سری تیلور و سری توانی (۲)

در جلسه قبل نخست سری تیلور و سپس به طور کلی سری توانی را در نظر گرفتیم. هر سری تیلور یک سری توانی است. یکی از دستاوردهای بحث این جلسه این خواهد بود که هر سری توانی با شعاع همگرایی مثبت، خود سری تیلور تابعی است که در ناحیه همگرایی سری به آن میل می‌کند. در این جلسه بحث را به سری‌های توانی حقیقی محدود خواهیم کرد هر چند که همین ملاحظات در حالت مختلط نیز معتبر است. دلیل محدود کردن بحث این است که مفاهیم مشتق و انتگرال را که در اینجا به‌کار گرفته خواهد شد در حال حاضر فقط برای تابع‌های حقیقی در اختیار داریم. در یکی دو جا اشاراتی به حالت مختلط نیز خواهد شد. بدین ترتیب سری توانی

$$a_{\circ} + a_{۱}(x-a) + a_{۲}(x-a)^{۲} + \cdots \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن a، $a_{\circ}$، $a_{۱}$، $a_{۲}$، ... اعداد حقیقی داده شده‌اند و x متغیر حقیقی است. طبق قضیهٔ جلسهٔ قبل، ρ وجود دارد، $\circ \le \rho \le +\infty$ که سری فوق برای هر x با $|x-a| < \rho$ همگرای مطلق است و برای هر x با $|x-a| > \rho$ واگرا. ρ را شعاع همگرایی سری توانی خواندیم. قضیهٔ اساسی زیر که در اینجا ثابت نخواهیم کرد جمع‌بندی خواص مهم (۱) است:

فرض کنید $\rho > \circ$، پس $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(x-a)^n$ برای x با $|x-a| < \rho$ به عددی میل می‌کند که آن را $f(x)$ می‌نامیم. بدین ترتیب تابعی $f:]a-\rho, a+\rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. داریم:

(۳۴—۱) قضیه. الف) f در $]a-\rho, a+\rho[$ مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر x در این بازه داریم

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-۱} \qquad (۲)$$

ب) به‌ازای هر x در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$، انتگرال $\int_a^x f$ وجود دارد و:

$$\int_a^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \tag{3}$$

تذکر چند نکته در اینجا ضروری است:

(۳۴—۲) یادداشت

(۳۴—۲—۱) توجه کنید که (۲) و (۳) بیانگر این مطلب هستند که برای مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از f می‌توانیم از تک تک جملات سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ مشتق و انتگرال گرفته و سپس مجموع سری مشتق‌ها یا انتگرال‌ها را در نظر بگیریم. این مطلب ممکن است واضح به نظر برسد، و در واقع برای مجموع‌های متناهی درست است، ولی برای مجموع یک سری (که در واقع یک حد است) به طور کلی درست نیست. به زودی در بررسی سری فوریه خواهیم دید که مجموع یک سری تابع‌های مشتق‌پذیر ممکن است اصلاً پیوسته نباشد. بدین ترتیب قضیه ۳۴—۱ تعمیم قضیه مجموع مشتق = مشتق مجموع، و مجموع انتگرال = انتگرال مجموع، به جملات تشکیل‌دهندهٔ یک سری توانی است.

(۳۴—۲—۲) حکم (الف) نشان می‌دهد که شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ دست‌کم ρ (= شعاع همگرایی سری توانی اولیه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$) است زیرا که برای x در $]a-\rho, a+\rho[$ سری بالا به عدد $f'(x)$ میل می‌کند. در واقع شعاع همگرایی سری مشتق‌ها دقیقاً برابر ρ است زیرا که طبق (ب) شعاع همگرایی سری تابع‌های اولیه نیز دست‌کم ρ است. بدین ترتیب شعاع‌های همگرایی سری‌های توانی $\sum a_n(x-a)^n$، $\sum na_n(x-a)^{n-1}$ و $\sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ هر سه برابرند. رفتار این سری‌ها در نقاط انتهایی $a \pm \rho$ ممکن است متفاوت باشد همچنان که مثال‌های آینده نشان خواهد داد.

(۳۴—۳) چند مثال

(۳۴—۳—۱) در مثال ۳۱—۱—۳ دیدیم که سری توانی (هندسی) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ در

$|x-۱|<۱$، یعنی $۰<x<۲$، به تابع $\frac{۱}{x}$ همگراست:

$$(۴) \qquad \sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(x-۱)^n = \frac{۱}{x} \quad , \quad ۰<x<۲$$

با مشتق‌گیری طبق قسمت (الف) قضیهٔ ۳۴—۱ حاصل می‌شود:

$$(۵) \qquad \sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n n(x-۱)^{n-۱} = \frac{-۱}{x^۲} \quad , \quad ۰<x<۲$$

با مشتق‌گیری مجدد از این سری توانی داریم:

$$(٦) \qquad \sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n(n-۱)(x-۱)^{n-۲} = \frac{۲}{x^۳} \quad , \quad ۰<x<۲$$

و به این ترتیب می‌توان با مشتق‌گیری مکرر یک نمایش سری توانی برای تابع $\frac{۱}{x^k}$ در $۰<x<۲$ به‌دست آورد.

(۳۴—۲—۲) اگر قسمت (ب) قضیهٔ ۳۴—۱ را در مورد (۴) به‌کار گیریم حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}(x-۱)^{n+۱} = \int_۱^x \frac{۱}{t}dt \quad , \quad ۰<x<۲$$

یا

$$(۷) \qquad (x-۱) - \frac{(x-۱)^۲}{۲} + \frac{(x-۱)^۳}{۳} - + \cdots = \ln x \quad , \quad ۰<x<۲$$

مقایسهٔ (۴) و (۷) در نقاط انتهایی بازهٔ همگرایی قابل توجه است. سری توانی (۴) که یک سری هندسی است در هیچ‌یک از دو نقطهٔ انتهایی $x=۰,۲$ همگرا نیست. سری توانی سمت چپ (۷) در $x=۰$ برابر منفی سری هارمونیک است و همگرا نمی‌باشد ولی به‌ازای $x=۲$ سری متناوب زیر به‌دست می‌آید:

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + - \cdots$$

که همگراست. سؤالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا مجموع این سری را می‌توان با جایگزینی $x=۲$ در سمت راست (۷) به‌دست آورد، یعنی آیا $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = \ln ۲$؟ قضیهٔ زیر از آبل (که در اینجا ثابت نخواهد شد) گویای این مطلب در حالت کلی است:

(۴—۳۴) قضیه. فرض کنید سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی ρ است، $\circ < \rho < +\infty$ و در $|x-a| < \rho$ به تابع f میل می‌کند. اگر به‌ازای نقطهٔ انتهایی $x = a + p$ (به ترتیب نقطهٔ انتهایی $x = a - p$) سری $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \rho^n$ (به ترتیب $\sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n a_n \rho^n$) همگرا باشد، آنگاه داریم

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \rho^n = \lim_{x \to (a-\rho)^-} f(x) \qquad \text{(به ترتیب} \quad \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n a_n \rho^n = \lim_{x \to (a-\rho)^+} f(x)) \tag{۸}$$

در مورد مثال بالا، از آنجا که $\ln x$ در $x = ۲$ پیوسته است، حد آن همان مقدار $\ln ۲$ می‌باشد و

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + - \cdots = \ln ۲ \tag{۹}$$

اکنون به بهره‌برداری از قضیهٔ ۳۴—۱ ادامه می‌دهیم. همان طور که در یادداشت ۳۴—۲—۲ و در مثال ۳۴—۳—۱ دیدیم، سری مشتق یک سری توانی، یعنی (۲)، خود در $|x-a| < \rho$ همگراست (به تابع f')، پس با استفاده مکرر از قضیه، می‌توان نتیجه گرفت که تابع $f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x-a)^n$، $|x-a| < \rho$، دارای مشتق از هر مرتبه در بازهٔ $]a-\rho, a+\rho[$ است و

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-۱)\cdots(n-k+۱) a_n (x-a)^{n-k} \quad , \quad a - \rho < x < a + \rho \tag{۱۰}$$

در نقطهٔ $x = a$ نتیجه می‌شود که:

$$f^{(k)}(a) = (k!) a_k \tag{۱۱}$$

زیرا که به‌ازای $n > k$ جملات $(x-a)^{n-k}$ صفر می‌شوند. این نتیجه رابطهٔ تنگاتنگ سری توانی (۱) و تابعی را که توسط آن تعریف می‌شود نشان می‌دهد. در واقع می‌توان نوشت:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

یعنی سری توانی $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x-a)^n$ در واقع سری تیلور تابع f در نقطهٔ a است! بدین ترتیب نه تنها هر سری تیلور یک سری توانی است، بلکه هر سری توانی، سری تیلور تابعی است که آن سری توانی در $|x-a| < \rho$ تعریف می‌کند. قضیه زیر آخرین قضیه از دنباله قضایایی است که بدون اثبات به ذکر صورت آن خواهیم پرداخت. ساده‌ترین و طبیعی‌ترین روش اثبات قضایایی که در این جلسه بدون

اثبات ذکر شدند گذر به صفحهٔ مختلط و استفاده از مشتق و انتگرال تابعی مختلط است که این کار زمینه‌سازی قابل توجهی نیاز دارد. می‌توان این قضایا را در محدودهٔ اعداد حقیقی ثابت کرد ولی اثبات‌ها به نسبت دشوارند.

فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. f را در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی می‌نامیم در صورتی که f دارای مشتق از هر مرتبه در a باشد و عددی σ وجود داشته باشد که بازهٔ $]a-\sigma, a+\sigma[$ در S بوده و سری تیلور f در a به‌ازای هر x در $]a-\sigma, a+\sigma[$ به $f(x)$ میل کند.

به عنوان مثال، در جلسه قبل دیدیم که توابع e^x، $\sin x$، $\cos x$، $sinh\ x$، $cosh\ x$ در $a = ۰$ تحلیلی هستند (و در واقع $\sigma = +\infty$)، تابع $\frac{1}{x}$ در $a = ۱$ تحلیلی است با $\sigma = ۱$، و تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-۲}} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

در $a = ۰$ تحلیلی نیست. حال داریم:

(۳۴—۵) قضیه. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی a از S تحلیلی است و سری تیلور آن در نقطهٔ a، یعنی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$، در $|x-a| < \sigma$ به $f(x)$ میل می‌کند. در این صورت برای هر b در $]a-\sigma, a+\sigma[$، تابع f در b نیز تحلیلی است و شعاع همگرایی سری تیلور f به تابع f در b دست‌کم به اندازهٔ حداقل فاصلهٔ b از دو انتهای $]a-\sigma, a+\sigma[$ است. $\square$

(۳۴—۶) چند مثال

(۳۴—۶—۱) در مورد پنج تابع e^x و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی، دیدیم که تابع‌ها در $a = ۰$ تحلیلی هستند و $\sigma = +\infty$. پس به‌ازای هر b حقیقی، تابع‌ها در b تحلیلی هستند و سری تیلور در b به‌ازای همهٔ مقادیر x به تابع میل می‌کند. در مورد این پنج تابع، به سبب سادگی ضرایب، می‌توان موضوع را مستقیماً بدون استفاده از قضیهٔ بالا تحقیق کرد و این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. در اینجا سری تیلور e^x و $\sin x$ را در نقاطی غیر از $a = ۰$ می‌نویسیم. برای e^x، نقطهٔ دلخواه a را در نظر

بگیرید. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x)|_{x=a} = e^a$$

پس سری تیلور e^x در نقطهٔ a به شکل زیر است:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n \tag{۱۲}$$

البته این فرمول، با فاکتورگیری از e^a، چیزی جز $e^x = e^a \cdot e^{x-a}$ نیست.

سری تیلور $\sin x$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم. داریم

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{فرد } n \\ (-1)^k & \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x-\frac{\pi}{2})^{2k} \tag{۱۳}$$

می‌توان (۱۲) را از بسط $\sin((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2})$ و سری تیلور $\cos x$ در $a = 0$ نیز نتیجه گرفت.

(۳۴–۶–۲) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در هر نقطهٔ $a \neq 0$ تحلیلی است و سری تیلور آن در شعاع $|x-a| < |a|$ به خود تابع میل می‌کند. در حالت $a = 1$، این همان مثال ۳۳–۱–۳ جلسهٔ قبل است. داریم:

$$\frac{1}{x} = (\frac{1}{a})\ \frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}$$

برای $|\frac{x-a}{a}| < 1$، یا $|x-a| < |a|$، کسر $\frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}$ برابر مجموع سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-a}{a})^n$ است پس:

$$|x-a| < |a| \quad , \quad \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(x-a)^n \tag{۱۴}$$

با مشتق‌گیری متوالی از این عبارت می‌توان سری تیلور $\frac{1}{x^k}$، برای عدد صحیح مثبت k، را در $a \neq 0$ نوشت. توجه کنید که نمی‌توان انتظار داشت شعاع همگرایی سری از $|a|$ تجاوز کند زیرا نقطهٔ O که در آن f تعریف نشده است در فاصله $|a|$ از a قرار دارد.

(۳۴—٦—۳) به روال مثال قبل، با استفاده از سری هندسی، سری تیلور $\frac{۱}{۱+x}$ را در $|x| < ۱$ داریم:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^{۲} - x^{۳} + - \cdots \tag{۱۵}$$

در اینجا نیز چون تابع سمت چپ در $x = -۱$ تعریف نشده است. شعاع همگرایی سری توانی سمت راست نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. ولی برای $|x| < ۱$، داریم $|x^{۲}| < ۱$، پس با جایگزینی:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \frac{۱}{۱+x^{۲}} = ۱ - x^{۲} + x^{۴} - x^{٦} + - \cdots$$

نکتهٔ جالب توجه در مورد این سری اینکه طرف راست، که یک سری هندسی است، فقط در $|x| < ۱$ همگراست، ولی طرف چپ به‌ازای هر x تعریف شده است و در واقع می‌توان نشان داد در هر نقطه a تحلیلی است. در اینجا شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ در $a = ۰$ برابر ۱ است در حالی که تابع در سراسر $\mathbb{R}$ تعریف شده است. در پس این مطلب اعداد مختلط نهفته‌اند. توجه کنید که $\frac{۱}{۱+z^{۲}}$ به‌ازای $z = \pm i$ تعریف شده نیست، بنابراین شعاع همگرایی سری تیلور $\frac{۱}{۱+z^{۲}}$ حول $a = ۰$ نمی‌تواند از $\rho = ۱$ تجاوز کند!

(۳۴—٦—۴) فرض کنید $a > ۰$. با انتگرال‌گیری از (۱۴)، سری تیلور $\ln x$ را در a به‌دست می‌آوریم:

$$|x - a| < a \quad , \quad \ln x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(n+۱)a^{n+۱}}(x-a)^{n+۱} \tag{۱٦}$$

این سری را قبلاً به‌ازای $a = ۱$ دیده‌ایم. با قرار دادن $a = ۱$ و $t = x - ۱$، شکل معمول‌تری از (۱٦) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} |t| < ۱ \quad , \quad \ln(۱+t) &= \textstyle\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n+۱} t^n \\ &= ۱ - \tfrac{t}{۲} + \tfrac{t^{۲}}{۳} - + \cdots \end{aligned} \tag{۱۷}$$

(۳۴—٦—۵) انتگرال‌گیری از (۱۵) نتیجه می‌دهد:

$$|x| < ۱ \quad , \quad \tan^{-۱} = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - + \cdots \tag{۱۸}$$

در دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، سری‌های متناوب همگرا حاصل می‌شوند و طبق قضیهٔ آبل داریم:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + - \cdots \qquad (۱۹)$$