فصل پنجم

تبدیل فوریه سیستم‌هاي زمان گسسته

۵-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان گسسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \qquad , \qquad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \qquad , \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega$$

۵-۲- خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

۵-۲-۱- خطي بودن

$$\begin{aligned} x_1[n] &\leftrightarrow X_1(j\Omega) \\ x_2[n] &\leftrightarrow X_2(j\Omega) \end{aligned} \Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

۵-۲-۲- شيفت زماني

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n}X(j\Omega)$$

۵-۲-۳- شيفت فركانسي

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n]e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

۵-۲-٤- مزدوج گيري (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$
$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سيگنال حقيقي و زوج $x[n]$ $\Rightarrow$ مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود $X(j\Omega)$

سيگنال حقيقي و فرد $x[n]$ $\Rightarrow$ مطلقا موهومي و فرد خواهد بود $X(j\Omega)$

۵-۲-۵- تفاضل گيري و مجموع گيري

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(j\Omega) \\ x[n-1] &\leftrightarrow e^{-j\Omega n}X(j\Omega) \end{aligned} \Rightarrow x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega n})X(j\Omega)$$

مثال ۱) تبديل فوريه سيگنال y[n] را بدست آوريد اگر:

$$Y(j\Omega)=? \quad , \quad y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m] \quad , \quad y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$$

$$\begin{cases} y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m] \\ y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$

$$y[n]\leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1]\leftrightarrow e^{-j\Omega}Y(j\Omega)$$

$$x[n]=y[n]-y[n-1]\leftrightarrow X(j\Omega)=y(j\Omega)-e^{-j\Omega}y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(j\Omega)$$

۵-۲-۶- تبديل فوريه تابع پله و ضربه

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$\delta[n]\overset{f}{\leftrightarrow}1$$

$$u[n]\overset{f}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۷- وارون زماني

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[-n]\leftrightarrow X(-j\Omega)$$

۵-۲-۸- گسترش زماني

توجه: اين خاصيت در گسسته برقرار نيست چون حاصل، يك سيگنال جديد است.

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[kn]\leftrightarrow ?\times$$

۵-۲-۹- مشتق‌گيري در فركانس

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow (jn)^{l}x[n]\leftrightarrow \frac{d^{l}X(j\Omega)}{d\Omega^{l}}$$

۵-۲-۱۰- ضرب و كانولوشن

$$x_1[n]\cdot x_2[n]\leftrightarrow X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(j\Omega) X_2(j(\Omega-\theta))$$

تذكر: $\otimes$ (كانولوشن متناوب) با كانولوشن ساده برابر است با اين تفاوت كه فقط در يك دوره تناوب محاسبه مي‌شود.

۵-۲-۱۱- دوگاني

توجه: در سيستم‌هاي زمان گسسته خاصيت دوگاني وجود ندارد چون n گسسته است اما Ω پيوسته است.

مثال ۲)

$$\delta[n] \xrightarrow{F} 1$$
$$? \xleftarrow[F^{-1}]{} 2\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۱۲- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left|X(j\Omega)\right|^2 d\Omega$$

۵-۳- تبديل فوريه توابع متناوب

$$x[n] = x[n+N]$$
$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

مثال ۳) مطلوبست تبديل فوريه توابع نمايي مختلط $e^{\pm j\Omega_0 n}$.

تبديل فوريه اين توابع با توجه به خواص محاسبه مي‌شوند

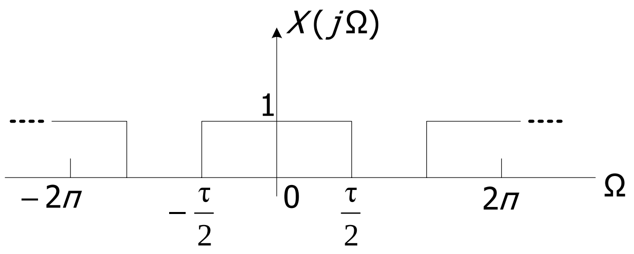
$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$
$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

مثال ٤) مطلوبست تبديل فوريه قطار ضربه $p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$.

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN) = \sum_{k=<N>}\frac{1}{N}e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow P(j\Omega) = \sum_{k=<N>}\frac{2\pi}{N}\delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناوب بودن سيگنال قطار ضربه ابتدا سري فوريه آن را محاسبه و سپس تبديل فوريه سيگنال را محاسبه مي‌كنيم.

مثال ٥) اگر $X(j\Omega) = rect(\frac{\Omega}{\tau})$. مطلوبست x[n]=?



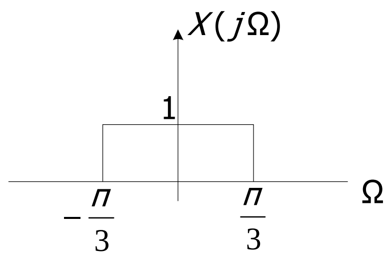
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Big|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi n}(e^{j\frac{\tau}{2}n} - e^{-j\frac{\tau}{2}n}) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n} \rightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau})$$

مثال ٦)

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} \rightarrow rect(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$



مثال ٧) با توجه به پاسخ ضربه $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$ مطلوبست:

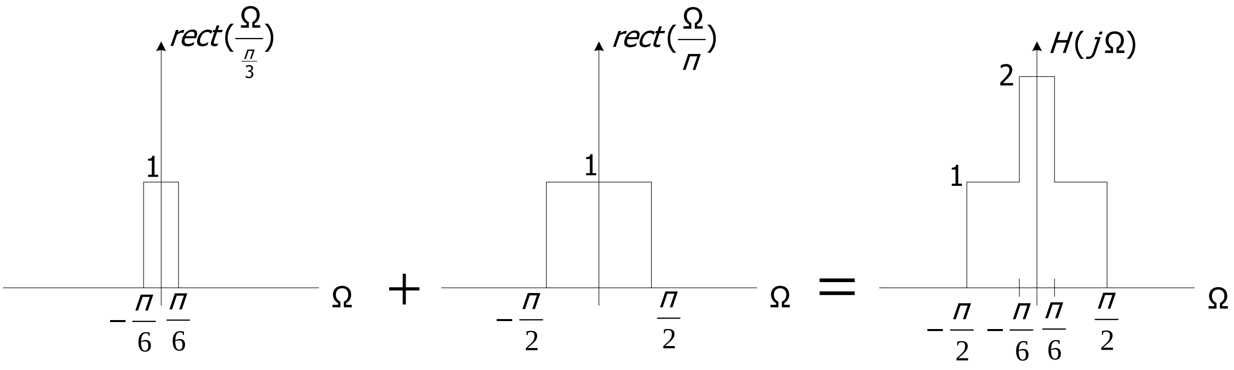
الف) پاسخ فركانسي سيستم $H(j\Omega)$.

ب) خروجي y[n] اگر ورودي $x[n] = 2\sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$.

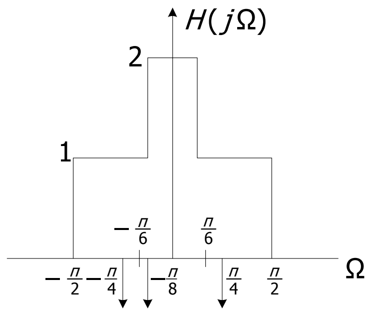
حل الف:

$$\text{داریم}\quad \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{n\pi} \leftrightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau=\frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau=\pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$$

$$h[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega)=rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}})+rect(\frac{\Omega}{\pi})$$



حل ب:



$$y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

$$x[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}n}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}n}-e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega)=2\pi\times(\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})-\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$Y(j\Omega)=2\pi\times(\frac{1}{2j}H(j(\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2j}H(j(-\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-H(j(\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})$$

$$-H(j(-\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))=2\pi(2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})-\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$y[n]=2\sin(\frac{\pi}{8}n)-2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

يادآوري:

$$x[n]=\alpha^{n}u[n]\leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}\cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\quad ;\quad |\alpha|<1$$

$$x[n]=(-\alpha)^{n}u[n]\leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^{n}\cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1+\alpha e^{-j\Omega}}\quad ;\quad |\alpha|<1$$

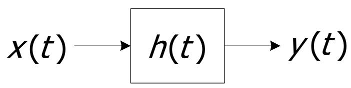
$$x[n]=\alpha^{n}u[-n]\leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}\alpha^{n}\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}e^{-j\Omega})^{n}=\frac{1}{1-\alpha^{-1}e^{-j\Omega}}\quad ;\quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

$$x[n]=(-\alpha)^{n}u[-n]\leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha)^{n}\cdot e^{-j\Omega n}$$

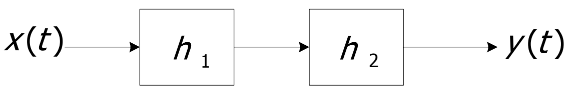
$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha^{-1}e^{j\Omega})^{n}=\frac{1}{1+\alpha^{-1}e^{j\Omega}}\quad ;\quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

٥-٤- سيستمهاي LTI و تبديل فوريه زمان پيوسته



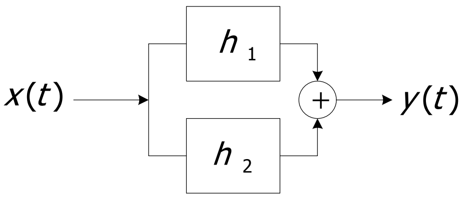
$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

اتصال سري:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

اتصال موازي:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

مثال ۱) تبديل فوريه تابع $h(t) = \dfrac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$ را بدست آوريد.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} = \frac{\sin(\frac{t}{\pi} \cdot \pi)}{\pi \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2\pi} \cdot \pi)}{\frac{t}{2\pi} \cdot 2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}) \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})$$

$$\xrightarrow{\text{داريم}} \begin{cases} \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$$

$$\tau = 2 \Rightarrow 2\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}) \to 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2})$$

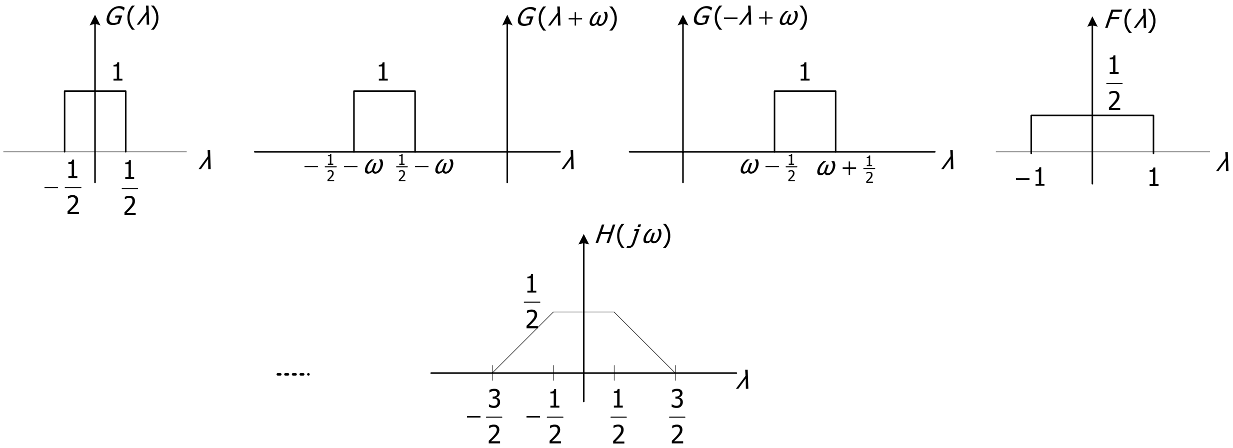
$$\tau = 1 \Rightarrow 1\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \to 2\pi\, rect(\frac{\omega}{1})$$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi})\cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \to \frac{1}{(2\pi)\,2}(\pi\, rect(\frac{\omega}{2}) * 2\pi\, rect(\frac{\omega}{1})) = \underbrace{\frac{1}{2} rect(\frac{\omega}{2})}_{F(\omega)} * \underbrace{rect(\frac{\omega}{1})}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\omega-\lambda) d\lambda$$

از روش گرافيكي حل مي‌كنيم:



مثال ۲) ورودي سيستم LTI و پاسخ ضربه سيستم در ذيل داده شده است. مطلوبست خروجي سيستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega) = rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\cdot rect(\frac{\omega}{2\omega_c})$$

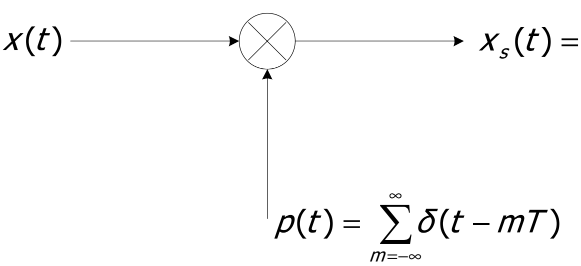
$$Y(j\omega) = \begin{cases} rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi}\,\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \\ rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \end{cases}$$

مثال ۳) اگر $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$ باشد، مطلوبست $X_s(j\omega)$ با استفاده از تئوري نمونه‌برداري؟

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

مثال ٤) از سيگنال $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ تحت شرايط زير نمونه‌برداري مي‌شود. مطلوبست تبديل فوريه سيگنال نمونه‌برداري شده $X_s(j\omega)$ ؟

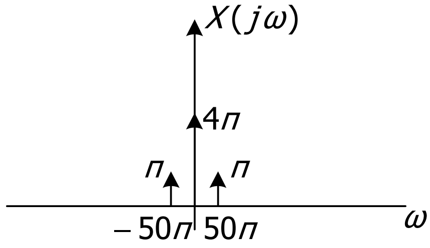


$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \Rightarrow X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

الف) $T = \frac{1}{100}$

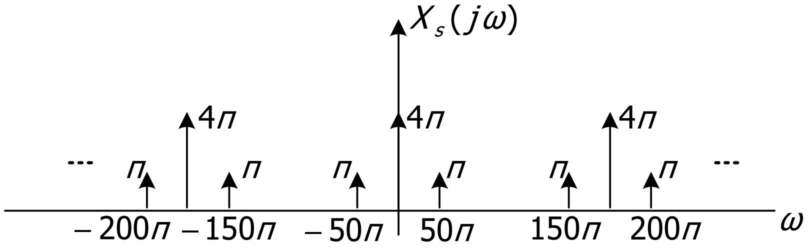
ب) $T = \frac{1}{40}$

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$



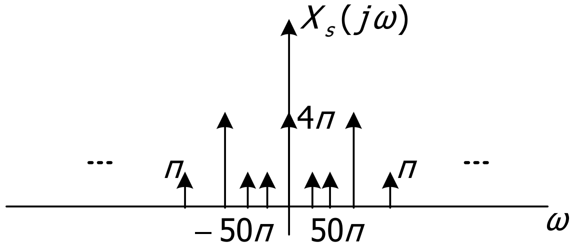
حل الف:

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$



حل ب:

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$



۵-۴-۱- سیستم‌هاي LTI با معادلات ديفرانسيل

بدست آوردن h(t) داراي اهميت زيادي است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

براي حل معادلات ديفرانسيل دو راه وجود دارد:

۱) ابتدا h(t) را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ که تبديل فوريه h(t) است را بدست مي‌آوريم.

۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس h(t) را با عکس تبديل فوريه گرفتن از $H(j\omega)$ بدست مي‌آوريم.

مثال ۵) پاسخ سيستم LTI زير به ورودي $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ داده شده است،

$$y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسي سيستم $H(j\omega)$

ب) پاسخ ضربه h(t)

ج) معادله ديفرانسيل ارتباط دهنده ورودي و خروجي

حل الف:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega} \quad , \quad Y(j\omega)=\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{4+j\omega}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2\left(\frac{3}{(1+j\omega)(4+j\omega)}\right)}{\frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega)=\frac{\frac{3}{2}}{2+j\omega}+\frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega} \Rightarrow h(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{9+3(j\omega)}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=9X(j\omega)+3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصيت مشتق زماني رابطه زير بدست مي‌آيد:

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=3x'(t)+9x(t)$$

مثال ٦) ورودي و خروجي يك سيستم LTI با معادله $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t)$ به هم مربوط مي‌شوند. مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h(t)

ب) اگر ورودي $x(t)=te^{-2t}u(t)$ خروجي را بدست آوريد.

حل الف:

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=2X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}=\frac{1}{(j\omega+2)}+\frac{-1}{(j\omega+4)}$$

$$\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

حل ب: چون x(t) و h(t) هر دو توابع پيچيده‌اي هستند به جاي استفاده از كانولوشن مي‌توان ابتدا تبديل فوريه هر دو را بدست آورد سپس با عكس تبديل فوريه گرفتن از $Y(j\omega)$ پاسخ زماني سيستم y(t) را بدست آورد.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \qquad ; \qquad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}\left(\frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\right) = \cdots$$

به روش تجزيه كسرها $Y(j\omega)$ بدست مي‌آيد و با استفاده از عكس تبديل فوريه y(t) محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) يك سيستم LTI و علي با پاسخ فركانسي $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ را در نظر بگيريد. براي يك ورودي خاص x(t) مشاهده مي‌شود كه خروجي به فرم $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ است.

مطلوبست ورودي x(t) ؟

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{1}{(3+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

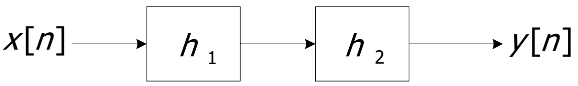
۵-۵- سيستم‌هاي LTI و تبديل فوريه زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

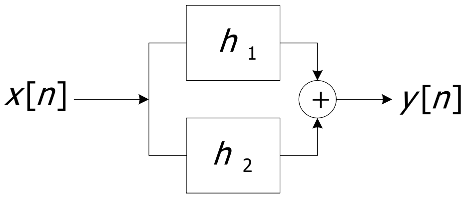
$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

اتصال سري:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) \cdot H_2(j\Omega)$$

اتصال موازي:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$$

۵-۱-۵- سيستم‌هاي LTI با معادلات تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سيستم LTI زمان گسسته علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h[n].

ب) پاسخ ضربه سيستم معكوس $h_I[n]$.

حل الف:

$$Y(j\Omega)+e^{-j\Omega}Y(j\Omega)+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}Y(j\Omega)=e^{-j\Omega}X(j\Omega)-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow (1+e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega})Y(j\Omega)=(e^{-j\Omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega})X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=\frac{e^{-j\Omega}(1-(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1-1))}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}-e^{-j\Omega}(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})+e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=2e^{-j\Omega}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}-\frac{e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\Rightarrow h[n]=2(-2n\,(-\frac{1}{2})^n u[n])-(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

حل ب:

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n]\leftrightarrow H(j\Omega)\cdot H_I(j\Omega)=1$$

$$H(j\Omega)=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$H_I(j\Omega)=\frac{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}(1+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}+e^{-j\Omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h_I[n]=(\frac{1}{2})^{n+1}u[n+1]+\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

مثال ۹) در يك سيستم LTI و علي با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوبست:

$$h[n]=a^{|n|}\quad,\quad 0<a<1$$

الف) پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$

ب) نوع فيلتر.

حل الف:

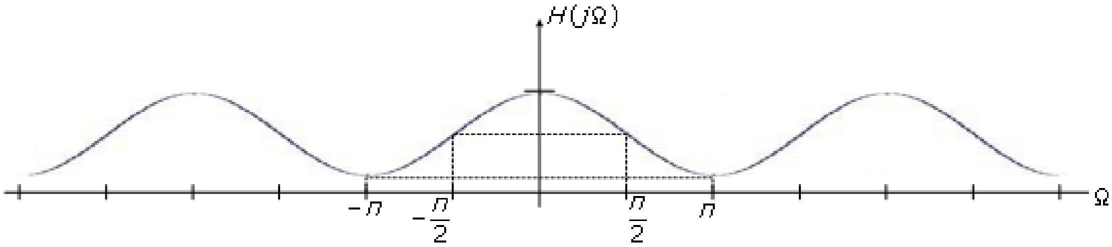
$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}\cdot e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a\,e^{j\Omega})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(a\,e^{-j\Omega})^n=\frac{a\,e^{j\Omega}}{1-a\,e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}}=\frac{a\,e^{j\Omega}(1-a\,e^{-j\Omega})+1-a\,e^{j\Omega}}{(1-a\,e^{j\Omega})(1-a\,e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{1-a^2}{a^2+1-ae^{-j\Omega}-ae^{j\Omega}}=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}$$

حل ب:

$$H(j\Omega)=\begin{cases}\dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}=\dfrac{1+a}{1-a} & \Omega=0\\[2mm] \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega=\pm\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2}=\dfrac{1-a}{1+a} & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذز LPF است.