مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ بالا، قاعدهٔ زنجیره‌ای

فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S است و برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $y = f(x)$، مشتق پاره‌ای $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در همهٔ نقاط یک گوی باز حول a تعریف شده است. در این صورت $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود یک تابع با مقدار حقیقی است که نقطهٔ a یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است. بدین ترتیب می‌توان برای تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ وجود مشتق پاره‌ای نسبت به متغیر x_j را در نقطهٔ a مطرح کرد. $(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}))(a)$ را در صورت وجود به نمادهای زیر نمایش می‌دهیم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad D_{ij}f(a) \quad , \quad f_{x_i x_j}(a) \qquad (1)$$

و آن را یک مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم f در نقطه a می‌نامیم. برای تابع n متغیری $y = f(x_1, \ldots, x_n)$، می‌توان n^2 مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم در نظر گرفت زیرا که در (۱)، i, j هر یک عدد صحیحی بین ۱ و n هستند. معمولاً به جای $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_j}$ می‌نویسیم $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$.

به همین ترتیب، اگر مشتق پاره‌ای مرتبه دوم $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ در یک گوی باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان وجود مشتق پاره‌ای مرتبهٔ سوم $\frac{\partial^3 y}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i})$ را بررسی نمود، و همین طور مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر.

نکتهٔ مهم در مورد مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دو به بالا این است که تحت شرایط سهل الوصول، ترتیب مشتقگیری نسبت به متغیرهای مختلف اثری بر نتیجه نهایی ندارد، بلکه تنها عامل اثرگذار تعداد دفعاتی است که مشتقگیری نسبت به متغیر خاص صورت گرفته است. قضیهٔ زیر نمونه‌ای از این نوع احکام است:

(۱−۹) قضیه. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طوری که $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ هر دو در یک گوی باز حول a تعریف شده و در نقطهٔ a پیوسته

هستند. در این صورت:

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \qquad (۲)$$

بدیهی است که می‌توان با به‌کارگیری مکرر این قضیه، حکم را به مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد.

اثبات قضیه. برای سهولت در نوشتن، حالت $n = ۲$ را در نظر می‌گیریم. اثبات حالت کلی عیناً به همین صورت است، کافی است استدلال را به صفحه (x_i, x_j) محدود کنیم. بدین ترتیب نقاط S را به (x, y) و نقطهٔ درونی مورد نظر را به (a, b) نمایش می‌دهیم. اگر $|h|$ و $|k|$ به اندازه کافی کوچک باشند، مستطیل $a \leq x \leq a + h$، $b \leq y \leq b + k$ (در صورتی که هر یک از h, k منفی باشد، جهت نامساوی مربوط را معکوس کنید) در درون دامنه تعریف $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}$ قرار می‌گیرد. از سه تابع کمکی Q، u و v به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \qquad (۳)$$

Q تفاضل مجموع مقدار f در دو رأس مقابل مستطیل و دو رأس مقابل دیگر است.

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \qquad (۴)$$

$$v(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \qquad (۵)$$

بدین ترتیب u و v، به ترتیب، تفاضل f در دو انتهای پاره‌خط‌های قائم و افقی را نمایش می‌دهند.

?

داریم

$$Q(h, k) = u(a + h) - u(a) \qquad (٦)$$

و نیز

$$Q(h,k) = v(b+k) - v(b) \tag{۷}$$

طبق قضیهٔ مقدار میانگین یک متغیری، برای u داریم:

$$u(a+h) - u(a) = h \cdot u'(\xi) \tag{۸}$$

که در آن ξ بین a و $a+h$ است. ضمناً مشتق u طبق (۴) از مشتق‌گیری f نسبت به x به‌دست می‌آید، پس از (٦) و (۸):

$$Q(h,k) = h[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)] \tag{۹}$$

حال اگر تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به عنوان تابعی از متغیر دوم آن در نظر بگیریم، طبق قضیهٔ میانگین یک متغیری داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = k\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \tag{۱۰}$$

که در اینجا η بین b و $b+k$ است. پس

$$Q(h,k) = hk\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \tag{۱۱}$$

حال به همین ترتیب، اگر به جای u، از v استفاده کنیم، نقطه η' بین b و $b+k$، نقطه ξ' بین a و $a+h$ به‌دست می‌آیند که:

$$Q(h,k) = kh\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') \tag{۱۲}$$

از مقایسه (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \tag{۱۳}$$

توجه کنید که (ξ,η) و (ξ',η') دو نقطه در مستطیل شکل ۱ هستند، پس وقتی $(h,k)\longrightarrow(0,0)$، هر دو نقطه به (a,b) میل می‌کنند. از پیوستگی $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ در (a,b) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$$

چنان که حکم بود. ■

مثال ۱. برای $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x,y)=xe^y-y^2x^3$، مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y-3x^2y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^y-2yx^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6xy^2 \qquad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^y-6x^2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=xe^y-2x^3$$

مثال ۲. کلیه مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب $f(x,y)=ye^x$ را محاسبه کنید.

از عبارت بالا مشخص است که همه مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب وجود دارند و پیوسته خواهند بود، بنابراین ترتیب مشتقگیری اهمیتی ندارد. اگر از عبارت فوق یک بار نسبت به y مشتقگیری شود، متغیر y حذف می‌شود، پس می‌توان نوشت

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\partial y^l}=0 \quad \text{اگر}\ l\geq 2$$

همچنین نتایج زیر نیز به‌دست می آیند:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}=ye^x \quad , \quad \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k\partial y}=e^x$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای

یکی از مهمترین و مؤثرترین حربه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیری قاعدهٔ زنجیره‌ای است که مشتق ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر را بیان می‌کند. فرض کنید I و J دو بازه در $\mathbb{R}$ باشند $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع، a یک نقطهٔ درونی I و $b = f(a)$ یک نقطهٔ درونی J. حال اگر f در a و g در $b = f(a)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $g \circ f$ در a مشتق‌پذیر است و:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{۱۴}$$

این رابطه به قاعدهٔ زنجیره‌ای معروف است. روش دیگری برای نوشتن (۱۴) این است که بنویسیم $y = f(x)$ و $z = g(y)$، آنگاه (۱۴) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dz}{dx}(a) = \frac{dz}{dy}(b) \cdot \frac{dy}{dx}(a) \tag{۱۵}$$

در وضعیت چند متغیری، رابطهٔ مشابهی برقرار است. فرض کنید S و T به ترتیب زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}^p$ دو تابع، a یک نقطهٔ درونی S و $b = f(a)$ یک نقطهٔ درونی T. حال اگر f در a و g در $b = f(a)$ مشتق‌پذیر باشد، قاعده زنجیره‌ای حکم می‌کند که $g \circ f$ در a مشتق‌پذیر است و

$$(D(g \circ f))(a) = Dg(f(a))Df(a) \tag{۱۶}$$

توجه کنید که در اینجا $Df(a)$ یک ماتریس $m \times n$، $Dg(f(a))$ یک ماتریس $p \times m$ و $(D(g \circ f))(a)$ یک ماتریس $p \times n$ است. در طرف راست (۱٦) حاصل‌ضرب دو ماتریس در نظر گرفته شده است.

?

اگر نقاط $\mathbb{R}^n$ را به $x = (x_۱, \dots, x_n)$، نقاط $\mathbb{R}^m$ را به $y = (y_۱, \dots, y_m)$ و نقاط $\mathbb{R}^p$ را به $z = (z_۱, \dots, z_p)$ نمایش دهیم، تابع‌های f و g به صورت $y = f(x)$ و $z = g(y)$ نوشته می‌شوند و $z = (g \circ f)(x)$. رابطه (۱۶) را می‌توان بدین صورت نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_۱}{\partial x_۱}(a) & \dots & \frac{\partial z_۱}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_۱}(a) & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_۱}{\partial y_۱}(b) & \dots & \frac{\partial z_۱}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_۱}(b) & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_۱}{\partial x_۱}(a) & \dots & \frac{\partial y_۱}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_۱}(a) & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

یا به اختصار

$$[\frac{\partial z}{\partial x}(a)] = [\frac{\partial z}{\partial y}(b)][\frac{\partial y}{\partial x}(a)] \qquad (۱۸)$$

شباهت ظاهری (۱۶)، (۱۷) یا (۱۸) به قاعدهٔ زنجیری یک متغیری آشکار است. تنها تفاوت این است که در حالت $m = n = p = ۱$ همهٔ ماتریس‌ها ۱×۱ هستند، بنابراین ضرب ماتریسی به صورت یک ضرب عادی ظاهر می‌شود.

با توجه به روش محاسبهٔ حاصل‌ضرب ماتریس‌ها، می‌توان از (۱۷) فرمول صریحی برای $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(a)$ استخراج کرد:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial z_i}{\partial y_۱}(b)\frac{\partial y_۱}{\partial x_j}(a) + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m}(b)\frac{\partial y_m}{\partial x_j}(a) \qquad (۱۹)$$

هر یک از (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) یا (۱۹) به قاعدهٔ زنجیره‌ای چند متغیری معروفند.

<u>مثال ۱.</u> $\varphi : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $z = \varphi(x, y) = x^۲ - y^۲$ تعریف شده است. می‌خواهیم z را برحسب مختصات قطبی (r, θ)، $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$، در نظر گرفته، آهنگ تغییرات لحظه‌ای z را نسبت به r و θ محاسبه کنیم. در این مثال ساده می‌توان z را صریحاً بر حسب r و θ نوشت و سپس مشتقگیری کرد. داریم

$$z = r^۲ \cos^۲\theta - r^۲ \sin^۲\theta$$

پس

$$\frac{\partial z}{\partial r} = ۲r\cos^۲\theta - ۲r\sin^۲\theta = ۲r\cos ۲\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -۲r^۲\cos\theta\sin\theta - ۲r^۲\sin\theta\cos\theta = -۲r^۲\sin ۲\theta$$

اکنون تحقیق می‌کنیم که از روش قاعدهٔ زنجیره‌ای نیز به همین نتیجه می‌رسیم. نمایش (x,y) بر حسب (r,θ) را به ψ نمایش می‌دهیم، $(x,y)=\psi(r,\theta)$. پس در اینجا هدف یافتن مشتق $z=(\varphi\circ\psi)(r,\theta)$ است. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$[\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] = [\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

درایه‌های ماتریس‌های طرف راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} = ۲x = ۲r\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -۲y = -۲r\sin\theta \\ &\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{aligned} \tag{۲۰}$$

پس

$$\begin{aligned} [\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] &= [۲r\cos\theta \quad -۲r\sin\theta] \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= [۲r\cos^۲\theta - ۲r\sin^۲\theta \quad -۲r^۲\cos\theta\sin\theta - ۲r^۲\sin\theta\cos\theta] \\ &= [۲r\cos ۲\theta \quad -۲r^۲\sin ۲\theta] \end{aligned}$$

در این مثال ساده، محاسبه مستقیم کوتاهتر بود، ولی معمولاً قاعدهٔ زنجیره‌ای ساده‌تر است و حتی گاهی جایگزین مستقیم عملی نیست، علاوه بر آن که قاعدهٔ زنجیره‌ای برای اثبات بعضی فرمول‌ها و قضایا اجتناب‌ناپذیر است. از فرمول‌های (۲۰) که مشتقات پاره‌ای مختصات دکارتی را بر حسب مختصات قطبی ارائه می‌کنند، استفادهٔ زیادی خواهیم کرد.

<u>مثال ۲.</u> می‌خواهیم معکوس روابط (۲۰)، یعنی مشتق‌های پاره‌ای r و θ را بر حسب x و y محاسبه کنیم. نخست توجه کنید که ارتباط (x,y) با (r,θ) یک به یک نیست زیرا با افزودن مضربی از ۲π به θ می‌توان زاویهٔ معادل دیگری را نیز به‌دست آورد. اکنون θ را به یک بازه، مثلاً $۰<\theta<۲\pi$، و r را به مقادیر اکیداً مثبت محدود می‌کنیم که تناظری یک به یک میان بخشی از صفحه (x,y)، دقیقاً $\mathbb{R}^۲-\{(x,۰)\mid x\geq ۰\}$ و $\{(r,\theta)\mid r>۰, ۰<\theta<۲\pi\}$ حاصل شود. می‌نویسیم

$$(x,y)=\psi(r,\theta) \quad , \quad (r,\theta)=\psi^{-۱}(x,y)$$

پس

$$(x,y) = (\psi \circ \psi^{-۱})(x,y)$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس مشتقات پاره‌ای (r,θ) نسبت به (x,y)، وارون ماتریس مشتقات پاره‌ای (x,y) نسبت به (r,θ) است. با محاسبهٔ وارون ماتریس نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

یا

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \qquad (۲۲)$$

توجه کنید که بر خلاف حالت یک متغیری که در مورد معکوس توابع $\frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy}$، در اینجا $\frac{\partial r}{\partial x} \neq \frac{۱}{\frac{\partial x}{\partial r}}$ زیرا متغیرهای دیگر نیز در محاسبه دخیلند. در محاسبهٔ بالا از محدودهٔ خاصی که برای زاویهٔ انتخاب شد، استفاده خاصی نشد، هر محدودهٔ دیگر همین نتیجه را می‌دهد. ولی برای مشتق‌گیری θ نسبت به (x,y) شرط $r \neq ۰$ ضروری است.

<u>مثال ۳.</u> فرض کنید $z = f(x,y)$ تابعی است که دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته است. می‌خواهیم $\frac{\partial^۲ z}{\partial y \partial x}$ را بر حسب مشتقات پاره‌ای z نسبت به r و θ بنویسیم. نخست با استفاده از (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \tfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \tfrac{\partial z}{\partial \theta}\left(\tfrac{\sin\theta}{r}\right) \qquad (\text{با استفاده از (۲۲)}) \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۱۹) و قانون مشتق‌گیری حاصل‌ضرب:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ z}{\partial y\partial x} &= (\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^۲ z}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial y})\cos\theta+(\frac{\partial z}{\partial r})(\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y})\\ &- (\frac{\partial^۲ z}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial^۲ z}{\partial\theta^۲}\frac{\partial\theta}{\partial y})(\frac{\sin\theta}{r})-(\frac{\partial z}{\partial\theta})(\frac{\partial(\frac{\sin\theta}{r})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\sin\theta}{r})}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y})\end{aligned}$$

و مجدداً با استفاده از (۲۲):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ z}{\partial y\partial x} &= (\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲}\sin\theta+\frac{\partial^۲ z}{\partial\theta\partial r}\frac{\cos\theta}{r})\cos\theta+(\frac{\partial z}{\partial r})(-\sin\theta)(\frac{\cos\theta}{r})\\ &- (\frac{\partial^۲ z}{\partial r\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial^۲ z}{\partial\theta^۲}\frac{\cos\theta}{r})(\frac{\sin\theta}{r})-(\frac{\partial z}{\partial\theta})((\frac{-\sin\theta}{r^۲})\sin\theta+(\frac{\cos\theta}{r})(\frac{\cos\theta}{r}))\\ &= (\sin\theta)\frac{\partial^۲ z}{\partial r^۲}+(\frac{\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{r})\frac{\partial^۲ z}{\partial r\partial\theta}-\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{r^۲}\frac{\partial^۲ z}{\partial\theta^۲}-\frac{(\sin\theta)(\cos\theta)}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &+ (\frac{-\cos^۲\theta+\sin^۲\theta}{r^۲})\frac{\partial z}{\partial\theta}\end{aligned}$$

مثال ۴. (اصل بقاء انرژی) یک دستگاه تابع مکانیک نیوتنی در نظر می‌گیریم که حالت آن در لحظهٔ t با مختصات مکانی $(x_۱,\ldots,x_n)$ و مختصات سرعت $(v_۱,\ldots,v_n)$ مشخص شده باشد. مثلاً اگر k ذره تحت گرانش متقابل در حال حرکت باشند، $n=۳k$، $(x_۱,x_۲,x_۳)$ مختصات فضایی ذره اول، $(x_۴,x_۵,x_۶)$ مختصات فضایی ذره دوم، ... ، $(v_۱,v_۲,v_۳)$ مؤلفه‌های بردار سرعت ذره اول، و غیره، هستند. فرض اساسی فیزیکی این است که تابعی $U(x_۱,\ldots,x_n)$ (فقط تابع مختصات مکانی و موسوم به پتانسیل) وجود دارد که بردار نیرو، $\vec{F}$، به صورت زیر داده می‌شود:

$$\vec{F}=(F_۱,\ldots,F_n)=(-\frac{\partial U}{\partial x_۱},\ldots,-\frac{\partial U}{\partial x_n}) \qquad (۲۳)$$

تابع انرژی $E:\mathbb{R}^{۲n}\longrightarrow\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x_۱,\ldots,x_n,v_۱,\ldots,v_n)=U+\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}m_iv_i^۲$$

که در اینجا $m_۱,\ldots,m_n$ ثابت‌های مثبتی به نام جرم هستند. در مثال بالا $m_۱=m_۲=m_۳$ منسوب به ذره اول، $m_۴=m_۵=m_۶$ منسوب به ذره دوم، و غیره، است. اصل بقاء انرژی، که در اینجا با

فرض (۲۳) به صورت قضیه ثابت می‌شود، بیانگر این واقعیت است که E در طول تحول دستگاه ثابت می‌ماند. به بیان دیگر $(x_1,\ldots,x_n)$ و $(v_1,\ldots,v_n)$ در طی زمان تغییر می‌کنند ولی E که تابعی از این متغیرهاست همواره ثابت می‌ماند. حال هر یک از x_i ها و v_i ها خود تابعی از زمان است، پس نهایتاً می‌توان E را بر حسب t بیان کرد و اصل بقاء انرژی معادل این خواهد بود که:

$$\frac{dE}{dt}=0 \tag{۲۴}$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، (۱۹) داریم:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial E}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}+\frac{\partial E}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial E}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dt}$$

ولی $\frac{dx_i}{dt}=v_i$ و $\frac{dv_i}{dt}=a_i$ مؤلفهٔ iـــ ام بردار شتاب، $\vec{a}$، می‌باشد. طبق قانون نیوتن $\vec{F}=(m_1a_1,\ldots,m_na_n)$، پس:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}v_1+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}v_n+m_1v_1a_1+\cdots+m_nv_na_n\\ &= (-m_1a_1)v_1+\cdots+(-m_na_n)v_n+m_1v_1a_1+\cdots+m_nv_na_n \qquad (\text{طبق } (۲۳))\\ &= 0\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

<u>مثال ۵.</u> (قضیهٔ اویلر برای تابع‌های همگون) تابع را (به طور مثبت) <u>همگون از درجهٔ k</u> می‌نامیم (k عدد حقیقی داده شده) در صورتی که برای هر $t>0$ داشته باشیم:

$$f(tx_1,\ldots,tx_n)=t^kf(x_1,\ldots,x_n) \tag{۲۵}$$

به عنوان مثال، $f(x,y,z)=x^2y-z^3$ یک تابع همگون درجه ۳ است. رابطهٔ زیر برای تابع‌های همگون درجه k برقرار است و به قضیهٔ اویلر شهرت دارد:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=kf(x_1,\ldots,x_n) \tag{۲۶}$$

برای اثبات (۲۶) از دو طرف (۲۵) نسبت به t مشتق می‌گیریم. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، (۱۹) داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(D_if)(tx_1,\ldots,tx_n)\frac{d(tx_i)}{dt}=kt^{k-1}f(x_1,\ldots,x_n)$$

(توجه کنید که برای اجتناب از ابهام نماد $\frac{\partial f}{\partial x_i}$، از $D_i f$ استفاده کرده‌ایم). چون $\frac{d(tx_i)}{dt} = x_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} (D_i f)(tx_1, \ldots, tx_n) x_i = k t^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

در دو طرف قرار می‌دهیم $t = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) x_i = k f(x_1, \ldots, x_n)$$

همچنان که حکم بود.