فصل اول

معرفي سيگنال‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۱-۱- تعريف سيگنال

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

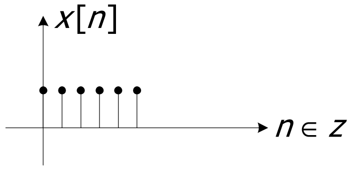
$x[n]$ سيگنال زمان گسسته $x(t)$ سيگنال زمان پيوسته

t, n متغيرهاي مستقل و x متغير وابسته يا تابع مي‌باشد.

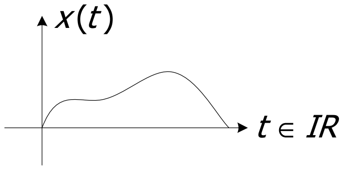
سيستم : مجموعه‌اي از اجزاي گرد آمده در كنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندي سيگنال‌ها

۱-۲-۱- سيگنال‌هاي زمان گسسته



۱-۲-۲- سيگنال‌هاي زمان پيوسته



بديهي است كه با نمونه‌برداري از سيگنال زمان پيوسته مي‌توان سيگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سيگنال‌هاي زوج و سيگنال‌هاي فرد

$x(t) = x(-t)$ Even , يا زوج $x[n] = x[-n]$

$x(t) = -x(-t)$ Odd ,يا فرد $x[n] = -x[-n]$

تذكر ۱: سيگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

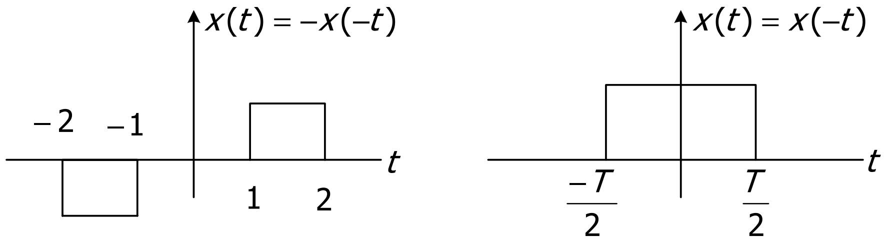
تذكر ۲: هر سيگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = Even(x(t)) + Odd(x(t))$$

$$Even(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$Odd(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

مثال ۱)



۱-۴- سيگنال متناوب

سيگنال متناوب به سيگنالي گفته مي‌شود كه در بازه‌هاي زماني مشخص عينا تكرار شده باشد.

$$x(t)=x(t+T)=x(t+kT) \qquad \omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \qquad k\in Z$$

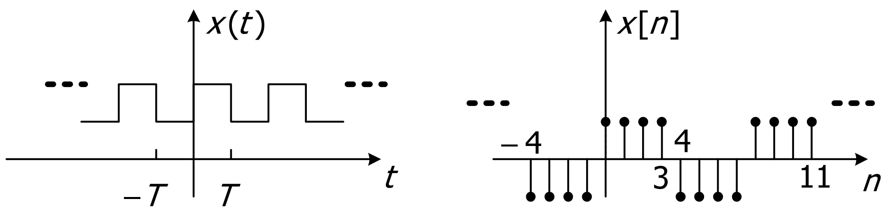
$$x[n]=x[n+N]=x[n+kN] \qquad \Omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{N} \qquad k\in Z$$

تذكر ۱: بديهي است كه اگر N , T دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذكر۲: كوچكترين دوره تناوب دوره تناوب اصلي است (T در پيوسته، N در گسسته) و فركانس تعريف شده با كوچكترين دوره تناوب، فركانس اصلي است. (ω_0 در پيوسته، Ω_0 در گسسته)

تذكر۳: دوره تناوب سيگنال زمان پيوسته (T) بايد عدد مثبت باشد، درحاليكه دوره تناوب سيگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بايستي صحيح نيز باشد.

مثال ۲)



دوره تناوب اصلي $2T$ **دوره تناوب اصلي** $N=8$

۱-۵- سيگنال‌هاي انرژي و توان

$$E=\sum_{-\infty}^{+\infty}x^2[n] \qquad E=\lim_{T\to\infty}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\,dt$$

انرژي

$$P_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt \qquad P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

توان متوسط

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژي شناخته مي‌شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۱-۶- عمليات روي متغير وابسته

(1) $y(t) = Ax(t) \qquad y[n] = Ax[n]$

(2) $y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

(3) $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$

(4) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$

(5) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, d\lambda \qquad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

۱-۷- عمليات روي متغير مستقل

۱-۷-۱- شيفت زماني

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad y[n] = x[n - n_0]$$

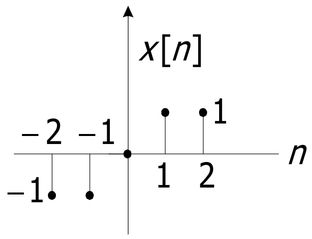
شيفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

شيفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

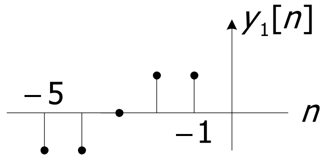
تذكر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سيگنال $x(t - t_0)$ از x(t) عقب‌تر است (به لحاظ زماني) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سيگنال $x(t - t_0)$ از x(t) جلوتر است.

تذكر ۲: در مورد سيگنال‌هاي زمان گسسته نيز بسته به اينكه n_0 مثبت و يا منفي باشد سيگنال x[n] را به راست و يا چپ به اندازه n_0 واحد شيفت مي‌دهيم تا y[n] بدست آيد.

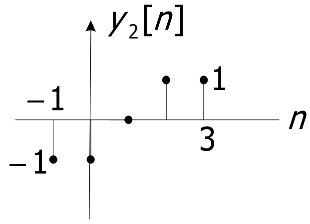
مثال ۳)



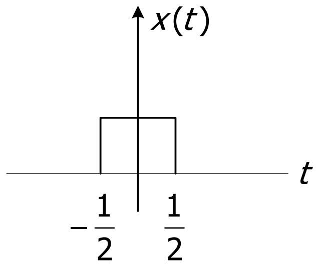
$y_1[n] = x[n+3]$



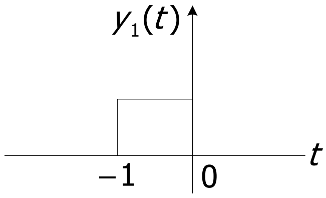
$y_2[n] = x[n-1]$



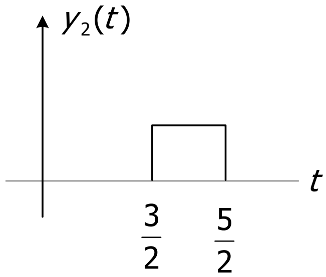
مثال ۴)



$y_1(t) = x(t+\frac{1}{2})$



$y_2(t) = x(t-2)$



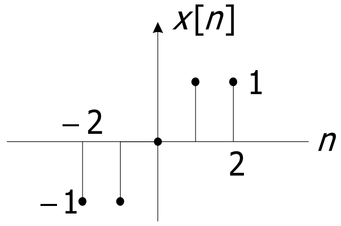
در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

۱-۷-۲- وارون‌سازي زماني

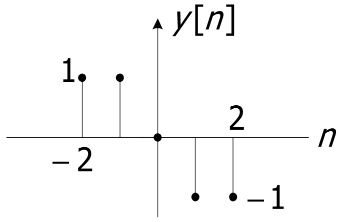
$$y(t) = x(-t) \qquad y[n] = x[-n] \tag{2}$$

x(-t) يا x[-n] انعكاس x(t) و يا x[n] نسبت به محور قائم هستند.

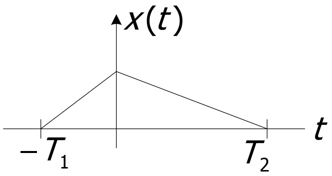
مثال ۵)

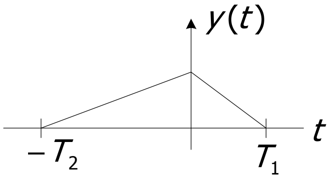


$y[n] = x[-n]$



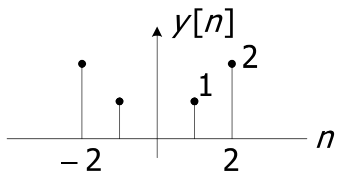
مثال ۶)



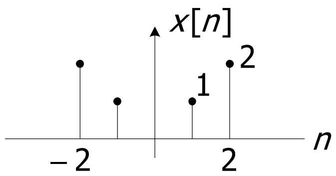


$y(t) = x(-t)$

مثال ۷)



$y[n] = x[-n]$



براي سيگنالي كه نه زوج و نه فرد است وارون زماني آن نه فرد و نه زوج است. اما براي سيگنال زوج وارون زماني زوج است ولي براي سيگنال فرد با توجه به خاصيت $x[n]= -x[-n]$ وارون زماني آن $-x[n]$ است.

۱-۷-۳- تغيير مقياس زماني

$$y(t) = x(at) \quad ; a \in IR \qquad (3)$$

$$y[n] = x[kn] \quad \text{يا} \quad y[n] = x[\frac{1}{k}n] \quad ; k \in Z$$

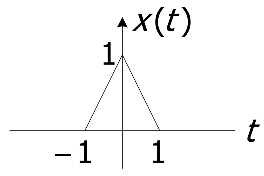
الف) اگر $|a|>1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سيگنال $x(t)$ خواهد بود.

ب) اگر $|a|<1$ باشد $y(t)$ باز شده سيگنال $x(t)$ خواهد بود.

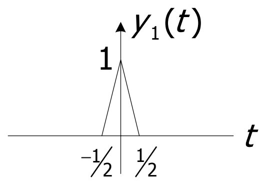
ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

تذكر: در زمان پيوسته ماهيت سيگنال عوض نمي‌شود، اما در زمان گسسته ماهيت سيگنال تغيير مي‌كند و سيگنال جديدي بدست مي‌آيد.

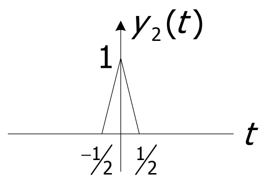
مثال ۸)



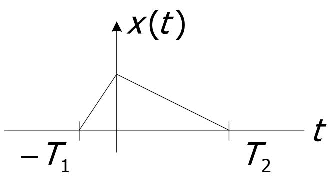
$y_1(t) = x(2t)$



$y_2(t) = x(-2t)$

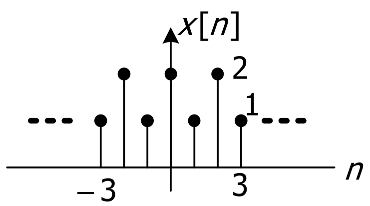


مثال ۹)



$$y(t) = x(-\frac{1}{2}t)$$

مثال ۱۰) $N = 2$, $y_1[n] = x[2n]$



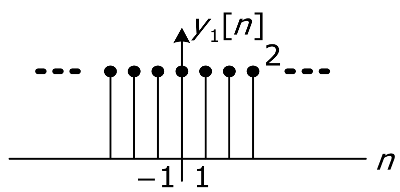
براي حل اينگونه مسائل به روش زير عمل مي‌كنيم:

با جايگذاري n در فرمول y[n] مقادير بدست آمده برحسب x[n] مي‌باشند.

$\vdots$

$y[-1] = x[-2] = 2$

$y[0] = x[0] =$



$y[1] = x[2] = 2$

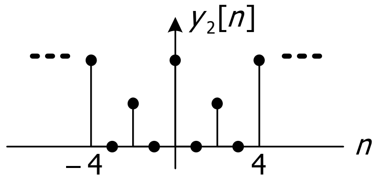
$y[2] = x[4]$

$\vdots$

دوره تناوب سيگنال جديد $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

تذکر: y[n]= x[kn] نسبت به x[n] فشرده شده، که برخي از مقادير را از دست مي‌دهد.

مثال ۱۱) $y_2[n] = x[\frac{1}{2}n]$



$$\vdots$$
$$y[-1] = 0$$
$$y[0] = x[0] = 2$$
$$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$$
$$y[2] = x[1] = 1$$
$$\vdots$$

دوره تناوب سيگنال جديد برابر $N = 4$ است.

تذکر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده که در نتيجه تعدادي صفر به y[n] اضافه خواهد شد. بدين ترتيب ماهيت سيگنال گسسته در اثر تغيير مقياس زماني تغيير مي‌کند.

تذکر: اگر سيگنال زمان پيوسته و يا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغيير مقياس زماني در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سيگنال جديد کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سيگنال جديد افزايش مي‌يابد.

۱-۷-۴- رسم سيگنال به روش منظم

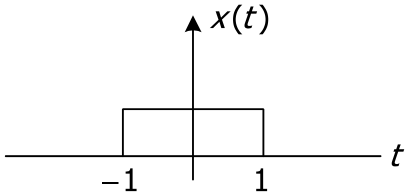
4)

$$y[n] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$
$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n - n_0]$$
$$v[n] \rightarrow y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

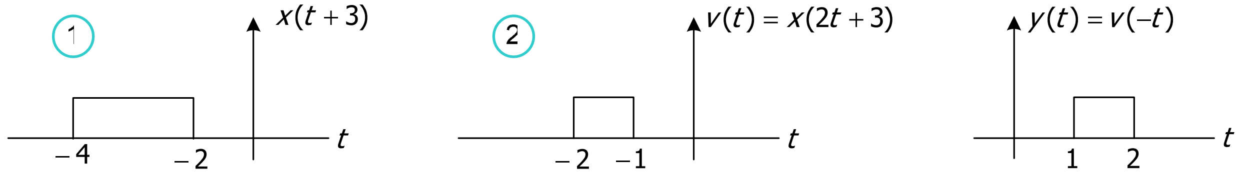
4)

$$y(t) = x(at - b)$$
$$x(t) \rightarrow v(t) = x(t - b)$$
$$\boldsymbol{v(t) \rightarrow y(t) = v(at) = x(at - b)}$$

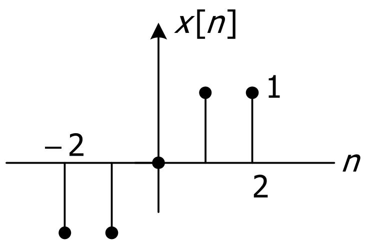
مثال ۱۲)



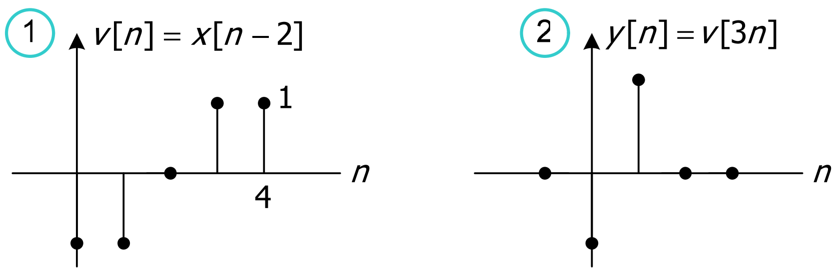
$y(t) = x(-2t + 3) = ?$



مثال ۱۳)

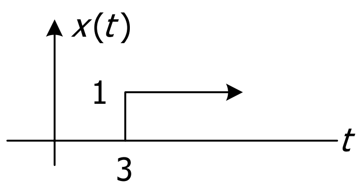


$$y[n]=x[3n-2]=?$$

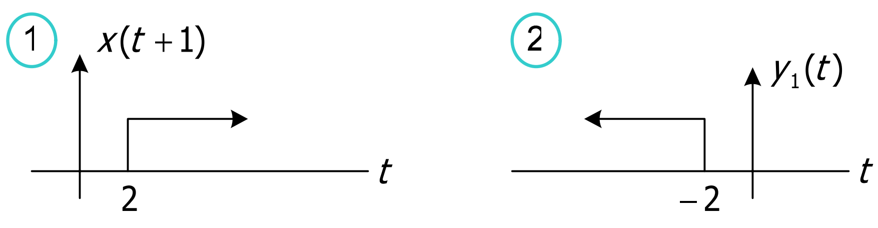


مثال ۱۴)

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<3\\ 1 & t\geq 3\end{cases}$$

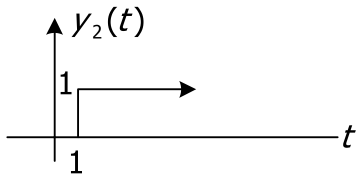


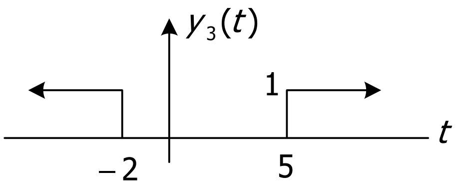
الف) $y_1(t)=x(1-t)$



ج) $y_3(t)=x(1-t)+x(t-2)$

ب) $y_2(t)=x(3t)$

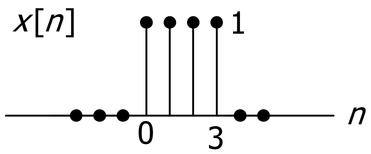


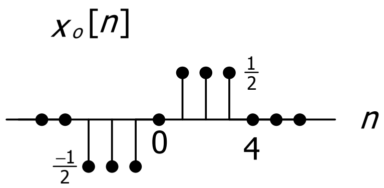


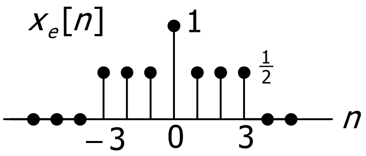
مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

میدانیم
$$\begin{cases}x_e=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])\\ x_o=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])\end{cases}$$





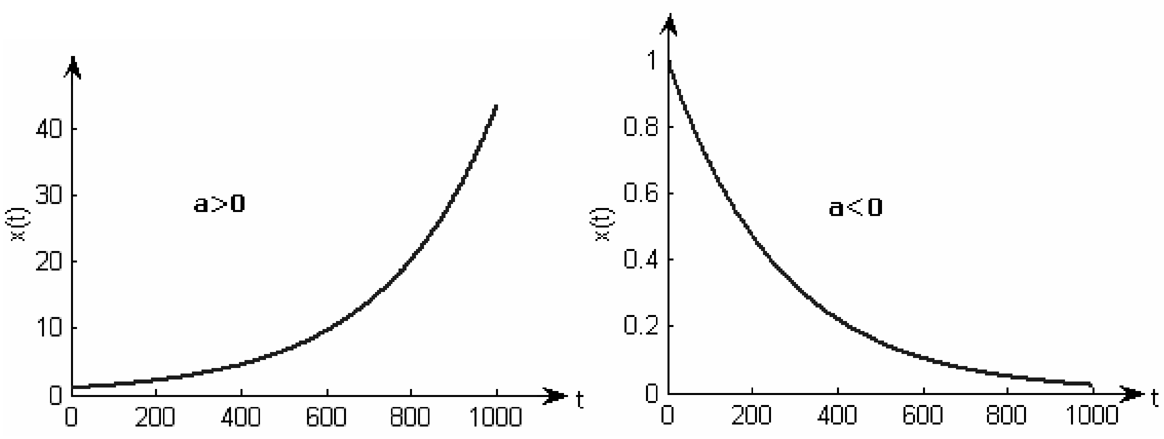


۱-۸- معرفي سيگنال‌هاي مهم

در اين قسمت چند سيگنال اساسي زمان پيوسته و زمان گسسته را معرفي مي‌کنيم. اين سيگنال‌ها نه تنها به دفعات پيش مي‌آيند بلکه توسط آنها مي‌توان سيگنال‌هاي پيچيده‌اي را فرموله و توليد کرد. مهم‌ترين کاربرد آنها در آزمايشگاه مشخص مي‌شود.

۱-۸-۱- سيگنال نمايي

زمان پيوسته $x(t) = Be^{at}$



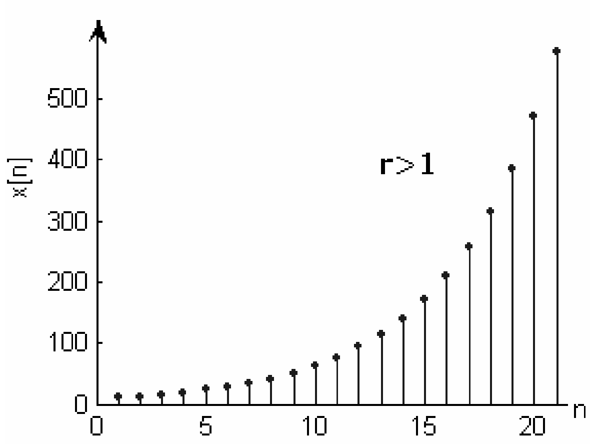
ب) نمايي افزايشي الف) نمايي کاهشي

با فرض اينکه $a, B \in IR$ باشند، با توجه به مثبت و يا منفي بودن a سيگنال نمايي به يکي از دو فرم افزايشي و يا کاهشي خواهد بود.

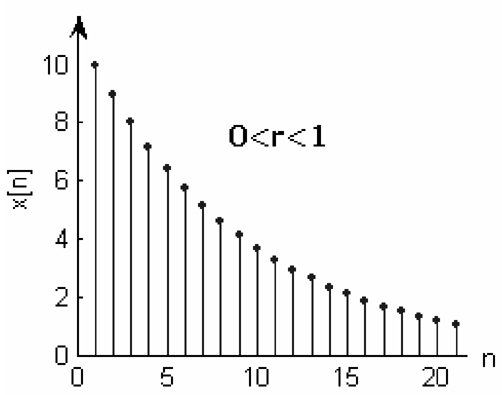
تذکر: چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي‌شود.

سگنال زمان گسسته $x[n] = B(r^n)$

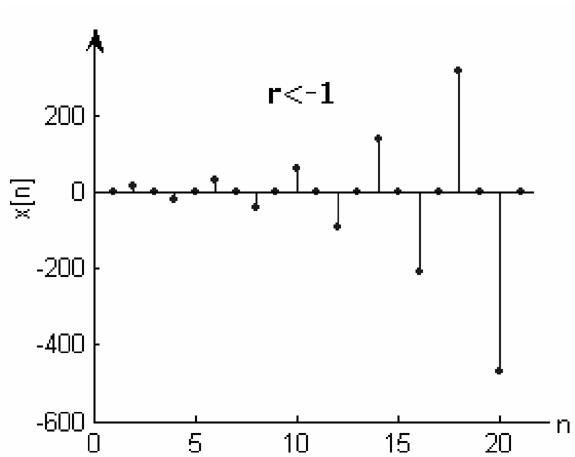
سيگنال زمان گسسته نمايي بسته به مقادير مختلف r چهار حالت مي‌تواند داشته باشد.



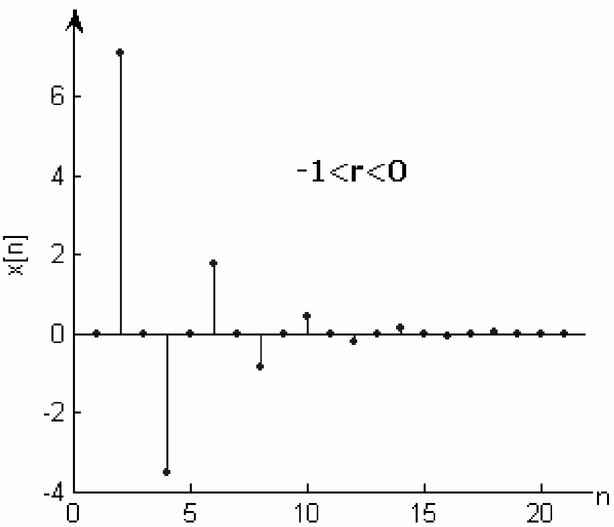
الف) نمايي افزايشي



ب) نمايي کاهشي



ج) نوساني افزايشي



د) نوساني کاهشي

۱-۸-۲- سيگنال سينوسي

زمان پيوسته $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ و $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

تذکر: سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال ۱)

الف) $x(t) = \cos(\frac{1}{6}t)$

$$\to T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

ب) $x(t)=\cos(\frac{8\pi}{31}t)$

$$\rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}$$

سيگنال زمان گسسته $x[n]=A\cos(\Omega n+\varphi)$ و $\Omega=2\pi f=\frac{2\pi}{N}$

تذكر: سيگنال زمان گسسته سينوسي به شرطي متناوب است كه بتوان $N\in Z^{+}$ را بدست آورد به نحوي كه $x[n]=x[n+N]$ گردد. (اين سيگنال برخلاف سيگنال زمان پيوسته سينوسي بعضا متناوب نيست.)

$$A\cos(\Omega n+\varphi)=A\cos(\Omega n+\Omega N+\varphi)\rightarrow \Omega N=2k\pi \quad , \quad k\in Z\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\Omega}, N\in Z^{+}$$

مثال ۲)

الف)

$$x[n]=\cos[\frac{2\pi}{12}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}}=12k=12$$, (k=1)

ب)

$$x[n]=\cos[\frac{8\pi}{31}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}}=\frac{31}{4}k=31$$,(k=4)

ج)

$$x[n]=\cos[\frac{1}{6}n]\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{1}{6}}=12k\pi$$ متناوب نيست

۱-۸-۳- سيگنال نمايي مختلط

زمان پيوسته $x(t)=B\,e^{-j\omega t}$ يا $x(t)=Be^{j\omega t}$

$$x(t)=B\,e^{j\omega t}=B\cos(\omega t)+jB\sin(\omega t) \quad , \quad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

زمان گسسته $x[n]=B\,e^{-j\Omega n}$ يا $x[n]=Be^{+j\Omega n}$

$$N\in Z^{+}, K\in Z \quad , \quad N=\frac{2k\pi}{\Omega} \qquad x[n]=B\,e^{j\Omega n}=B\cos(\Omega n)+jB\sin(\Omega n)$$

تذكر ۱: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n]=Be^{+j\Omega n}$ مي‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n]=Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اينکه در زمان نسبت به n مي‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نيز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n}=e^{j(\Omega+2\pi)n}=e^{j(\Omega+4\pi)n}=e^{j(\Omega+2m\pi)n}\ ,\quad m\in z$$

تذکر ۳: اگر سيگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان بايد به حاصل جمع دو سيگنال تبديل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترك را به دست مي‌آوريم.

مثال ۳)

الف) $x(t)=e^{j2t}+e^{j3t}$

$$T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi,2\pi,3\pi,4\pi,\ldots\quad ,\quad T_2=\frac{2\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}=\ldots\quad\Rightarrow T=2\pi$$

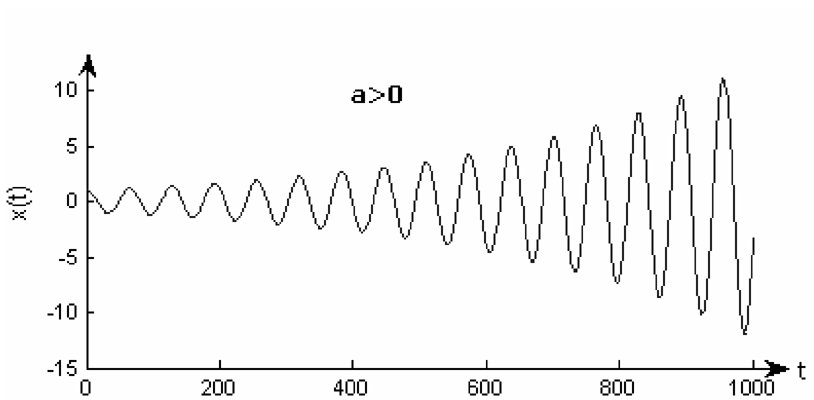
ب) $x[n]=e^{j\frac{2\pi}{3}n}+e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1=\frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3k=3=6=9=\ldots=24\quad ,\quad N_2=\frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}}=\frac{8k}{3}=8=16=24=\ldots\qquad N=24$$

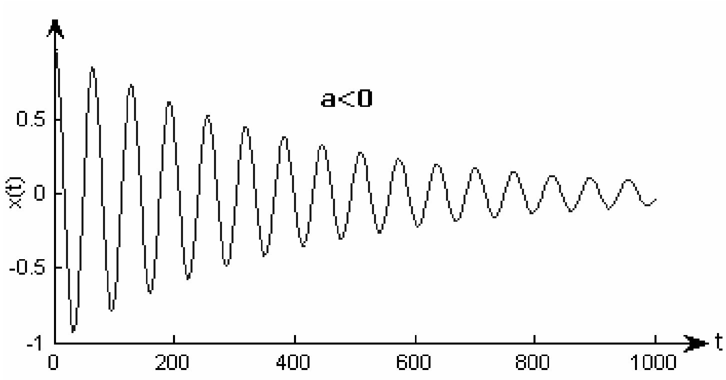
۱-۸-۴- سيگنال سينوسي ميراشونده

زمان پيوسته $x(t)=Be^{at}\cos(\omega t+\varphi)$

تذکر: سيگنال نمايي متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتي باعث مي‌شود که سيگنال نهايي متناوب نباشد.

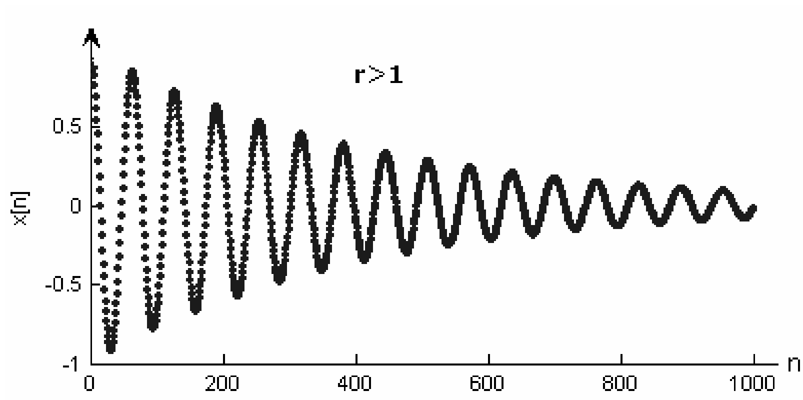


الف) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

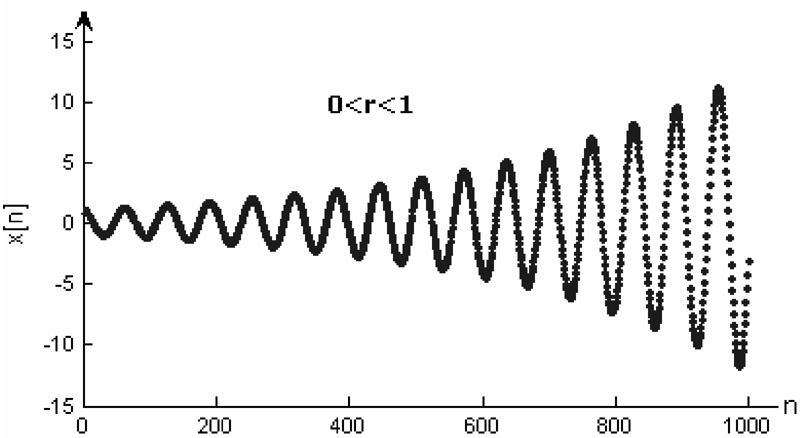


ب) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي

زمان گسسته $x[n] = B(r^n)\cos[\Omega n + \varphi]$



الف) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي



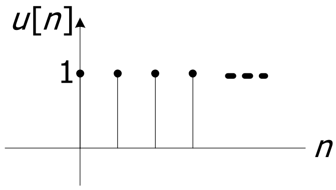
ب) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

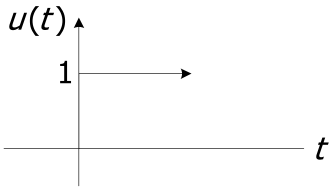
۱-۹-توابع ویژه

۱-۹-۱-تابع پله واحد

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$
زمان گسسته

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$
زمان پیوسته

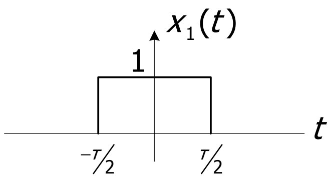




تذکر: توابعي که فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب تابع پله بیان کرد:

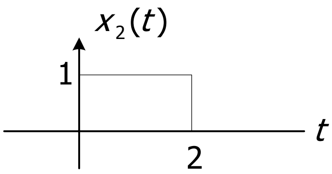
مثال ٤)

الف)



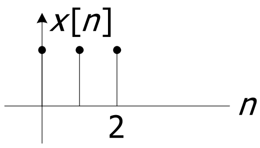
$$x_1(t)=u(t+\tfrac{T}{2})-u(t-\tfrac{T}{2})$$

ب)



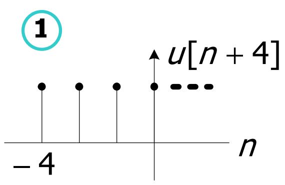
$$x_2(t)=u(t)-u(t-2)$$

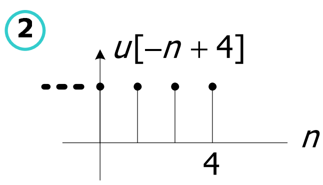
ج)



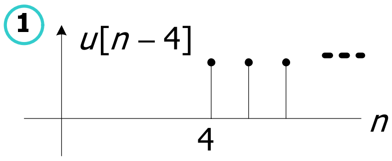
$$x[n]=u[n]-u[n-3]$$

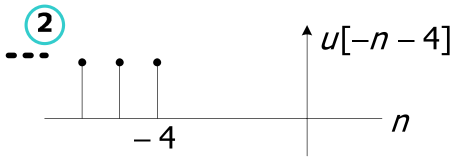
د) $u[-n+4]$





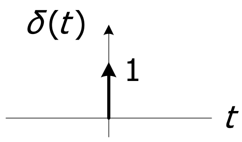
ن) $u[-n-4]$





۱-۹-۲-تابع ضربه

زمان پیوسته



$$\delta(t)=\begin{cases}\text{مقدارویژه} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{-1}\delta(t)dt=0$$

رابطه بين تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau$$

$$\lambda+t_0=\tau$$

-خواص:

۱) بيان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه:

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 0\\ 0 & o.w\end{cases} \quad \Rightarrow y(t)=x(t)u(t)$$

مثال ۵)

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 2\\ 0 & o.w\end{cases} \quad \Rightarrow y(t)=x(t)u(t-2)$$

۲) خاصيت غربالي تابع ضربه

$$x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)$$

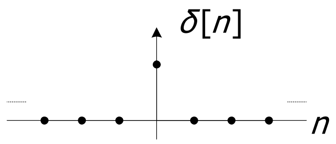
٤) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

۵*)

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

زمان گسسته



$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\dots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad\qquad \delta[n]=u[-n]-u[-n-1]$$

تابع ضربه چون تابعي زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

۱) بیان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & n\le -2\\ 0 & o.w\end{cases} = x[n]u[-n-2]$$

۲) خاصیت غربالي تابع ضربه

* این رابطه را اثبات کنید.

$$y[n] = x[n]\cdot\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳)انتگرال کانولوشن

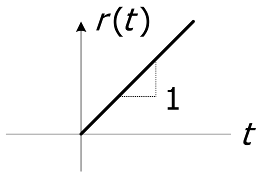
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] = x[n]$$

4) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

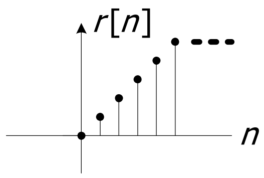


$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad r(t) = t\,u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\,d\lambda$$

زمان گسسته



$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

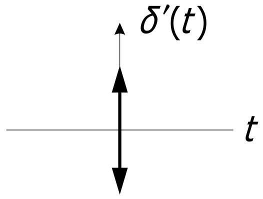
رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u[n] = ? \qquad r[n] = n\,u[n]$$

۱-۹-٤- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

خاصيت ۱)

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

اثبات:

$$(x(t)\cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$\text{if } f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow \qquad = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\,\delta(t))'$$

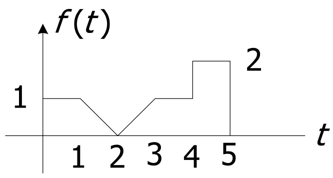
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصيت ۲)

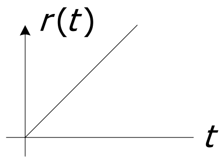
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

مثال ۷) مطلوب است بيان f(t) بر حسب توابع ويژه ؟

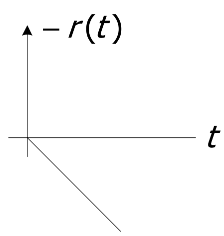


از منتهي اليه سمت چپ شروع به نوشتن مي‌كنيم. هر جا كه شكل تغيير كند يعني تابع عوض شده. اولين كاري كه انجام مي‌دهيم ضريب زاويه كليه خطها را بدست مي‌آوريم :

در فاصله $1 \le t \le 2$ شكل تغيير كرده و داراي شيب به سمت پايين است. در فاصله $2 \le t \le 3$ نيز شكل دوباره تغيير مي‌كند.



$$\begin{matrix}(2,0)\\(3,1)\end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix}(1,1)\\(2,0)\end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) \_ 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a\,e^{-t}$ هر یك از توابع زیر را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم کنید.

الف) $f_1(t) = f(t)\,u(t)$

حل

$$f_1'(t) = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$$
$$= f'(t)\,u(t) + f(0)\,\delta(t) + -a\,e^{-t}\,u(t) + a\,\delta(t)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} a\,e^{-t}\,dt = -a\,e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = a$$

ب) $f_2(t) = f(t-1)\,u(t-2)$

ج) $f_3(t) = f(t-1)\,u(t-1)$

د) $f_4(t) = f(t-1)\,u(t)$

سيستم و تعريف آن :

پروسه‌اي كه باعث تغيير و تحول در يك سيگنال مي‌شود .

مجموعه‌اي منظم كه به كمك يكديگر هدف مشخصي را برآورده مي‌سازد.

بيان روابط بين خروجي و ورودي در يك سيستم :

زمان پيوسته

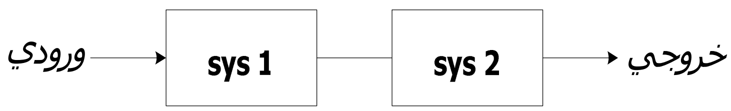
۱) با استفاده از معادلات ديفرانسيل ۲) تابع تبديل

زمان گسسته

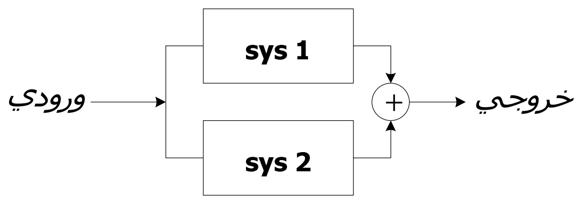
۱) معادلات تفاضلي ۲) تابع تبديل

۱-۱۰- تقسيم‌بندي سيستم‌ها

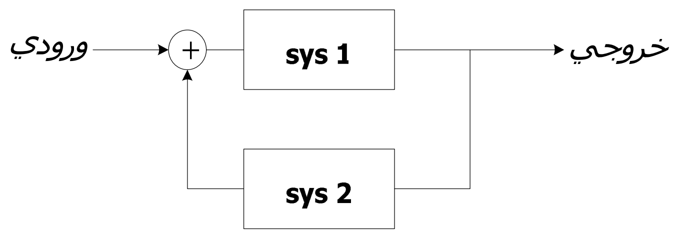
۱-۱۰-۱- اتصال سري:



۱-۱۰-۲- اتصال موازي:



۱-۱۰-۳- اتصال فيدبك:



۱-۱۱- خواص سيستم‌ها

۱-۱۱-۱- حافظه

سیستم بدون حافظه است اگر خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه بستگي داشته باشد. به عبارت ديگر سيستم با حافظه است اگر خروجي به مقادير گذشته ورودي وابسته باشد.

مثال ۱)

الف) $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$ بدون حافظه

ب) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ با حافظه

ج) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ با حافظه

د) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$ بدون حافظه

ن) $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\lambda)\, d\lambda$ باحافظه

و) $v_L(t) = L\frac{di_l(t)}{dt}$ با حافظه

۱-۱۱-۲- پايداري (BIBO[1])

سيستمي پايدار است كه به ازاي ورودي محدود خروجي محدود بدهد.

$$|x(t)| \le M_x < \infty ,\ \forall t \Rightarrow |y(t)| \le M_y < \infty ,\ \forall t$$

تذكر ۱: اگر سيستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتيم اين سيستم ناپايدار است.

تذكر ۲: اگر سيستمي با ورودي نامحدود و خروجي نامحدود داشتيم هيچ صحبتي نمي‌توان راجع به اين سيستم كرد.

[1] Bounded Input Bounded Output

مثال ۲) $y(t) = t\,x(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$y(t) = t\,u(t) = r(t)$ و $r(t)$ تابعي نامحدود است پس سيستم ناپايدار است.

مثال ۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$$|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{x(t)} \le M_y < \infty$$

چون $e^{x(t)}$ عدد مي‌شود پس باز هم محدود است. بنابراين با توجه به تعريف رياضي اين سيستم پايدار است.

مثال ٤)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شيفت يافته‌هاي آن هم محدود است پس سيستم پايدار است

مثال ٥)

$$y[n] = r^n\ x[n] \begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty : x[n] = u[n] \to y[n] \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow \text{ناپايدار} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \text{پايدار} \end{cases}$$

مثال ۶)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \to x[n] = u[n] \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = r[n]$$

ناپايدار

۱-۱۱-۳- عليت (causality)

سيستمي علي است كه خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه يا لحظات قبل بستگي داشته باشد به عبارتي خروجي سيستم به آينده ورودي بستگي ندارد.

تذكر ۱: سيستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

تذكر ۲: براي سيستم علي شرط سكون برقرار است.

شرط سكون:

$$x(t) = 0; \quad t \le t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \ t \le t_0$$

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \le t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \le t_0$$

مثال ۷)

الف) $y(t) = x(t+1)$ غیرعلي

ب) $v_c(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\,d\tau$ علي

ج)

$$i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt} \quad ; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t) - v_c(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t+\Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

با توجه به اين كه براي مشتق دو تعريف وجود دارد چنانچه از دومين تعريف براي تعيين جريان خازن استفاده نمائيم سيستم مذكور غيرعلي خواهد بود.

د) $y(t) = x(t)\cos(t+1)$

خروجي فقط به زمان حال ورودي بستگي دارد و ازطرفي چون سيستم بدون حافظه است پس حتما علي است.

ه) $y[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + x[n-1] + \dots$ علی

ن) $y[n] = x[-n] \qquad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1]$ غیر علی

و) $y[n] = \dfrac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ علی

ی) $y[n] = \dfrac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$ غیر علی

۱-۱۱-۴- معكوس‌پذيري

سيستمي معكوس‌پذير است كه به ازاي ورودي‌هاي متمايز همواره خروجي‌هاي متماير داشته باشد.

اگر سيستمي معكوس‌پذير باشد مي‌توان به صورت زير نشان داد:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys} - \boxed{sys^{-1}} \longrightarrow x(t)$$

مثال۴:

الف) $y(t) = 2x(t)$ معكوس‌پذير

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\times 2} - \boxed{\times \frac{1}{2}} \longrightarrow x(t)$$

ب)

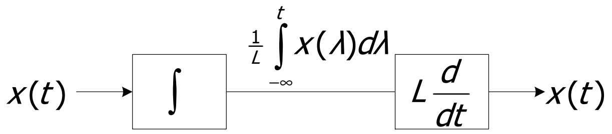
$$y(t) = x^2(t) \qquad \begin{cases} x(t)=1 \\ \\ x(t)=-1 \end{cases} \Rightarrow y(t)=1$$

معکوس ناپذير

ج)

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

بايد ورودي بدهيم که خروجي را از حالت پايدار خارج نکند.



ن)

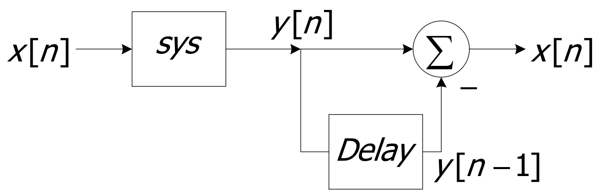
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

چون به ازاي همه وردي‌هاي ثابت خروجي صفر مي‌شود پس معکوس‌پذير نيست.

و)

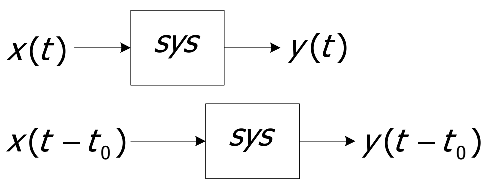
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \qquad \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$



۱-۱۱-۵- نامتغير با زمان (TI) Time invariant

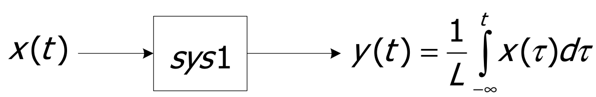
اگر رفتار و مشخصه‌هاي سيستم در طي زمان ثابت باشد. به آن سيستم، نامتغير با زمان گفته مي‌شود.



مثال ۵)

الف)

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



با توجه به تعریف اگر شیفت یافته ورودي را به سیستم اعمال کنیم خروجي هم به همان اندازه شیفت پیدا کند، سیستم مورد نظر نامتغیر با زمان خواهد بود.

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys1} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)d\tau$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \quad \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(t-t_0)\,d\tau \underset{t-t_0=\lambda}{=} \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau$$

$$\text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)\,d\lambda \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

نامتغیربازمان

ب)

$$y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{R(t-t_0)}x(t-t_0)$$

متغیر با زمان

ج)

$$y(t) = t\,x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow y(t) = t\,x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow \text{خروجي} = t\,z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = t\,x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} (t-t_0)x(t-t_0)$$

متغیر با زمان

د)

$$y(t) = x(at)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow \text{خروجي} = z(at)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = x(at-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

متغير با زمان $\overset{?}{=} x(a(t-t_0))$

ن) $y[n] = r^n x[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{sys5} \longrightarrow y[n] = r^n\, x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{sys5} \longrightarrow \text{خروجي} = r^n\, z[n]$$

$$z[n] = x[n-n_0] \Rightarrow \text{خروجي} = r^n\, x[n-n_0] \overset{?}{=} y[n-n_0]$$

متغير با زمان $\overset{?}{=} r^{n-n_0} x[n-n_0]$

ه) $y[n] = nx[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{sys6} \longrightarrow y[n] = n\, x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{sys6} \longrightarrow \text{خروجي} = n\, z[n]$$

$$z[n] = x[n-n_0] \Rightarrow \text{خروجي} = n x[n-n_0] \overset{?}{=} y[n-n_0]$$

متغير با زمان $\overset{?}{=} (n-n_0) x[n-n_0]$

۱-۱۱-۶- خطي بودن

سيستم خطي به سيستمي گفته مي‌شود كه اصل جمع آثار براي آن صدق كند.

شرط خطي بودن:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y(t) \\ x_1(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_2(t) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1)\; x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) & ;\text{جمع آثار} \\ 2)\; ax(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow ay(t) & ;\text{همگني} \end{array}\right.$$

تذكر: در برقراري همگني ضريب ثابت a هر عددي مي‌تواند باشد، حتي عدد مختلط.

مثال ۶)

الف) $y(t) = x^2(t)$ غيرخطي

$$(x_1 + x_2) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

ب) $y(t) = x(t)x(t-1)$ غيرخطي

$$ax(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

۳) $y(t) = \sin(x(t))$ غيرخطي است چون توابع $\sin, \cos$ غيرخطي هستند.

ج)
$$y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$a\,x(t) = a \rightarrow y(t) = 1$ خاصيت همگني نقض شده پس غيرخطي است.

د) $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$
$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = a\,y[n]$$

خطي

ه) $y[n] = \text{Real}(x[n])$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$
$$a\,x[n] = a(r + js) \Rightarrow if\ a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$$

غيرخطي

ن) $y[n] = 2x[n] + 3$

غيرخطي

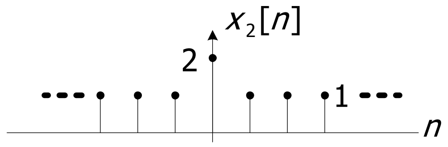
$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$
$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

نمونه مسائل فصل

۱- تعیین کنید کدام یك از سیگنال هاي زیر متناوبند؟

الف) $$x_2[n] = u[n] + u[-n]$$

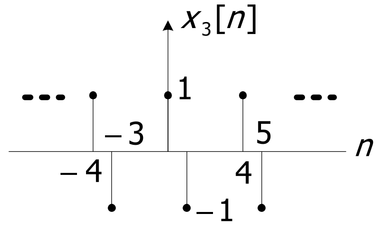
یك راه تشخیص متناوب بودن رسم سیگنال است.



وجود یك ناپیوستگي در نقطه صفر باعث مي‌شود كه نامتناوب شود.

ب) $$x_3[n] = \sum \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]$$

در هر دوره تناوب $N = 4$ ، ۲ ضربه را شامل شده است.



ج) $$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7\ (k=1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5\ , (k=1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعیین کنید کدام یك از سیگنال‌هاي زیر معکوس‌پذیر است؟

الف) $$y[n] = x[n]\, x[n-2]$$

$$x[n] = A\delta[n]\ ,\ y[n] = A^2\delta[n]\,\delta[n-2] = 0\ ,\ x[n] = \delta[n-3]$$
$$\Rightarrow y[n] = \delta[n-3]\delta[n-5] = 0$$

حافظه‌دار است ولي معکوس‌پذیر نیست.

ب) $$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \ge 0 \\ x[n] & n \le -1 \end{cases}$$

$$= x[n+1]u[n] + x[n]u[-n-1]\ ,$$

$$if\ \ x[n]=u[n] \Rightarrow y[n]=\underbrace{u[n+1]\,u[n]}_{\substack{n\geq -1\,,\,n\geq 0 \\ =u[n]}}+\underbrace{u[n]\,u[-n-1]}_{\substack{n\geq 0\,,\,n\leq -1 \\ =0}}=u[n]$$

$$if\ \ x[n]=u[n-1] \Rightarrow y[n]=\underbrace{u[n]\,u[n]}_{\underbrace{n\geq 0,n\geq 0}_{u[n]}}+\underbrace{u[n-1]\,u[-n-1]}_{\underbrace{n\geq 1,n\leq -1}_{=0}}=u[n]$$

معکوس‌پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس‌پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1 \\ 0 & n=0 \\ x[n] & n\leq -1 \end{cases}$$

۱-۱۲- خلاصه

سیگنال تابعي است که حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فیزیکي يك سیستم است.
هر سیگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت.
در بسیاري از مسائل با استفاده از شیفت زماني مي‌توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد.
کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلي است و فرکانس متناسب با دوره تناوب اصلي فرکانس اصلي است.
توابعي که فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد.
توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر به‌فردي دارند.
اگر سیستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.
سیستم بدون حافظه مطمئنا علي است.