

یک رؤیت‌گر حالت با همگرایی نمایی برای سیستم‌های سینگولار

مسعود شفیعی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی برق

E-mail: drmadady@yahoo.com

علی مددی
دانشگاه تفرش
دانشکده مهندسی برق

چکیده - در این مقاله یک رؤیت‌گر جدید برای تخمین بردار حالت سیستم‌های سینگولار پیوسته- زمان ارائه می‌شود. ثابت می‌گردد که اگر سیستم سینگولار مورد نظر رؤیت‌پذیر بوده و اندازه‌گیری‌های کافی مستقل در اختیار داشته باشیم آنگاه رؤیت‌گر پیشنهادی دارای همگرایی نمایی است و در آن می‌توان ضریب میرایی خطای بین سیستم و رؤیت‌گر را بطور دلخواه تعیین کرد. با ارائه یک مثال شبیه سازی عملکرد رؤیت‌گر پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلید واژه- سیستم‌های سینگولار، رؤیت‌گر حالت، تخمین حالت، همگرایی نمایی.

۱- مقدمه

سیستم‌های سینگولار با ورودی همراه با اغتشاش در [4] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [5] طراحی تخمین‌گر حالت برای دسته خاصی از سیستم‌ها سینگولار غیر خطی بررسی شده است. موضوع رفتار ایمپالسی رؤیت‌گرهای Luenberger برای سیستم‌های سینگولار خطی ثابت با زمان در [6] مورد آنالیز قرار گرفته است. در [7] نوعی رؤیت‌گر حالت برای سیستم‌های سینگولار خطی متغیر با زمان پیشنهاد شده که با آلوگوریتم‌های عددی قابل پیاده‌سازی است. مسئله طراحی رؤیت‌گر Luenberger به صورت پارامتری برای سیستم‌های سینگولار خطی ثابت با زمان در [8] فرمول‌بندی و حل شده است. در [9] یک رؤیت‌گر حالت مقاوم برای سیستم‌های سینگولار تأخیردار ارائه شده و یک شرط کافی برای وجود آن بدست آمده است. در [10] یک تخمین‌زن حالت برای سیستم‌های سینگولار خطی گسسته- زمان با ورودی نامعلوم ارائه شده ولی همگرایی آن مورد تجزیه و تحلیل قرار نگرفته است. مبحث طراحی رؤیت‌گر برای سیستم‌های سینگولار گسسته- زمان تأخیردار با ورودی نامعلوم در [11] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در [12] رؤیت‌گری با ساختار تناسبی- مشتقی (PD) برای سیستم‌های سینگولار خطی پیوسته- زمان ارائه شده اما در مورد سرعت همگرایی آن بحثی به میان نیامده است.

در مدل‌سازی ریاضی برخی از سیستم‌های فیزیکی در فضای حالت علاوه بر معادلات دیفرانسیلی، معادلات جبری نیز ظاهر می‌شوند، یعنی بین برخی از متغیرهای حالت سیستم روابط استاتیکی وجود دارد. به چنین سیستم‌هایی به اصطلاح سیستم‌های منفرد (Singular)، سیستم‌های واصف (Descriptor) و یا سیستم‌های دیفرانسیلی- جبری گفته می‌شود [1]. (ما در این مقاله به اینگونه سیستم‌ها سیستم‌های سینگولار می‌گوئیم). در مدارهای الکتریکی، در سیستم‌های با ابعاد بزرگ که از اتصال چندین سیستم به یکدیگر تشکیل شده‌اند، در سیستم‌های مکانیکی با قیود هارمونیک و غیر هارمونیک، در سیستم‌های رباتیک با قیود سینماتیکی و حتی در اقتصاد با چنین سیستم‌هایی مواجه می‌شویم [2].

همانند سیستم‌های معمولی در سیستم‌های سینگولار نیز تخمین بردار حالت برای کنترل سیستم و یا تشخیص عیب و خطا در سیستم مطرح است [3]. به همین منظور در [3] یک رؤیت‌گر حالت با فرم Luenberger برای سیستم‌های سینگولار طراحی شده است. مسئله طراحی رؤیت‌گر برای

یک رؤیت‌گر برای تخمین بردار $x(t)$ طراحی کنید بطوریکه دارای همگرایی نمایی باشد. یعنی اگر $\hat{x}(t)$ تخمین بدست آمده برای $x(t)$ باشد اعداد مثبتی مانند α و μ و ماتریسی متقارن و مثبت معین (Positive definite) مانند $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یافت شوند به قسمی که داشته باشیم:

$$\|e(t)\|_{\Phi} = \alpha e^{-\mu t} \quad \text{for } t \geq 0 \quad (5)$$

که در آن $e(t)$ خطای بین بردار حالت سیستم (۱) و رؤیت‌گر بوده، یعنی:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (6)$$

و $\|e(t)\|_{\Phi}$ اندازه (نرم) بردار $e(t)$ با ماتریس وزنی Φ است:

$$\|e(t)\|_{\Phi} = \frac{1}{2} e^T(t) \Phi e(t) \quad (7)$$

(T نشان‌دهنده ترانپو (Transpose) می‌باشد)

فرض (۴a) بیان می‌دارد که خروجی‌های سیستم مستقل خطی بوده و اندازه‌گیری اضافی وجود ندارد. این شرط، شرط سختی نبوده و همواره می‌توان با حذف خروجی‌های اضافی سیستم آنرا تحقق بخشید. فرض (۴b) بدین مفهوم است که اندازه‌گیری‌های کافی به منظور جبران‌سازی اثرات سینگولار بودن سیستم در اختیار است. فرض (۴c) هم معادل با رؤیت‌پذیر بودن سیستم است [1].

۳- ارائه یک روش حل برای مسئله مورد نظر

در این قسمت یک روش حل برای مسئله طراحی رؤیت‌گر حالت با همگرایی نمایی برای سیستم (۱) ارائه می‌شود. برای این منظور معادله دینامیکی زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Pw(t) + Qy(t) + GBu(t) \\ \quad - HC^T(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{x}(t) = w(t) + Fy(t) \end{cases} \quad (8)$$

که در آن $w(t), \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بوده، بعنوان تخمین $x(t)$ می‌باشد. ماتریس‌های ضرایب حقیقی بوده و دارای ابعاد مناسبند و بعلاوه G یک ماتریس معکوس‌پذیر و H یک ماتریس متقارن مثبت معین است.

قضیه زیر ارائه می‌گردد:

هدف این مقاله ارائه یک رؤیت‌گر حالت جدید با همگرایی نمایی برای سیستم‌های سینگولار است. مقاله چنین سازمان‌دهی شده است:

در قسمت ۲ مسئله مورد نظر تحت عنوان مسئله طراحی رؤیت‌گر حالت با همگرایی نمایی برای سیستم‌های سینگولار تعریف می‌شود. در قسمت ۳ یک روش حل برای مسئله مورد نظر ارائه می‌گردد و درستی آن به اثبات می‌رسد. نحوه محاسبه و تعیین ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر پیشنهادی در قسمت ۴ توضیح داده می‌شود. در قسمت ۵ با ارائه یک مثال شبیه‌سازی عملکرد رؤیت‌گر پیشنهادی به تصویر کشیده می‌شود. در پایان هم نتیجه‌گیری صورت می‌گیرد.

۲- بیان صورت مسئله

سیستم سینگولار پیوسته- زمان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $\dot{x}(t)$ مشتق بردار حالت نسبت به t (زمان)، $u(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار ورودی و $y(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار خروجی سیستم بوده و داریم:

$$E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}, C \in \mathbb{R}^{q \times n} \quad (2)$$

سینگولار بودن سیستم (۱) بدین مفهوم است که ماتریس E معکوس پذیر نبوده و داریم:

$$\det(E) = 0 \quad (3)$$

در اینجا مسئله طراحی رؤیت‌گر حالت با همگرایی نمایی برای سیستم (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

در سیستم (۱) با فرض اینکه بردارهای $u(t)$ و $y(t)$ قابل اندازه‌گیری بوده و داشته باشیم:

$$\text{rank}(C) = q \quad (4a)$$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}\right) = n \quad (4b)$$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (4c)$$

(rank نشان‌دهنده رتبه ماتریس و \mathbb{C} مجموعه اعداد مختلط می‌باشد).

$$C = [I_q \ 0] \quad (14)$$

در این حالت ماتریس‌های E, A, P, G و I_n را به صورت زیر به چند بلوک تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_n \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_n \quad (15)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_n \quad T_1 = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix}$$

۴-۱- محاسبه ماتریس‌های F و G

با توجه به فرم ماتریس‌های C و E که در (۱۴) و (۱۵) داده شده‌اند، رابطه (۴b) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ I_q & 0 \end{pmatrix} = n$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\text{rank}(E_2) = n - q \quad (16)$$

یعنی ماتریس E_2 دارای رتبه کامل ستونی است.

با توجه به (۱۵) معادله ماتریسی (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$F[I_q \ 0] + G[E_1 \ E_2] = [T_1 \ T_2]$$

و یا:

$$GE_2 = T_2 \quad (17a)$$

$$F = T_1 - GE_1 \quad (17b)$$

از آنجا که طبق رابطه (۱۶) ماتریس E_2 دارای رتبه کامل ستونی است از معادله (۱۷a) جواب زیر برای ماتریس G بدست می‌آید:

$$G = \Theta(I_n - E_2 \bar{E}_2) + T_2 \bar{E}_2 \quad (18)$$

که در آن:

$$\bar{E}_2 = (E_2^T E_2)^{-1} E_2^T \quad (19)$$

و $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس دلخواهی است.

ماتریس Θ را به صورت زیر به دو بلوک تقسیم‌بندی می‌کنیم:

قضیه- اگر در معادله دینامیکی (۸) ماتریس‌های ضرایب P, Q, F, G و H از حل معادلات زیر تعیین شوند:

$$FC + GE = I_n \quad (9)$$

(I_n نشان‌دهنده ماتریس واحد $n \times n$ می‌باشد)

$$PGE + QC = GA \quad (10)$$

$$(P + 0.5\mu I_n)^T H^{-1} + H^{-1}(P + 0.5\mu I_n) = 2C^T C \quad (11)$$

آنگاه این معادله دینامیکی یک رؤیت‌گر حالت برای سیستم (۱) بوده و دارای همگرایی نمایی است بطوریکه در رابطه (۵) ماتریس Φ و عدد α چنین هستند:

$$\Phi = H^{-1} \quad (12a)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(x(0) - \hat{x}(0))^T H^{-1}(x(0) - \hat{x}(0)) \quad (12b)$$

و μ هر عدد مثبتی که در رابطه زیر صدق کند می‌تواند باشد:

$$\mu > -2\text{Re}(\lambda_i(P)) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$\lambda_i(P)$ ها نشان‌دهنده مقادیر ویژه ماتریس P بوده و $\text{Re}(\lambda_i(P))$ ها قسمت‌های حقیقی آنها می‌باشند.

بدلیل محدودیت در تعداد صفحات مقاله، اثبات قضیه آورده نمی‌شود. لازم به ذکر است که در این اثبات از فرض (۴c) استفاده می‌شود. \square

در اینجا بیان قضیه به پایان می‌رسد. اما چه تضمینی وجود دارد که معادلات ماتریسی (۹)، (۱۰) و (۱۱) برای F, G, P, Q و H دارای جواب باشند؟ این جوابها در صورت وجود چگونه بدست می‌آیند؟ فرضیات (۴a) و (۴b) برای چیست؟ در قسمت بعدی به این پرسشها پاسخ داده می‌شود.

۴- تعیین ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر

در این قسمت معادلات ماتریسی (۹)، (۱۰) و (۱۱) مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و نحوه محاسبه ماتریس‌های F, G, P, Q و H بررسی می‌شود. با توجه به فرض (۴a) و با تغییر متغیر همواره می‌توان ماتریس C را به فرم زیر در آورد:

در معادله (۲۵a) بجای GE_2 از رابطه (۱۷a) قرار می‌دهیم:

$$P \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix} = GA_2 = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} A_2 \quad (26)$$

با توجه به تقسیم‌بندی ماتریس P به چهار بلوک در رابطه (۱۵)، از معادله (۲۶) دو معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$P_{12} = G_1 A_2 \quad (27a)$$

$$P_{22} = G_2 A_2 \quad (27b)$$

بنابراین از چهار بلوک ماتریس P بلوک‌های P_{12} و P_{22} از روابط فوق محاسبه می‌شوند و بلوک‌های P_{11} و P_{21} بطور دلخواه قابل انتخاب هستند (از دلخواه بودن P_{11} و P_{21} می‌توان در جابجایی محل مقادیر ویژه ماتریس P استفاده کرد).

پس از تعیین شدن ماتریس P ، از رابطه (۲۵b) ماتریس Q نیز بدست می‌آید.

۴-۳- محاسبه ماتریس H

می‌دانیم معادله ماتریسی (۱۱) برای H^{-1} دارای پاسخ است (و این پاسخ یکتا است) اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس $P + 0.5\mu I_n$ در نیم صفحه راست صفحه مختلط باشند [13]، یعنی نامساوی (۱۳) برقرار باشد. لذا عدد مثبت μ را طوری انتخاب می‌کنیم که در نامساوی (۱۳) صدق کند. پاسخ بدست آمده از معادله (۱۱) برای H^{-1} به صورت زیر است [13, 14]:

$$H^{-1} = 2 \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-(P+0.5\mu I_n)^T \tau} C^T C e^{-(P+0.5\mu I_n)\tau} \right\} d\tau \quad (28)$$

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت به منظور مشاهده عملکرد رؤیت‌گر ارائه شده یک مثال شبیه‌سازی آورده می‌شود.

سیستم سینگولار (۱) به صورت مرتبه سه ($n = 3$)، با یک ورودی ($p = 1$) و یک خروجی ($q = 1$) و با ماتریس‌های ضرایب زیر در نظر گرفته می‌شود بطوریکه

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\Theta_1} \right\} q \\ \left. \vphantom{\Theta_2} \right\} n-q \end{matrix} \quad (20)$$

با توجه به بلوک‌بندی ماتریس G در (۱۵) و ماتریس Θ در (۲۰) از معادله (۱۸) دو معادله زیر بدست می‌آید:

$$G_1 = \Theta_1 (I_n - E_2 \bar{E}_2) \quad (21a)$$

$$G_2 = \Theta_2 (I_n - E_2 \bar{E}_2) + \bar{E}_2 \quad (21b)$$

بنابراین داریم:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ \Theta_2 & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -E_2 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

هر ماتریس $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ و $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ را می‌توان انتخاب نمود و در رابطه فوق قرار داد و ماتریس G را محاسبه کرد. همانگونه که بعد از رابطه (۸) ذکر شد تنها شرطی که باید ماتریس G داشته باشد این است که معکوس‌پذیر باشد (در اثبات قضیه از فرض معکوس‌پذیر بودن G استفاده شده است). براحتی می‌توان Θ_1 را چنان انتخاب نمود که داشته باشیم:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 \\ \Theta_2 & I_{n-q} \end{bmatrix} \right) = n \quad (23)$$

با توجه به رابطه (۲۲) با این انتخاب نتیجه می‌شود:

$$\text{rank}(G) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} I_n \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} \right) = n \quad (24)$$

بدین ترتیب ماتریس G معکوس‌پذیر می‌شود.

پس از تعیین ماتریس G ، از رابطه (۱۷b) ماتریس F نیز بدست می‌آید.

۴-۲- محاسبه ماتریس‌های P و Q

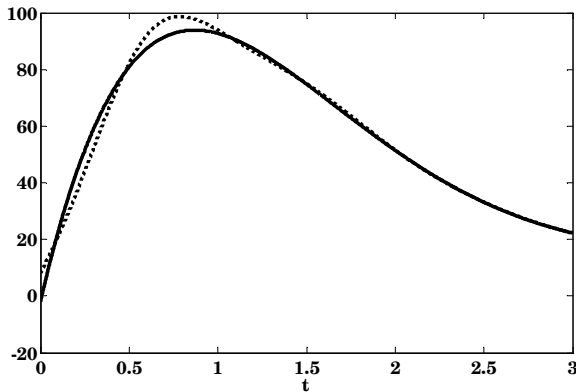
با توجه به بلوک‌بندی ماتریس‌های A ، C و E در روابط (۱۴) و (۱۵) می‌توان معادله ماتریسی (۱۰) را به صورت زیر نوشت:

$$PG[E_1 \ E_2] + Q[I_q \ 0] = G[A_1 \ A_2]$$

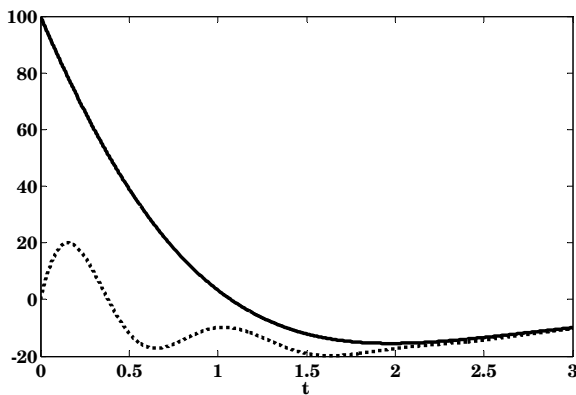
و یا:

$$PGE_2 = GA_2 \quad (25a)$$

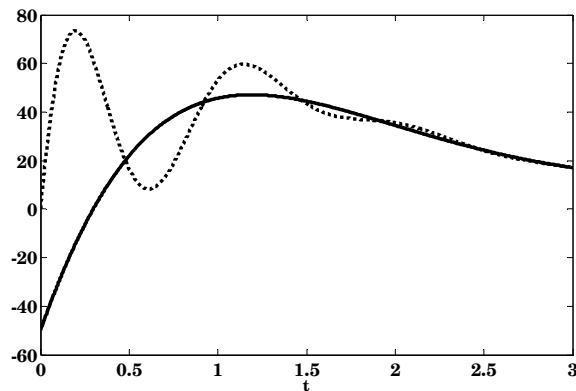
$$Q = GA_1 - PGE_1 \quad (25b)$$



شکل ۱: متغیر حالت $x_1(t)$ و تخمین بدست آمده برای آن



شکل ۲: متغیر حالت $x_2(t)$ و تخمین بدست آمده برای آن



شکل ۳: متغیر حالت $x_3(t)$ و تخمین بدست آمده برای آن

همانگونه که مشاهده می شود تخمین بدست آمده برای هر کدام از متغیرهای حالت با سرعت بسیار خوبی به خود آن متغیر همگرا شده است و جالب اینکه اگر منحنی تابع $f(t) = 142.7e^{-4t}$ رسم گردد دقیقاً بر منحنی تابع $\|e(t)\|_{\mathbb{R}^3}$ منطبق می شود. این واقعیت به این خاطر است که

شرایط (۴a) الی (۴c) برقرار بوده و ماتریس C به صورت (۱۴) باشد:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

با توجه به توضیحات قسمت ۴، در این مثال ماتریس های $\Theta_1, \Theta_2, P_{11}$ و P_{21} به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$\Theta_1 = [1 \ 0 \ 0], \Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{11} = 1, P_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با این انتخابها ماتریس های F, G, P و Q چنین بدست می آیند:

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس P به صورت زیر هستند:

$$9.6053, 1.2066, -1.8119$$

لذا با توجه به نامساوی (۱۳) عدد مثبت μ را برابر 4 انتخاب می کنیم.

پس از انتخاب μ از حل معادله (۱۱) (با دستور lyap از MATLAB Control System Toolbox) ماتریس H به صورت زیر بدست می آید:

$$H = \begin{bmatrix} 15 & -26 & -76 \\ -26.8 & 115.88 & 162.16 \\ -76.6 & 162.16 & 497.12 \end{bmatrix}$$

همچنین در این شبیه سازی ورودی و شرایط اولیه سیستم و شرایط اولیه رؤیت گر به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$u(t) = 1, x(0) = [-2 \ 100 \ -50]^T$$

$$w(0) = [10 \ 0 \ 0]^T$$

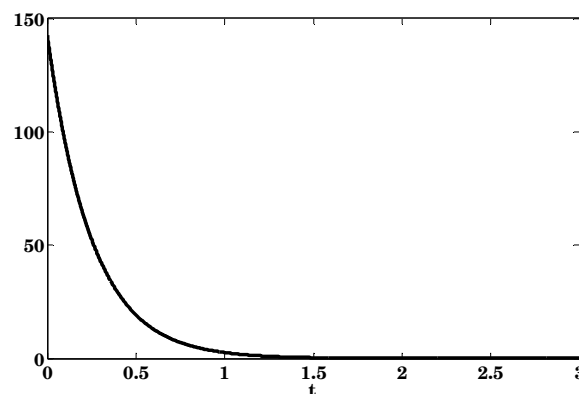
نتایج بدست آمده از شبیه سازی برای متغیرهای حالت سیستم و تخمین های بدست آمده برای آنها از رؤیت گر در شکل های ۱ الی ۳ آورده شده اند (منحنی های پررنگ خود متغیرهای حالت و منحنی های نقطه چین تخمین آنها را نشان می دهند). منحنی تابع $\|e(t)\|_{\mathbb{R}^3}$ هم در شکل ۴ آورده شده است.

مراجع

- [1] L. Dai, *Singular Control Systems*, Springer, Berlin, Germany, 1989.
- [2] R. Bru, C. Coll and N. Thome, "Compensating periodic-time descriptor systems", *Systems and Control Letters*, vol. 43, pp. 133-139, 2001.
- [3] D. N. Shields, "Observer design and detection for descriptor systems", *International Journal of Control*, vol. 67, no. 2, pp. 153-168, 1997.
- [4] D. Chu and V. Mehrmann "Disturbance decoupled observer design for descriptor systems", *Systems and Control Letters*, vol. 38, pp. 37-48, 1999.
- [5] J. Wang and X. Liu, "On the observer design for a class of nonlinear singular systems", *Automatica Sinica*, vol. 26, no. 3, pp. 373-377, 2000.
- [6] W. Wang and Y. Zou, "Analysis of impulsive modes and Luenberger observers for descriptor systems", *Systems and Control Letters*, vol. 44, pp. 347-353, 2001.
- [7] N. Biehn, S. L. Campbell, R. Nikoukhah and F. Delebecque, "Numerically constructible observers for linear time-varying descriptor systems", *Automatica*, vol. 37, pp. 445-452, 2001.
- [8] Z. W. Gao, Q. Gao, G. J. Sun and H. Z. Li, "Parameterization of linear observers for singular systems related to Luenberger's state observers", *Systems Engineering and Electronics*, vol. 25, no. 5, pp. 575-585, 2003.
- [9] S. Zhu and Z. Cheng, "Design of robust fault detection and isolation observers for singular time delay systems", *Proceedings of the 2004 American Control Conference (ACC)*, pp. 5064-5069, Boston, MA, United States, 2004.
- [10] S. Liying and C. Zhaolin, "Observer design for discrete-time descriptor systems with unknown inputs and inputs estimation", *Proceedings of the 5th Asian Control Conference (ACC)*, pp. 538-543, Melbourne, Australia, 2004.
- [11] S. Ma and Z. Cheng, "Observer design for discrete time-delay singular systems with unknown inputs", *Proceedings of the 2005 American Control Conference (ACC)*, pp. 4215-4219, Portland, OR, United States, 2005.
- [12] Z. W. Gao, "PD observer parameterization design for descriptor systems", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 342, pp.551-564, 2005.
- [13] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*, Princeton University Press, ISBN: 0691118027, 2005.
- [14] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, ISBN: 0195117778, 1999.

در این شبیه‌سازی عدد μ برابر 4 انتخاب شده و با توجه به شرایط اولیه انتخاب شده برای سیستم و رؤیت‌گر داریم:

$$\alpha = 142.7$$



شکل ۴: منحنی تابع $\|e(t)\|_Q$

۶- نتیجه‌گیری

یک رؤیت‌گر حالت جدید با ساختاری ساده برای سیستم‌های سینگولار خطی پیوسته-زمان ارائه گردید. ثابت شد که اگر سیستم سینگولار مورد نظر رؤیت‌پذیر بوده و اندازه‌گیری‌های کافی مستقل در اختیار داشته باشیم و ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر در معادلات پیشنهادی صدق کنند آنگاه رؤیت‌گر مورد نظر دارای همگرایی نمایی با ضریب میرایی قابل انتخاب است. نحوه تعیین ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر بطور کامل تشریح و ترتیب توالی مراحل طراحی آن مشخص شد. با ارائه یک مثال شبیه‌سازی عملکرد رؤیت‌گر ارائه شده به تصویر کشیده شد و مشاهده گردید که منحنی تابع $\|e(t)\|_Q$ دقیقاً بر منحنی $\alpha e^{-\mu t}$ منطبق است (μ عدد مثبتی است که توسط طراح انتخاب می‌شود).

گرچه در این مقاله سیستم مورد نظر مربعی در نظر گرفته شد، یعنی در رابطه (۱) تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس E با هم برابر فرض شدند ولی براحتی می‌توان نتایج بدست آمده را به حالتی که ماتریس E مستطیلی است نیز بسط داد. اما بسط نتایج مقاله به سیستم‌های سینگولار گسسته-زمان و همچنین سیستم‌های سینگولار غیرخطی نیازمند تحقیقات بیشتری است.