شدن وارد می‌کند، که اگر جهت جریان برعکس بود، نیرو در جهت گشاد شدن حلقه ایجاد می‌شود.

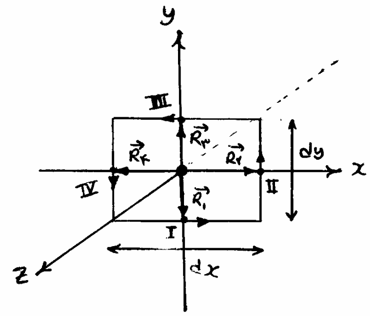
F_y برای نیمه بالایی به سمت بیرون است و برای نیمه پایینی به سمت داخل است. بنابراین برآیند F_y ها خنثی و صفر می‌شود (x ها هم به همین ترتیب).

$\Leftarrow$ برآیند نیروهای وارد بر یک حلقه برابر صفر است.



- در حالت گشتاور، چون شمت بالا به سمت بیرون و قسمت پائین به سمت درون است، پس همدیگر را تقویت کنند و حلقه به تمایل حول محور دارد.

⇐ گشتاورها همدیگر را تقویت می‌کنند.



- نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی وارد بر حلقهٔ مستطیلی جریان:

$$\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$$

چون عنصر دیفرانسیلی است، می‌توان وسط‌های اضلاع را به عنوان شاخص در نظر گرفت و محور حلقه به یک نقطه خواهد بود، محور در نظر گرفته و فاصلهٔ وسط هر ضلع تا محور را بازو فرض می‌کنیم.

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

نیروی وارد بر ضلع I $\quad d\vec{F}_1 = I\,d\vec{l}_I \times \vec{B} = I\,dx\,\vec{a}_x \times (B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z)$

$$d\vec{\tau} = \vec{R} \times d\vec{F} \qquad \rightarrow \quad d\vec{F}_I = I\,dx\,(B_y \vec{a}_z - B_z \vec{a}_y)$$

بازوی گشتاور

$$d\vec{\tau}_1 = -\frac{1}{2}\,dy\,\vec{a}_y \times \left(I\,dx\,(B_y \vec{a}_z - B_z \vec{a}_y)\right) = -\frac{1}{2} I B_y\,dx\,dy\,\vec{a}_x$$

* نیروهایی که مستقیماً وارد محور می‌شوند، اثری در گشتاور نخواهند داشت.
* اگر انگشتان دست راست در جهت گشتاور باشد، کف دست در جهت نیرو، شست شاخص گشتاور را نشان می‌دهد.

(محوری که نسبت به آن دوران می‌کند.)

$$d\vec{F}_{II} = I\,d\vec{l}_{II} \times \vec{B} = I\,dy\,\vec{a}_y \times (B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z)$$

$$= I\,dy\,(-B_x \vec{a}_z + B_z \vec{a}_x)$$

$$d\vec{\tau}_{II} = \frac{1}{2}\,dx\,\vec{a}_x \times I\,dy\,(-B_x \vec{a}_z + B_z \vec{a}_x)$$

$$= \frac{1}{2} I\,dx\,dy\,B_x \vec{a}_y$$

شست را در جهت a_y می‌گذاریم، پس دوران به سمت داخل است.

$$d\vec{T}_{III} = d\vec{T}_{I}$$

$$d\vec{T}_{IV} = d\vec{T}_{II} \Rightarrow d\vec{T} = I \underbrace{dx\, dy}_{ds_z} \underbrace{\left(B_x \vec{a}_y - B_y \vec{a}_x \right)}_{\vec{a}_z \times \vec{B}}$$

$$\Rightarrow d\vec{T} = \underbrace{I\, d\vec{s}}_{} \times \vec{B} \rightarrow \vec{T} = I\vec{S} \times \vec{B}$$

$\vec{dm}$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\boxed{\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}}$

قرارداد { تولیدکننده‌ی گشتاور با ① شماره‌گذاری می‌شود. تولیدکننده‌ی دوران با ② شماره‌گذاری می‌شود.

* گشتاور نیرو یا عاملی است که باعث دوران نیرو حول یک محور می‌شود.

برای محاسبه گشتاور نیروی وارد بر عنصر جریان شماره‌ی ۲ در اثر میدان ناشی از جریان شماره‌ی ۱ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- به کمک قانون بیوساوار (یا آمپر)، $\vec{B}_1$ را (نهایتاً $(d\vec{B}_1)$ ، $d\vec{w}_1$) که توسط جریان شماره‌ی ۱ در نقطه‌ی دلخواهی از عنصر شماره‌ی ۲ ایجاد می‌شود را محاسبه می‌کنیم.

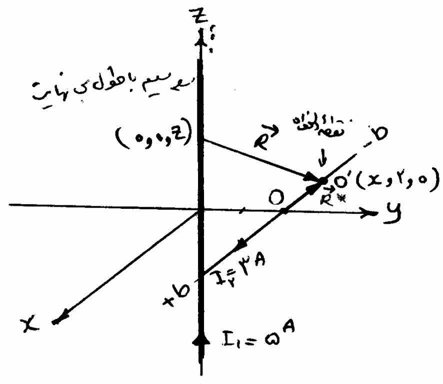
۲- توسط فرمول $d\vec{F} = \begin{cases} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \\ \vec{K}_2 \times \vec{B}_1 ds_2 \\ \vec{J}_2 \times \vec{B}_1 dv_2 \end{cases}$ را تشکیل می‌دهیم.

۳- $F = \cancel{\int d\vec{F}}$ ← راه اشتباه و مردود است.

۳- با استفاده از فرمول $d\vec{T} = \vec{R} \times d\vec{F}$ ، dT را تشکیل می‌دهیم.

۴- با فرمول $\int_{\text{حدود ابعاد عنصر شماره‌ی ②}} d\vec{T}$ یعنی $\vec{T} = \int \vec{R} \times d\vec{F}$ نهایتاً $\vec{T}$ محاسبه می‌شود.

مثال $\frac{۱۵-۹}{\text{صفحه ۱۵۰}}$



$$O(0,2,0) \Rightarrow \vec{\tau} = ?$$

مرحله ①:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{a}_R = \frac{\mu_0 I_1 \vec{R}}{2\pi R^2}$$

تولیدکننده شار (شماره ۱) موازی هر محوری باشد، آن را در نظر نمی‌گیریم که در اینجا z است. $\longrightarrow \vec{R} = +x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0(5)(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)}$$

مرحله ②:

پس تولیدکننده دوران از نوع سیم (L) است $\Rightarrow$

$$d\vec{F} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = 3dx\vec{a}_x \times \frac{5\mu_0(x\vec{a}_x + 2\vec{a}_y)}{2\pi(4+x^2)}$$

$$= \frac{15\mu_0\, dx\, \vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

مرحله ③:

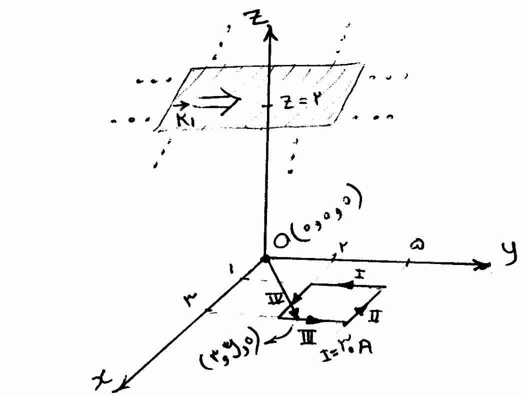
$$d\vec{\tau} = \vec{R}^* \times d\vec{F} = x\vec{a}_x \times \frac{15\mu_0\, dx\, \vec{a}_z}{\pi(4+x^2)}$$

$$= \frac{-15x\cancel{\mu_0}\, dx\, \vec{a}_y}{\pi(4+x^2)} \quad (\mu_0 = 4\pi\times10^{-7})$$

$$= \frac{-6\times10^{-6}\, x\, dx\, \vec{a}_y}{4+x^2} \xRightarrow{\text{مرحله ④}} \vec{\tau} = -6\times10^{-6}\vec{a}_y\int_{-b}^{b}\frac{x\,dx}{4+x^2}$$

* در این مثال اگر یک حلقه مستطیلی بوده باید برای هر ضلع تک تک محاسبه می‌کردیم.

مثال $\frac{۱۴-۹}{\text{صفحه } ۱۰۰}$



صفحه ۲ $\vec{K}_1 = 400\,\vec{a}_y$, $z=2$

صفحه ۰ $\vec{K}_2 = 300\,\vec{a}_z$, $y=0$

تنها گشتاور حاصل از $Z=2$ محاسبه شده است : (در مبدأ)

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K} \times \vec{a}_n$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{1}{2}\left(400\,\vec{a}_y\right) \times \left(-\vec{a}_z\right) = -200\,\mu_0 \vec{a}_x$$

$$d\vec{F}_x = 30\,dy\,\vec{a}_y \times \left(-200\,\mu_0 \vec{a}_x\right) = \mu_0\, 600\;\; dy\,\vec{a}_z$$

$$d\vec{\tau}_I = \left(3\vec{a}_x + y\vec{a}_y\right) \times \mu_0 6000\,dy\,\vec{a}_z = \mu_0\left(-18000\,\vec{a}_y + 60\,y\,\vec{a}_x\right)dy$$

$$\vec{\tau}_I = -18000\,\vec{a}_y \int_1^3 dy + 6000\,\vec{a}_x \int_2^5 y\,dy = -54000\,\mu_0 \vec{a}_y + 6300\,\mu_0 \vec{a}_x$$

* مدارهای مغناطیسی :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc} = \underbrace{N}_{\text{تعداد دور}}I = V_m \qquad (KVL)$$

در مدار مغناطیسی

نیروی محرکهٔ مغناطیسی (mmf)

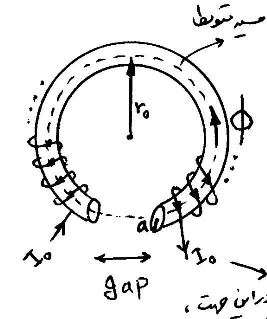
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,dv = 0 \;\Rightarrow\; \underbrace{\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0}_{} \qquad (KCL)$$

شار مغناطیسی خروجی از هر سطح بسته (کره)، صفر است .

$$V_m = R\,\phi$$

رلوکتانس (مقاومت مغناطیسی)

شار



شست در این جهت، چهار انگشت دست راست جهت میدان مغناطیسی یا ϕ را نشان می دهد.

- مثال از جنگ :

فرض کنید N دور سیم به دور یک هستهٔ چنبره ای از مادهٔ فرومغناطیس با نفوذپذیری μ پیچیده شده است. هسته دارای شعاع متوسط r_0، سطح مقطع دایره ای به شعاع a ($a \ll r_0$) و یک شکاف هوایی باریک با ضخامت L_g است. جریان I_0 از سیم می گذرد.

الف) چگالی شار مغناطیسی B_f در هستهٔ فرومغناطیس چقدر است؟

ب) H_f چقدر است؟ ج) H_g در شکاف هوا را تعیین کنید.

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{ds} \triangleq B.S \qquad \underbrace{\phi_f}_{\text{شار عبوری از هسته}} \simeq \overbrace{\phi_g}^{\text{شار عبوری از فاصله هوایی}} \Rightarrow B_f S_f = B_g S_g$$

$$\boxed{B_g = \frac{S_f}{S_g} B_f} \leftarrow S_g \neq S_f \text{ اگر}$$

$$B_g = \mu_0 H_g$$
$$B_f = \mu_0 \mu_r H_f$$
$$\Rightarrow \mu_0 H_g = \frac{S_f}{S_g}\mu_0\mu_r H_f \Rightarrow \boxed{H_g = \frac{S_f}{S_g}\mu_r H_f}$$

$$\begin{cases} B_g = B_f \\ H_g = \mu_r H_f \end{cases} \leftarrow S_g \simeq S_f \text{ اگر}$$

$$\text{KVL مغناطیسی} \rightarrow \oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = NI_0 \Rightarrow \int_f \vec{H}\cdot\vec{dl} + \int_g \vec{H}\cdot\vec{dl} = NI_0$$

$$\rightarrow H_f L_f + H_g L_g = NI_0$$

$$H_f(2\pi r_0 - L_g) + H_g L_g = NI_0$$

$$H_f(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g H_f = NI_0 \qquad \text{با فرض } S_g \simeq S_f$$

$$H_f = \frac{NI_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g} \Rightarrow B_f = \frac{\mu_0 \mu_r NI_0}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

$$\phi = \phi_f = \phi_g = B.S = \frac{\mu_0 \mu_r NI_0 S}{(2\pi r_0 - L_g) + \mu_r L_g}$$

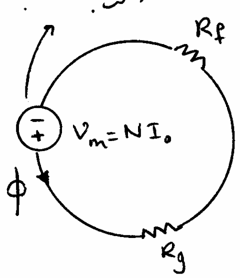
تقسیم بر $\mu_0 \mu_r S$ $\longrightarrow$

$$\phi = \frac{NI_0}{\dfrac{\overbrace{2\pi r_0}^{L_f} - L_g}{\underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\mu} S_f} + \dfrac{\mu_r L_g}{\mu_0 \mu_r S_g}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{NI_0}{\underbrace{\dfrac{L_f}{\mu S_f}}_{R_f} + \underbrace{\dfrac{L_g}{\mu_0 S_g}}_{R_g}}$$

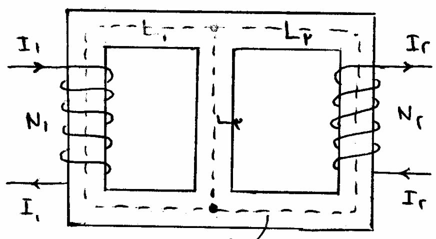
$$\Rightarrow \boxed{NI_0 = \phi (R_f + R_g)}$$

علامت + همیشه در جهت خروج شار است.

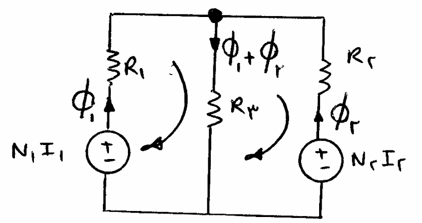


$$\sum_{i=1}^{n} R_i \phi = \sum_{j=1}^{m} N_j I_j \longrightarrow \text{KVL}$$

- مثال از جنگ :



یک مسیر بسته در نظر می‌گیریم.



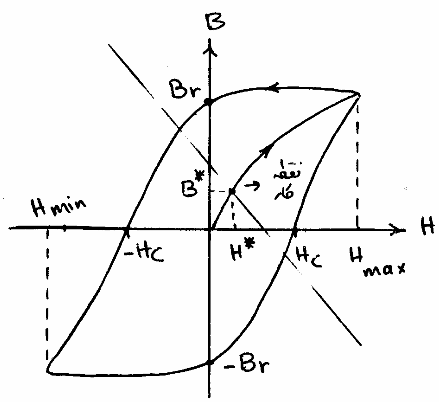
$KCL : \sum \phi_k = 0$ روی گره k ام

$$-N_1 I_1 + \phi_1 R_1 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0$$

$$-N_2 I_2 + R_2 \phi_2 + R_3(\phi_1+\phi_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \cdots \quad , \quad \phi_2 = \cdots$$

---

* هیسترزیس یا پس‌ماند :



خط $y = -ax + b$

$$H_f L_f + H_g L_g = N I_0$$

$$H_f L_f + \frac{B_g}{\mu_0} L_g = N I_0 \quad \Rightarrow \quad B_f = -\mu_0 \frac{L_f}{L_g} H_f + \frac{\mu_0}{L_g} N I_0$$

$$\Rightarrow H_f L_f + \frac{B_f}{\mu_0} L_g = N I_0 \quad \Rightarrow \quad B_f + \mu_0 \frac{L_f}{L_g} H_f = \frac{\mu_0}{L_g} N I_0$$

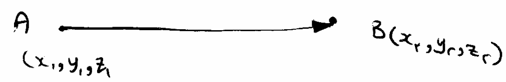
$$\boxed{\frac{B^*}{H^*} = \mu}$$

پایان

* خلاصه مطالب و فرمول های مهم :

همگرای = کرل

واگرای = دیورژانس

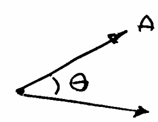


$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\vec{a}_z$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

جهت بردار A $\quad \vec{a}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$

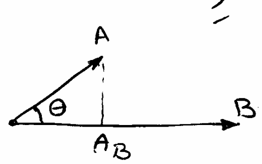
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} a_x \cdot a_y = 0 \\ a_y \cdot a_z = 0 \\ a_x \cdot a_z = 0 \end{matrix}$$

* کاربرد ضرب داخلی ، پیدا کردن سایه یک بردار بر روی بردار دیگر است.

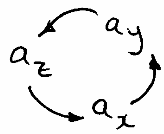


$$\cos\theta = \frac{\vec{A}_B}{\vec{A}} \Rightarrow A_B = A\cos\theta = A \cdot a_B$$

بردار = اندازه * جهت $\quad \Rightarrow \quad \vec{A}_B = (\vec{A} \cdot \vec{a}_B)\vec{a}_B$

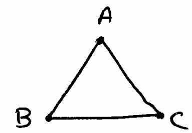
تصویر برداری A روی B

$$\vec{A} \times \vec{B} = \underbrace{|A||B|\sin\theta}_{\text{اندازه}} \; \underbrace{\vec{a_n}}_{\text{جهت}}$$



موافق = +

مخالف = -

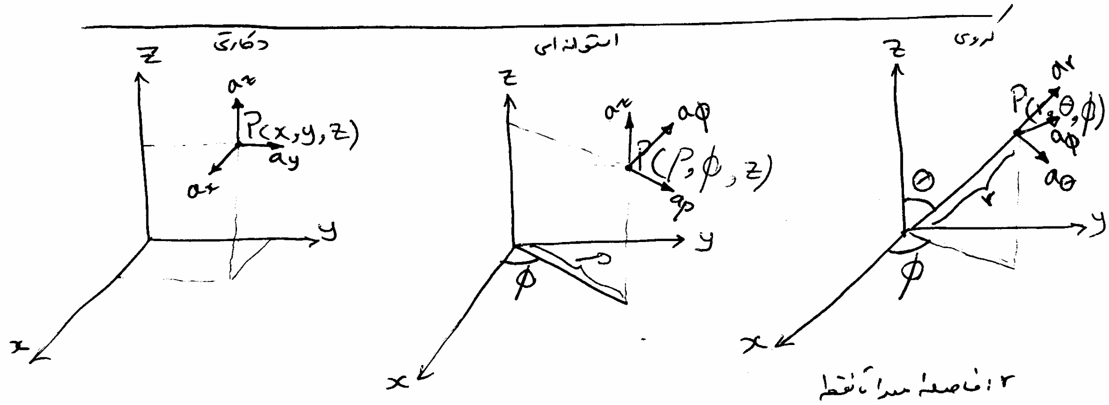


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \vec{BA} \times \vec{BC}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

* حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است.

* در ضرب داخلی دو بردار ، ابتدا بردار و مؤلفه را تعیین می کنیم و سپس با توجه به آن می توان جهات اضافی بردار بزرگتر را حذف نمود.



r : فاصله مبدا تا نقطه

θ : زاویه r با محور z

ϕ : زاویه در افق با محور x

* بردارهای پایه همواره در جهت افزایش اشاره می کنند.

دیفرانسیل های طول:

دیفرانسیل طول

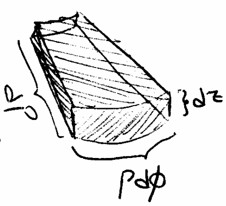
دکارتی $\rightarrow \vec{dl} = dx\,\vec{a_x} + dy\,\vec{a_y} + dz\,\vec{a_z}$ و المان حجم $dv = dx\,dy\,dz$

$$ds_x = dy\,dx \;\begin{cases} \nearrow ds_{x^+} = +dy\,dz\,\vec{a_x} \\ \searrow ds_{x^-} = -dy\,dz\,\vec{a_x} \end{cases}$$

$d\phi = \rho\,d\phi$

استوانه‌ای $\nearrow$

$$\vec{dl} = d\rho\,\vec{a_\rho} + \rho\,d\phi\,\vec{a_\phi} + dz\,\vec{a_z}$$

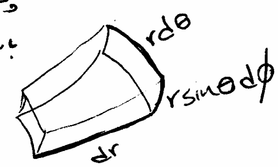


$$ds_\phi = d\rho \cdot dz \begin{cases} \vec{ds}_{\phi^+} = +d\rho\,dz \cdot \vec{a_\phi} \\ \vec{ds}_{\phi^-} = -d\rho\,dz \cdot \vec{a_\phi} \end{cases}$$

$$dv = d\rho\,\rho\,d\phi\,dz$$

$d\phi \rightarrow = r\sin\theta\,d\phi$ → چون ϕ در صفحه xy واقع است و باید به بالا منتقل شود.

$d\theta \rightarrow = r\,d\theta$



کروی $\rightarrow \vec{dl} = dr\,\vec{a_r} + r\,d\theta\,\vec{a_\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{a_\phi}$

بردار سطح

$$ds_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \;\begin{cases} \nearrow ds_{r^+} = +r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\vec{a_r} \\ \searrow ds_{r^-} = -r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\vec{a_r} \end{cases}$$

که برای به دست آوردن هر المان فضایی است دو تای دیگر را در سمت ds خود نظر ضرب کنیم

$$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$\cos = \dfrac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$

$\sin = \dfrac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

$\sec = \dfrac{1}{\cos}$

$\text{cosec} = \dfrac{1}{\sin}$

تبدیل ها:

استوانه ای به دکارتی
$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

دکارتی به استوانه ای
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

* مقدار صحیح زاویه ϕ با توجه به x و y تعیین می‌شود که در کدام ناحیه باشند.

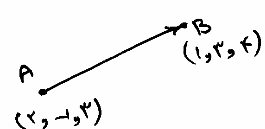
$$A_x = A \cdot a_x = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho \cdot \vec{a}_x}_{\cos\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi \cdot \vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z \cdot \vec{a}_x}_{0}$$

$$\cos(90+\phi) = -\sin\phi$$
$$\sin(90+\phi) = \cos\phi$$

$$A_y = A \cdot a_y = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho \cdot \vec{a}_y}_{\sin\phi} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi \cdot \vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)} + A_z \underbrace{\vec{a}_z \cdot \vec{a}_y}_{0}$$

$$A_z = A \cdot a_z = (A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z)$$
$$= A_\rho \underbrace{\vec{a}_\rho \cdot \vec{a}_z}_{0} + A_\phi \underbrace{\vec{a}_\phi \cdot \vec{a}_z}_{0} + A_z \underbrace{\vec{a}_z \cdot \vec{a}_z}_{1} \Rightarrow A_z = A_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$



* برای بدست آوردن تنها نقطه ابتدای بردار کافی است:

$$\phi = \tan\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

③

کروی به دکارتی

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

دکارتی به کروی

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$A_x = \vec{A}\cdot\vec{a}_x = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_x}_{\sin\theta\cos\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_x}_{\sin(90+\theta)\cos\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_x}_{\cos(90+\phi)}$$

$$A_y = \vec{A}\cdot\vec{a}_y = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_y}_{\sin\theta\sin\phi} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\theta)\sin\phi} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_y}_{\sin(90+\phi)}$$

$$A_z = \vec{A}\cdot\vec{a}_z = A_r\underbrace{\vec{a}_r\cdot\vec{a}_z}_{\cos\theta} + A_\theta\underbrace{\vec{a}_\theta\cdot\vec{a}_z}_{\cos(90+\theta)} + A_\phi\underbrace{\vec{a}_\phi\cdot\vec{a}_z}_{0}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^{9}$$

* برای به دست آوردن E_t در استوانه‌ای، ابتدا باید E_1، E_2 و ... به طور جداگانه به استوانه‌ای برده شود. سپس در استوانه‌ای با هم جمع شوند.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \vec{a}_{12}$$

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R_2} \vec{a}_R$$

شدت بار حاصل از چند بار نقطه‌ای

$$\longrightarrow \vec{E}_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{R_i^2} \vec{a}_{R_i}$$

اگر تعداد بارها به بی‌نهایت میل کند، یک بار پیوسته (توده‌ای) تشکیل می‌شود. در این حالت ناچار به استفاده از انتگرال هستیم.

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{|R|} \Longrightarrow \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$|R| = (R^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad 1+\frac{1}{2}$$

منصب در فرمول F

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}_{12}}{(R_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \vec{E}_i = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}_i}{|R_i^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{E}_t$ در بار پیوسته

$$\longrightarrow \int \underbrace{\frac{dQ_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\vec{dE}}$$

بار خطی $dQ = \rho_L \, dl$

بار سطحی $dQ = \rho_s \, ds$

بار حجمی $dr = \rho_r \, dr$

$$\Rightarrow E_t = \begin{cases} \iiint \frac{\rho_r \, dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \iint \frac{\rho_s \, ds}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

مراحل کار در مسائل شدت میدان الکتریکی :

۱ - تعیین نقطه شروع و انتها (انتها داده می‌شود و نقطه ابتدا نیز هر نقطه‌ای جز مبدأ می‌تواند باشد).

۲ - تشکیل کسر $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$

۳ - تشکیل dE $\qquad \vec{dE} = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴ - بررسی وجود تقارن که معمولاً باعث حذف یکی از قسمت‌های برداری می‌شود.

۵ - انجام عمل انتگرال‌گیری (مقادیر ثابت و یکنواخت از انتگرال بیرون می‌آیند)

* بار خطی نیز یک نوع بار استوانه‌ای است. * میدان الکتریکی بر سطح عمود است.

* در تعیین dQ (دیفرانسیل‌های dl ، ds و یا dv) دقت شود که این دیفرانسیل‌ها مربوط به بار هستند نه بردار فاصله تا بار. به عنوان مثال یک بار خطی که در روی محور z ها است، دارای $dl = dz$ می‌باشد. به عبارت دیگر dQ بیانگر تغییرات بار خطی یا سطحی و ... در جهت‌های مختلف است.

تکراری

* تقارنی که گفته شد، در قسمت $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ وجود خواهد داشت که مربوط به نوع بار است. مثلاً در یک بار خطی که روی محور z ها است، چون در یک فاصله متقارن و مساوی، بارهای که در سمت + و بارهای که در سمت − محور z ها قرار دارند، باهم برابرند. پس در $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ اگر قسمت z وجود داشته باشد حذف می‌شود. چون مولفه z میدان خنثی و صفر خواهد شد.

↑ این مسئله خود به خود با به دست آوردن R معلوم می‌شود.

یک مقدار ثابت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{x^2}$$

* اگر صفحه‌ای باردار (بار سطحی) در صفحه yz قرار داشته باشد، $(0, y, z)$ ، مولفه‌های dy و dz باقی می‌ماند یعنی

$$dQ = \rho_s\, ds = \rho_s\, dy\, dz$$

بیانگر این است که بار در کدام جهت‌ها قرار دارد.

حال اگر بخواهیم میدان را در نقطه‌ای دلخواه (x_0, y_0, z_0) اندازه بگیریم، مولفه‌های y و z میدان به دلیل تقارن صفحه در صفحه yz ، از فرمول $\dfrac{\vec{R}}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$ حذف خواهند شد.

قضیهٔ دیورژانس (نتیجه) $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$ (چگالی حجمی) و $D = \frac{\varphi_E}{S}$

شار الکتریکی عبوری از سطح

مساحت سطح

چگالی شار الکتریکی

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

دیورژانس هر بردار عددی ثابت است.

$$\vec{F} = F_1(x,y,z)\vec{a}_x + F_2(x,y,z)\vec{a}_y + F_3(x,y,z)\vec{a}_z$$

$$\Delta\varphi_E = D_S\,\Delta S\cos\theta = \vec{D}_S\cdot\vec{\Delta S}$$

شار عبوری از سطح ΔS

θ: زاویهٔ بین میدان و خط عمود بر سطح ،

شاری که از n تا ΔS می‌گذرد $= \sum_{i=1}^{n} \vec{D}_{S_i}\cdot\vec{\Delta S}_i$

$$n\to\infty \Rightarrow \varphi_E = \iint \vec{D}\cdot\vec{ds}$$

بردار عمود بر سطح

قانون گوس $\Rightarrow$ $\psi = Q_{enc}$

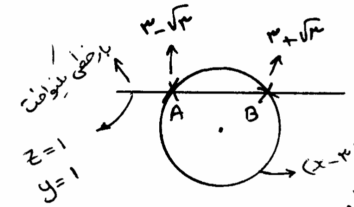
شار عبوری از یک سطح بسته

$$\Rightarrow \psi = \oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = Q_{enc}$$

$$\oiint \vec{D}\cdot\vec{ds} = \iiint \rho_v\,dv = Q_{enc}$$

حجمی که در سطح بسته احاطه شده است.

دیفرانسیل سطح کروی $= r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\;\vec{a}_r$



$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ کره‌ای به مرکز $(3,1,0)$ است.

* برای به دست آوردن طول AB ، باید معادلهٔ خط را با معادلهٔ دایره صدق دهیم (تقاطع دهیم).

$$\Rightarrow (x-3)^2+1=4$$

$$x-3=\pm\sqrt{3}$$

$$x=3\pm\sqrt{3}$$

* در اینجا نشان اگر بخواهیم بار درون کره و در نتیجه شار خروجی از آن را اندازه بگیریم ، $Q=\int \rho_L \, dl$ می‌شود که $dl=dx$ است چون در سمت y و z ثابت است.

---

* طبق قانون گوس در داخل اجسام رسانا و توپر میدان صفر است .

- معادلات ماکسول :
برای حالت استاتیک

دیورژانس به معنای واگرایی
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_v$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$ ← میدان مغناطیسی واگرایی ندارد

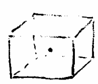
کرل به معنای همگرایی
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$ ← میدان الکتریکی همگرایی ندارد
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{D} = \underbrace{\frac{Q}{4\pi r^2}}\,\vec{a}_r$$

زیرا خط شار به طور متقارن به سمت بیرون نقطه امتداد دارند و از یک سطح کروی فرضی $4\pi r^2$ عبور می کنند

پس در فضای آزاد $\rightarrow$ $D = \varepsilon_0 E$

$$D = \int_{\text{حجم}} \frac{\rho_v\, dv}{4\pi R^2}\, a_R$$



کاربرد قانون گوس در عنصر دیفرانسیلی حجم :

$$\iint_{\text{جلو}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}_{\text{جلو}}\cdot\vec{\Delta s} = \left(\left(D_{x_0} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{1!}\;\frac{\partial D_x}{\partial t}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\underbrace{D_y\, D_z\, \vec{a}_x}_{\Delta s}$$

$$= \left(D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\;\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

$$\iint_{\text{پشت}} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \vec{D}\cdot\vec{\Delta s}_{\text{پشت}} = \left(\left(D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\;\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\vec{a}_x\right)\cdot\left(-\Delta y\,\Delta z\,\vec{a}_z\right)$$

البته در حالتی است که سطح بسیار کوچک باشد و گرنه به صورت محدود باید خارج شود.

$$= \left(-D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\;\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

$$\rightarrow \iint_{\text{جلو}} + \iint_{\text{پشت}} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta x$$

به همین ترتیب $\rightarrow$

$$\iint_{\text{راست}} + \iint_{\text{چپ}} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\,\underbrace{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}_{\Delta v}$$

$$\iint_{\text{بالا}} + \iint_{\text{پایین}} = \frac{\partial \Delta z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

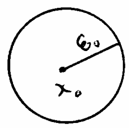
$$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = Q_{enc}$$

به دلیل اینکه D_x و ... به طور خطی با x و y و z تغییر می‌کنند، از مشتق جزئی استفاده شده است.

چگالی بار حجمی

$$\Rightarrow \frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta v} = \rho_v$$

بسط تیلور $\rightarrow$ $$f_{(x)} = f_{(x_0)} + \frac{\varepsilon}{1!} \left.\frac{\partial f_{(x)}}{\partial x}\right|_{x_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 f_{(x)}}{\partial x^2}\right|_{x_0} + \cdots}_{\text{اگر } \varepsilon \text{ به حد کافی کوچک باشد این قسمت‌ها حذف می‌شوند.}}$$



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a_z}$$

$$\vec{D} = D_x \vec{a_x} + D_y \vec{a_y} + D_z \vec{a_z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v} \ **$$

قضیه دیورژانس $$\Rightarrow \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint \rho_v \, dv = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv = Q_{enc} = \psi_e$$

در سایش قانون گوس بررسی شود:
- میدان با چه مختصاتی تغییر می‌کند (یا D تابع چه متغیری است)
- D چه مولفه‌هایی دارد

$$F = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

نیرو جابجایی

$$w_{AB} = \int_B^A dw \longrightarrow w_{AB} = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = E_P$$

کار لازم برای حرکت بار Q در میدان $\vec{E}$

انرژی پتانسیل

$$V_{AB} \triangleq \frac{w_{AB}}{Q}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

سطحی : $\vec{E} = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \rightarrow V_A - V_B = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}(y_B - y_A)$

بار خطی : $\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho} \rightarrow V_A - V_B = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\,Ln\,\dfrac{\rho_B}{\rho_A}$

در بار نقطه‌ای :

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

محاسبهٔ V وقتی به E دسترسی نداریم.

$$(V_B=0) \rightarrow V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}$$

در حالتی که E معلوم نباشد از اینها استفاده می‌شود

در حالت کلی‌تر $\rightarrow V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow dV = \dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$

خطی $dQ = \rho_L dl$

حجمی $dQ = \rho_v dv \rightarrow V = \int dV$

سطحی $dQ = \rho_s ds$

قضیه‌ها:
و قوانین

قضیهٔ دیورژانس $\rightarrow \quad \iint \vec{J}\cdot\vec{ds} = \iiint \nabla\cdot\vec{J}\, dv = I_{enc}$

قانون گوس $\rightarrow \quad \underset{\text{شار}}{\psi} = \oiint \vec{D_s}\cdot\vec{ds} = Q_{enc} = \iiint \rho_v\, dv$

انرژی یا پتانسیل الکتریکی $\quad W_E = \vec{E_P} = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon |E|^2\, dv$

$\left(\frac{dw_E}{dv} = \right.$ چگالی انرژی الکتریکی)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

قانون مداری آمپر $\rightarrow \quad \oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I_{enc}$

قانون آمپر $\rightarrow \quad \vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

گرادیان گرفتن از یک تابع، بردار عمود در جهت
افزایش بر سطح را خواهد داد.

$$\vec{J} = \underset{\text{هدایت ویژه}}{\sigma}\, \vec{E}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int K\, dy = \iint \vec{J}\cdot\vec{ds}$$

پلاریزاسیون $\quad P = (\varepsilon_R - 1)\,\varepsilon_0 \vec{E}$

قضیهٔ استوکس $\rightarrow \quad \oint H\cdot\vec{dl} = \int (\overbrace{\vec{\nabla}\times\vec{H}}^{\vec{J}})\cdot\vec{ds} = I_{enc}$

قانون بیوساوار $\rightarrow \quad d\vec{H} = \frac{I\, \vec{dl}}{4\pi R^2}\, \vec{a_R} = \frac{I\, dl \times \vec{R}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}}$

چگالی شار مغناطیسی $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\varphi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds}}_{\text{طبق گوس}} = \underbrace{\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv}_{\text{طبق دیورژانس}} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\vec{J} = \rho_v \underbrace{\vec{v}}_{\text{سرعت}}$$

$$\vec{D} = \rho_s \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

جهت D در هر نقطه همان جهت خطوط شار در آن نقطه است.

انواع بارها

$Q = \sum Q_n$ نقطه‌ای

$Q = \int \rho_L \, dL$ خطی

$Q = \int \rho_s \, ds$ سطحی

$Q = \iiint \rho_v \, dv$ حجمی

عمق نفوذ $\Rightarrow \delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

⑧

حجم کره $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$ ← مقاومت طولی سیم

$$R^* = \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi\sigma^* L}$$ ← مقاومت عرضی سیم

$$\text{ثابت زمانی} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

گشتاور دوقطبی ← $\vec{P} = Q\vec{d}$

$$\vec{F} = -Q\vec{E}$$

$$dw = \vec{F}\cdot dl = -Q\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

$$\to w_{AB} = \int_B^A dw = -Q\int_B^A \vec{E}\cdot\vec{dl} = \vec{E_p}$$

$$V_{AB} = \frac{w_{AB}}{Q}$$

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Longrightarrow V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$2w_E = Q\,(\underbrace{V_{12} + V_{13} + V_{14} + \cdots}_{V_1}) + Q_2\,(\underbrace{V_{21} + V_{23} + V_{24} + \cdots}_{V_2}) + \cdots$$

$$\to w_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = E_p$$

$$n \to \infty \qquad w_E = \frac{1}{2}\iiint \rho_v V\,dv = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 |E|^2 dv$$

طبق بیوساوار $\rightarrow$ $\vec{H} = \int \dfrac{I\,\vec{dl} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$

$$\vec{H} = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, ds = \iint \frac{\vec{K} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}$$

$$\vec{H} = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}\, dv = \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{4\pi (R)^{3/2}}\, dv$$

در ترم نداری
۱ ← تولید کننده گشتاور
۲ ← تولید کننده دوران

روش محاسبه گشتاور :

- تعیین $\vec{B}_1$ که توسط جریان شماره ۱ در نقطه ای دلخواه از عنصر ۲ ایجاد می شود.

- تشکیل $\vec{dF}$

$$\vec{dF} = \begin{cases} I_2 \vec{dl_2} \times \vec{B} \\ \vec{K_2} \times \vec{B}_1\, ds_1 \\ \vec{J}_2 \times \vec{B}_1\, dV_1 \end{cases}$$

→ اگر فقط نیرو خواسته شده بود ، از dF انتگرال می گیریم . در غیر این صورت مرحله بعد .

- تشکیل dT ← $dT = \underbrace{\vec{R}}_{\text{بازوی گشتاور}} \times dF$

- انتگرال گیری از dT

$$\vec{J}\,dv = K\,\vec{ds} = I\,\vec{dl} \quad , \quad \vec{J} = \rho_v \underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}}$$

معادله نیروی لورنتس $\rightarrow \vec{F} = Q(\vec{E} + \underbrace{\vec{V}}_{\text{سرعت}} \times \vec{B})$

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{enc} = NI = \underbrace{V_m}_{mmf} \qquad (KVL)$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dv = 0 \Rightarrow \oiint \vec{B} \cdot ds = 0 \qquad (KCL)$$

$$V_m = \underbrace{R}_{\text{رلوکتانس}} \phi \quad , \quad \phi = BS$$

قانون گوس

توسط دیورژانس

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$

$$V_m = H \cdot L = NI$$

$$Q_T = Q_b + Q_{\text{آزاد}}$$

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{enc \, \text{آزاد}}$$

$$\oiint \vec{P} \cdot \vec{ds} = -Q_b$$

$$\oiint \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{ds} = Q_T \quad \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\underbrace{\rho_{sb}}_{\text{مقید سطحی}} = \vec{P} \times \vec{a_n}$$

کروی $C = \dfrac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

استوانه‌ای $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_R}{\ln\frac{b}{a}}$

a ← شعاع درونی ، b ← شعاع بیرونی

ص۳ صفحه ۸

$$I = \oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

$$\oiint \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho_v \, dv$$

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = \iiint -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \, dv$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}} \qquad \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\iint \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

دهانه سیم

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} V_m \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} V_m \longrightarrow \vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A}$$

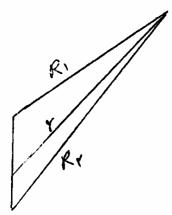
$$\frac{\mu_0 I \vec{dl} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R} \quad , \quad \vec{A} = \int \frac{\mu_0 I \vec{dl}}{4\pi R}$$

A بردار ضعیف‌تر نسبت به I است که در جهت جریان تولید می‌شود

$$\vec{A} = \iint \frac{\mu_0 \vec{K}\, ds}{4\pi R}$$

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0 \vec{J}\, dv}{4\pi R}$$



$\rightarrow \quad r^2 \cong R_1 R_2$

MIDTERM FORMULA SHEET

VECTOR IDENTITIES

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\nabla(\Phi+\Psi)=\nabla\Phi+\nabla\Psi$

$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$

$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$

$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$

$\nabla\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)=\frac{\Psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\Psi}{\Psi^2}$

$\nabla\Phi^n=n\Phi^{n-1}\nabla\Phi$

$\nabla\cdot(\Phi\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\vec{A}$

$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

$\nabla\times(\Phi\vec{A})=\nabla\Phi\times\vec{A}+\Phi\nabla\times\vec{A}$

$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$

$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$

$\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$

$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$

$\nabla\times\nabla\Phi=0$

$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$

VECTOR INTEGRAL THEOREMS

$\iiint_v(\nabla\cdot\vec{A})dv=\oiint_{S_{[v]}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ (Divergence theorem, Gauss identity)

$\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}=\oint_{C_{[S]}}\vec{A}\cdot d\vec{l}$ (Curl theorem 1, Stokes' theorem)

$\iiint_v(\nabla\times\vec{A})dv=\oiint_{S_{[v]}}d\vec{s}\times\vec{A}\equiv\oiint_{S_{[v]}}(\hat{n}\times\vec{A})ds$ (Curl theorem 2)

$\int\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}=$

SOME INTEGRALS OFTEN MET IN EM PROBLEMS

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$\int\frac{1}{(a^2\pm x^2)^{3/2}}dx=\pm\frac{x}{a^2\sqrt{a^2\pm x^2}}+C$

$\int\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$

$\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\begin{cases}\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=-\frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right), & |x|<a\\ -\frac{1}{a}\operatorname{arccoth}\left(\frac{x}{a}\right) & ,|x|>a\end{cases}$$

$\int\frac{x}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)+C$

$\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\sqrt{a^2+x^2}+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=2\ln\sqrt{a^2}$

$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx=-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)+C$

$\int x\sin(ax)dx=\frac{1}{a^2}[\sin(ax)-ax\cos(ax)]$

$\int x\cos(ax)dx=\frac{1}{a^2}[\cos(ax)+ax\sin(ax)]$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2}}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{2}{a^2}$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

MIDTERM FORMULA SHEET

Cylindrical Components↔ Spherical Components

$$\begin{aligned} a_r &= a_R \sin\theta + a_\theta \cos\theta \\ a_\phi &= a_\phi \\ a_z &= a_R \cos\theta - a_\theta \sin\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_R &= a_r \sin\theta + a_z \cos\theta \\ a_\theta &= a_r \cos\theta - a_z \sin\theta \\ a_\phi &= a_\phi \end{aligned}$$

Note: $\boldsymbol{\theta}$ is the position angle of the point at which the vector exists.

DERIVATIVES OF ELEMENTARY FUNCTIONS

$(const.)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^k)' = kx^{k-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, a \neq 1, x > 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k+1)\pi$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

$(\operatorname{arcsinh}\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arccosh}\ x)' = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$

$(\operatorname{arctanh}\ x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, |x|<1$

$(\operatorname{arccoth}\ x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, |x|>1$

DIFFERENTIAL OPERATORS

Rectangular Coordinates

$$\nabla\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{x}\nabla^2 F_x + \hat{y}\nabla^2 F_y + \hat{z}\nabla^2 F_z$$

Cylindrical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{F} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\vec{A} = {} & \hat{r}\left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}\right) + \\ & \hat{\phi}\left(\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2}\right) + \\ & \hat{z}\left(\frac{\partial^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

Spherical Coordinates

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{R}\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+$$

$$\hat{\theta}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi)\right]+$$

$$\hat{\varphi}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}=\hat{R}\left(\frac{\partial^2A_R}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_R}{\partial R}-\frac{2}{R^2}A_R+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_R}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_R}{\partial\varphi^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2}A_\theta-\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$

$$\hat{\theta}\left(\frac{\partial^2A_\theta}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial R}-\frac{A_\theta}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}-\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)+$$

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial R}-\frac{A_\varphi}{R^2\sin^2\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}+\frac{2\cot\theta}{R^2\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

DIFFERENTIAL ELEMENTS

Cartesian coordinates

$d\vec{l}=\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{x}dydz+\hat{y}dxdz+\hat{z}dxdy$; $dv=dxdydz$

Cylindrical coordinates

$d\vec{l}=\hat{r}dr+\hat{\varphi}rd\varphi+\hat{z}dz$; $d\vec{s}=\hat{r}rd\varphi dz+\hat{\varphi}drdz+\hat{z}rdrd\varphi$; $dv=rdrd\varphi dz$

Spherical coordinates

$d\vec{l}=\hat{R}dR+\hat{\theta}Rd\theta+\hat{\varphi}R\sin\theta d\varphi$;

$d\vec{s}=\hat{R}R^2\sin\theta d\theta d\varphi+\hat{\theta}R\sin\theta dRd\varphi+\hat{\varphi}RdRd\theta$;

$dv=R^2\sin\theta dRd\theta d\varphi$

ELECTROMAGNETIC EQUATIONS

Coaxial line

$C_1=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$, F/m; $L_1=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)+\dfrac{\mu_0}{8\pi}$, H/m

Twin-lead line

$$C_1=\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)}\text{ F/m; }L_1=\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{h}{r}+\sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2-1}\right)\text{ H/m}$$

MIDTERM FORMULA SHEET

$$\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\sqrt{ag-bf}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\sqrt{fx^2+g}}\right), (ag>bf)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C, x \neq 2k\pi$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

SOME USEFUL DEFINITE INTGERALS

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 &, \quad m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 &, \quad m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 &, \quad m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 &, \quad m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 &, \quad m+n = \text{even number} \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2}, & m+n = \text{odd number} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(a-b\cos x)}{(a^2+b^2-2ab\cos x)} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a}, & a>b>0 \\ 0, & b>a>0 \end{cases}$$

COORDINATE TRANSFORMATIONS

Rectangular ↔ Cylindrical

$$\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{array} \qquad \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{array}$$

Rectangular ↔ Spherical

$$\begin{array}{l} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{array} \qquad \begin{array}{l} R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{array}$$

Cylindrical ↔ Spherical

$$\begin{array}{l} r = R\sin\theta \\ \phi = \phi \\ z = R\cos\theta \end{array} \qquad \begin{array}{l} R = \sqrt{r^2+z^2} \\ \phi = \phi \\ \theta = \arccos\left(z/\sqrt{r^2+z^2}\right) \end{array}$$

VECTOR TRANSFORMATIONS

Rectangular Components ↔ Cylindrical Components

$$\begin{array}{l} a_x = a_r\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y = a_r\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z = a_z \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_r = a_x\cos\phi + a_y\sin\phi \\ a_\phi = -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \\ a_z = a_z \end{array}$$

Note: ϕ is the position angle of the point at which the vector exists.

Rectangular Components ↔ Spherical Components

$$\begin{array}{l} a_x = a_R\sin\theta\cos\phi + a_\theta\cos\theta\cos\phi - a_\phi\sin\phi \\ a_y = a_R\sin\theta\sin\phi + a_\theta\cos\theta\sin\phi + a_\phi\cos\phi \\ a_z = a_R\cos\theta - a_\theta\sin\theta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_R = a_x\sin\theta\cos\phi + a_y\sin\theta\sin\phi + a_z\cos\theta \\ a_\theta = a_x\cos\theta\cos\phi + a_y\cos\theta\sin\phi - a_z\cos\theta \\ a_\phi = -a_x\sin\phi + a_y\cos\phi \end{array}$$

Note: ϕ and θ are the position angles of the point at which the vector exists.

بسمه تعالی

موضوع : تحقیق درستی ماتریس ضرایب تبدیل بردار $\overrightarrow{AB}$ از دستگاه کروی به کارتزین و بالعکس و همچنین تحقیق صحت کاربرد زوایای φ_1 , θ_1 از مختصات کروی مبدا بردار در این ماتریس , و نیز تحقیق صحت کاربرد این ماتریس در مورد بردارهای یکه در هر دستگاه کروی و کارتزین

فرض : فرض کنیم بردار $\overrightarrow{AB}$ در دستگاه کروی با نقاط $A(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)$ و $B(\rho_2, \theta_2, \varphi_2)$ به عنوان ابتدا و انتهای بردار, به صورت زیر نمایش داده میشود:

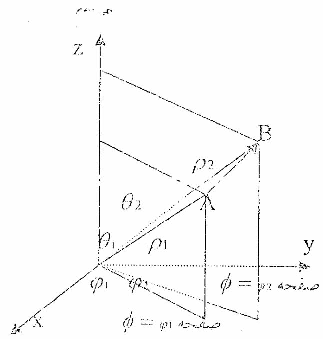


Fig.1

$$\overrightarrow{AB} = A_\rho\,\hat{u}_\rho + A_\theta\,\hat{u}_\theta + A_\varphi\,\hat{u}_\varphi \qquad (1)$$

که بردارهای $\hat{u}_\rho, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi$ بردارهای یکه نقطه ابتدای بردار میباشند .

تذکر : با توجه به متعامد بودن بردارهای یکه در مختصات کروی و اینکه این بردارها بردارهایی مستقل خطی در فضای (R^3) میباشند پس میتوان هر بردار دلخواه $\overrightarrow{AB}$ را بصورت ترکیب خطی از این سه بردار یکه نوشت , پس رابطه (1)در مورد هر بردار دلخواه صحت دارد.

رویکرد حل : با توجه به اینکه بردارهای یکه دستگاه کارتزین نیز بردارهای پایه برای هر بردار در دستگاه کروی و کارتزین میباشد (فضای R^3)پس میتوان با تجزیه هر یک از بردارهای مولف $\overrightarrow{AB}$ در دستگاه کروی یعنی $A_\rho\hat{u}_\rho$ و $A_\theta\hat{u}_\theta$ و $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ به بردارهای در دستگاه کارتزین و استفاده از خواص جمع برداری مولفه های A_x, A_y, A_z بردار $\overrightarrow{AB}$ را در دستگاه کارتزین بدست آورد به صورتیکه :

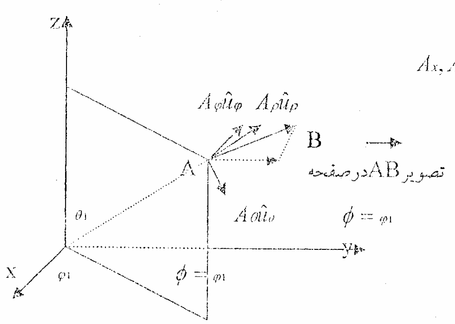


Fig.2

$$\overrightarrow{AB} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z \qquad (2)$$

تذکر مهم : میتوانستیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را بر حسب بردارهای پایه نقطه B یعنی $\hat{u}_{\rho2}, \hat{u}_{\theta2}, \hat{u}_{\varphi2}$ تجزیه کنیم که در این صورت اندازهای $A'_\varphi, A'_\theta, A'_\rho$ بدست می آمد وماتریس ضرایب نیز بر حسب زوایای φ_2, θ_2 حاصل مي شد بنا بر این با فرض φ_2, θ_2 و اندازهاي $A'_\rho, A'_\theta, A'_\rho$ بر حسب نقطه انتهاي بردار, نیز همین نتیجه معتبر است .

تجزیه $A_\rho \hat{u}_\rho$ به مولفه هاي كارتزين :

با توجه به شكل شماره 3 از آنجا كه امتداد $A_\rho \hat{u}_\rho$ در صفحه $\phi=\varphi_1$ است و با محور z زاويه θ_1 را ميسازد پس تصوير آن بر محور z برابر $A_\rho Cos\theta_1$ و تصوير آن در صفحه xy برابر $A_\rho Sin\theta_1$ ميباشد پس :

$$A_\rho\hat{u}_\rho = A_\rho(Sin\theta_1 Cos\varphi_1 \hat{i} + Sin\theta_1 Sin\varphi_1 \hat{j} + Cos\theta_1 \hat{k}) \qquad (3)$$

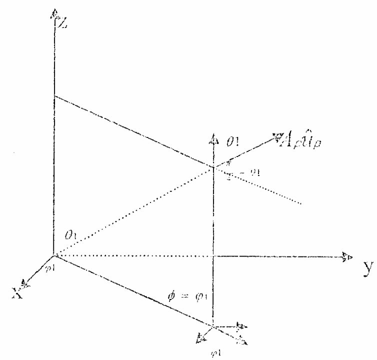


Fig.3

تجزيه $A_\theta\hat{u}_\theta$ به مولفه هاي كارتزين :

با توجه به شكل شماره 4 از آنجا كه صفحه $\phi=\varphi_1$ شامل هر دو بردار z و $\hat{u}_\rho,\hat{u}_\theta$ مي باشد بنابراين بردار $A_\theta\hat{u}_\theta$ نيز با دو بردار يكي در امتداد محور منفي z با زاويه $\frac{\pi}{2}-\theta_1$ و ديگري در صفحه xy تجزيه مي شود. پس :

$$A_\theta\hat{u}_\theta = A_\theta Cos\theta_1 Cos\varphi_1\hat{i} + A_\theta Cos\theta_1 Sin\varphi_1 \hat{j} - A_\theta Sin\theta_1\hat{k} \qquad (4)$$

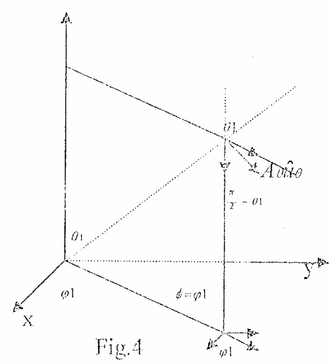


Fig.4

تجزيه $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ به مولفه هاي كارتزين :

با توجه به متعامد بودن بردارهاي $\hat{u}_\rho,\hat{u}_\theta,\hat{u}_\varphi$ بنابراين بردار $A_\varphi\hat{u}_\varphi$ بر صفحه شامل دو بردار ديگر يعني صفحه $\phi=\varphi_1$ عمود است بنابراين بر محور z نيز كه در اين صفحه قرار دارد عمود ميباشد يعني :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{u}_\varphi \perp \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi\perp\hat{u}_\rho\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{u}_\varphi \perp (\text{صفحه } \phi=\varphi_1)$$

$$oz \in \phi=\varphi_1 \Rightarrow \hat{u}_\varphi \perp oz$$

بنابراين :

$\hat{u}_\varphi$ در راستاي z مولفه ندارد وتماما" در صفحه موازي صفحه xy قرار ميگيرد پس:

$$A_\varphi\hat{u}_\varphi = A_\varphi(-Sin\varphi_1\hat{i}+Cos\varphi_1\hat{j}+0\hat{k}) \qquad (5)$$

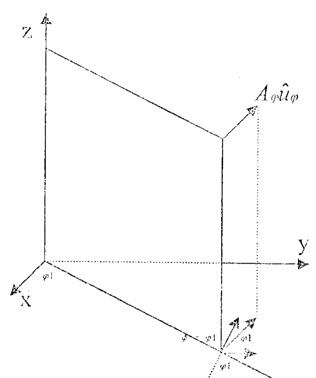


Fig.5

از طرفي مي توان با جمع بندي سه قسمت پيشين نتيجه گرفت:

$$(1),(3),(4),(5) \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} = (A_\rho Sin_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} + A_\theta Cos_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} - A_\varphi Sin_{\varphi 1})\,\hat{i} \; +$$
$$(A_\rho \sin_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} + A_\theta Cos_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} + A_\varphi Cos_{\varphi 1})\,\hat{j} \; +$$
$$(A_\rho Cos_{\theta 1} - A_\theta Sin_{\theta 1} + 0)\hat{k}$$

$$= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

كه مي توان اين نتايج را در ماتريس زير خلاصه كرد:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sin_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} & Cos_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} & -Sin_{\varphi 1} \\ Sin_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} & Cos_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} & Cos_{\varphi 1} \\ Cos_{\theta 1} & -Sin_{\theta 1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} \qquad (6)$$

براي بدست آوردن ماتريس معكوس نيزكافي است جاي عناصر سطر و ستون را عوض كرد(نسبت به قرار اصلي)

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sin_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} & Sin_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} & Cos_{\theta 1} \\ Cos_{\theta 1} Cos_{\varphi 1} & Cos_{\theta 1} Sin_{\varphi 1} & -Sin_{\theta 1} \\ -Sin_{\varphi 1} & Cos_{\varphi 1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \qquad (7)$$

اگر سه بردار يكه $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_\rho$ را با استفاده از همان روش اثبات رابطه هاي (3),(4),(5) به بردار هاي كارتزين تجزيه كنيم خواهيم داشت :

$$\hat{u}_\rho = Sin_{\theta 1} Cos_{\varphi 1}\hat{i} + Sin_{\theta 1} Sin_{\varphi 1}\hat{j} + Cos_{\theta 1}\hat{k}$$
$$\hat{u}_\theta = Cos_{\theta 1} Cos_{\varphi 1}\hat{i} + Cos_{\theta 1} Sin_{\varphi 1}\hat{j} - Sin_{\theta 1}\hat{k}$$
$$\hat{u}_\varphi = -Sin_{\varphi 1}\hat{i} + Cos_{\varphi 1}\hat{j} + 0\hat{k}$$

كه با مرتب كردن روابط فوق بصورت ماتريسي, با در نظر گرفتن ماتريس رابطه(6) بنام A خواهيم داشت :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\varphi \\ \hat{u}_\theta \end{bmatrix} = A^{-1} * \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

و همچنين با ضرب طرفين رابطه اخير در ماتريس A داريم:

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = A * \begin{bmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\varphi \end{bmatrix}$$

بنابراين ميتوان در روابط (6),(7) بجاي ماتريسهاي $\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ به ترتيب ماتريسهاي يكه مختصات كروي و كارتزين را قرار داد و روابط همچنان برقرار است .

GRADIENT

CARTESIAN $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

CYLINDRICAL $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

SPHERICAL $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

DIVERGENCE

CARTESIAN $$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

CYLINDRICAL $$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

SPHERICAL $$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

CURL

CARTESIAN $$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

CYLINDRICAL $$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

SPHERICAL $$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

LAPLACIAN

CARTESIAN $$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

CYLINDRICAL $$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

SPHERICAL $$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

تهیه کننده :

حامد مظاهری

شما هم میتوانید مقالات خود را به ما ارسال کنید تا با نام شما در سایت قرار داده شود

Hamed@ir-micro.com