

فصل اول : مقدمه		
۱۳	مقدمه	۱-۱
۱۴	عناصر اصلی یک سیستم مخابراتی	۱-۲
۱۷	اطلاعات - پیام و سیگنال	
۱۹	کانال انتقال مخابراتی	
۲۲	مدوله سازی - قسمت ۱	
۲۴	مدوله سازی - قسمت ۲	
۲۶	کدبندی	
۲۸	محدودیت های اساسی در سیستم های مخابراتی طراحی	
فصل دوم : سیگنال ها و طیف فرکانسی آنها		
۳۰	طبقه بندی سیگنال ها	۲-۱
۳۲	سیگنال های ارادی مورد نیاز - قسمت ۱	
۳۴	سیگنال های ارادی مورد نیاز - قسمت ۲	
۳۷	سیگنال های ارادی مورد نیاز - قسمت ۳	
۴۰	سری فوریه - قسمت ۱	
۴۱	سری فوریه - قسمت ۲	
۴۳	سری فوریه - قسمت ۳ و قضیه توان پاسوال قسمت ۱	
۴۴	قضیه توان پاسوال - قسمت ۲	
۴۷	طیف فرکانسی سیگنال های غیر متناوب	۲-۲
۴۸	خواص تبدیل فوریه - ۱	
۵۰	خواص تبدیل فوریه - ۲	
۵۲	خواص تبدیل فوریه - ۳	
۵۴	خواص تبدیل فوریه - ۴	
۵۶	خواص تبدیل فوریه - ۵	
۵۸	خواص تبدیل فوریه - ۶	
۶۰	خواص تبدیل فوریه - ۷	

۳	۶۱	خواص تبدیل فوریه - ۸
	۶۲	خواص تبدیل فوریه - ۹
	۶۴	خواص تبدیل فوریه - ۱۰
	۶۶	خواص تبدیل فوریه - ۱۱
	۶۸	خواص تبدیل فوریه - ۱۲
	۶۹	خواص تبدیل فوریه - ۱۳
	۷۲	خواص تبدیل فوریه - ۱۴
	۷۵	خواص تبدیل فوریه - ۱۵
	۷۷	خواص تبدیل فوریه - ۱۶
	۷۹	خواص تبدیل فوریه - ۱۷
	۸۱	خواص تبدیل فوریه - ۱۸
۴	۸۳	توان و انرژی سیگنال - قسمت ۱
	۸۵	توان و انرژی سیگنال - قسمت ۲
	۸۷	بدست آورد چگالی طیفی توان
	۸۹	مثال
۵	۹۱	حاصلضرب اسکالر دو سیگنال
	۹۳	توابع هم بستگی و خود بستگی - قسمت ۱
	۹۵	توابع هم بستگی و خود بستگی - قسمت ۲
	۹۷	توابع هم بستگی و خود بستگی - قسمت ۳ مثال
۶	۹۹	تبدیل هیلبرت - قسمت ۱
	۱۰۱	تبدیل هیلبرت - قسمت ۲ خواص تبدیل هیلبرت قسمت ۱
	۱۰۳	خواص تبدیل هیلبرت - قسمت ۲
۷	۱۰۶	سیگنال تحلیلی و مفهوم - قسمت ۱
	۱۰۸	سیگنال تحلیلی و مفهوم - قسمت ۲
	۱۱۰	سیگنال تحلیلی و مفهوم - قسمت ۳
	۱۱۲	سیگنال تحلیلی و مفهوم - قسمت ۴

۱۱۹	مسائل نمونه ۱-	۴
۱۲۲	مسائل نمونه ۲-	
۱۲۵	مسائل نمونه ۳-	
۱۲۸	مسائل نمونه ۴-	
۱۲۹	مسائل نمونه ۵-	
فصل سوم : سیستم ها و فیلترها		
۱۳۱	سیستم ها و فیلترها	۵
۱۳۲	طبقه بندی سیستم ها	
۱۳۳	سیستم ها ی تغییر ناپذیر و تغییر پذیر با زمان	
۱۳۴	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۱	۶
۱۳۶	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۲	
۱۳۷	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۳	
۱۳۹	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۴	
۱۴۰	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۵	
۱۴۱	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۶	
۱۴۲	پاسخ ضربه و تحلیل سیستم در حوزه زمان- قسمت ۷	
۱۴۳	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۱	۷
۱۴۴	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۲	
۱۴۶	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۳	
۱۴۸	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۴	
۱۵۰	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۵	
۱۵۳	تابع تبدیل و تحلیل سیستم در حوزه فرکانسی- قسمت ۶	
۱۵۵	فیلتر ها - قسمت ۱	۸
۱۵۷	فیلتر ها - قسمت ۲	
۱۵۹	فیلتر ها - قسمت ۳	
۱۶۱	فیلتر ها - قسمت ۴	

۱۶۳	اعوجاج سینگال در اثر انتقال	اعوجاج
۱۶۵	انواع مختلف اعوجاج	
۱۶۶	اعوجاج دامنه	
۱۶۸	اعوجاج فاز - قسمت ۱	
۱۷۰	اعوجاج فاز - قسمت ۲	
۱۷۱	اعوجاج فاز - قسمت ۳	
۱۷۳	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۱	
۱۷۴	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۲	
۱۷۵	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۳	
۱۷۷	سیستم های میان گذر - قسمت ۱	سیستم
۱۷۸	سیستم های میان گذر - قسمت ۲	
۱۸۱	سیستم های میان گذر - قسمت ۳	
۱۸۵	مثال ۱	
۱۸۸	مثال ۲	
۱۹۰	مثال ۳	
۱۹۲	مثال ۴- قسمت ۱	
۱۹۴	مثال ۴- قسمت ۲	
فصل چهارم : پیشامدهای تصادفی		
۱۹۶	پیشامدهای تصادفی	توزیع
۱۹۸	احتمالات مشروط و متغیرهای تصادفی	
۲۰۰	تابع توزیع تجمعی	
۲۰۱	مثال	
۲۰۳	تابع چگالی احتمال PDF و تابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی	
۲۰۵	تابع چگالی احتمال مرزی	
۲۰۶	مشخصه های عددی متغیرهای تصادفی (امید و واریانس)	خواص
۲۰۷	خواص امید ریاضی	

۲۰۸	مثال ۱	۴
۲۰۹	مثال ۲	
فصل پنجم: فرایندهای تصادفی و نویز		
۲۱۱	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۱	۵
۲۱۲	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۲	
۲۱۳	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۳	
۲۱۴	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۴	
۲۱۶	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۵	
۲۱۷	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۶	
۲۱۹	فرآیندهای تصادفی-قسمت ۷	
۲۲۰	مشخصات سیگنال (سیگنال ارادی)	۶
۲۲۱	مشخصات سیگنال (سیگنال رندم)	
۲۲۲	طبقه بندی فرآیندهای تصادفی	
۲۲۴	مثال ۱	
۲۲۵	مثال ۲- قسمت ۱	
۲۲۶	مثال ۲- قسمت ۲	
۲۲۸	مثال ۳- قسمت ۱	
۲۲۹	مثال ۳- قسمت ۲	
۲۳۰	مثال ۴- قسمت ۱	
۲۳۲	مثال ۴- قسمت ۲	
۲۳۳	مثال ۵	
۲۳۴	عبور سیگنال رندم از یک سیستم LIT-قسمت ۱	۷
۲۳۶	عبور سیگنال رندم از یک سیستم LIT-قسمت ۲	
۲۳۷	نویز در سیستم های مخابراتی	۸
۲۳۹	چگالی طیف توان نویز- قسمت ۱	
۲۴۱	چگالی طیف توان نویز- قسمت ۲	

۲۴۳	چگالی طیف توان نویز - قسمت ۳	۴
۲۴۴	مثال	
۲۴۶	نویز فیلتر شده	
۲۴۷	پهنای باند معادل نویز	
۲۴۹	نویز میانگذر - قسمت ۱	۵
۲۵۰	نویز میانگذر - قسمت ۲	
۲۵۱	نویز میانگذر - قسمت ۳	
۲۵۲	درجه حرارت موثر نویز	۶
۲۵۵	عدد نویز	
۲۵۷	عدد نویز کلی دو مازول کسکید (cascade) - قسمت ۱	
۲۵۹	عدد نویز کلی دو مازول کسکید (cascade) - قسمت ۲	
۲۶۰	مثال قسمت ۱ -	
۲۶۱	مثال قسمت ۲ -	
۲۶۳	انتقال سیگنال باند پایه آنالوگ - قسمت ۱	۷
۲۶۶	انتقال سیگنال باند پایه آنالوگ - قسمت ۲	
۲۶۸	مثال	
فصل ششم: مدولاسیون خطی موج پیوسته		
۲۷۰	مقدمه	۸
۲۷۱	مدولاسیون دامنه (AM) _ قسمت ۱	
۲۷۵	مدولاسیون دامنه (AM) _ قسمت ۲	
۲۷۸	مدولاسیون باند جانبی دو گانه (DSB)	
۲۸۰	بررسی طیف مدولاسیون تن برای AM و DSB	
۲۸۲	مدولاتور AM و DSB	
۲۸۶	مدوله کننده های سوئیچینگ	
۲۸۸	مدوله کننده های حلقوی	
۲۹۲	بررسی طیف سیگنال SSB و رابطه زمانی آن - قسمت ۱	

۲۹۴	بررسی طیف سیگنال SSB و رابطه زمانی آن -قسمت ۲	
۲۹۵	مدولاسیون باند جانبی اثری -قسمت ۱	۳
۲۹۷	مدولاسیون باند جانبی اثری -قسمت ۲	
۳۰۰	مدولاسیون باند جانبی اثری -قسمت ۳	
۳۰۲	سیگنال VSB در حوزه زمان -قسمت ۱	
۳۰۴	سیگنال VSB در حوزه زمان -قسمت ۲	
۳۰۶	سیگنال VSB در حوزه زمان -قسمت ۳	
۳۰۷	مدوله کننده های SSB - قسمت ۱	۳
۳۰۹	مدوله کننده های SSB - قسمت ۲	
۳۱۱	مدوله کننده های SSB - قسمت ۳	
۳۱۲	مدوله کننده های SSB - قسمت ۴	
۳۱۵	مدوله کننده های SSB - قسمت ۵	
۳۱۶	دمدوله کننده ها - قسمت ۱	۴
۳۱۷	دمدوله کننده ها - قسمت ۲	
۳۱۹	دمدوله کننده ها - قسمت ۳	
۳۲۱	دمدوله کننده ها - قسمت ۴	
۳۲۳	دمدوله کننده ها - قسمت ۵	
۳۲۵	دمدوله کننده ها - قسمت ۶	
۳۲۶	دمدوله کننده ها - قسمت ۷	
۳۲۸	دمدوله کننده ها - قسمت ۸	
۳۲۹	همزمانی حامل یا بازیابی کریر در گیرنده - قسمت ۱	۵
۳۳۱	همزمانی حامل یا بازیابی کریر در گیرنده - قسمت ۲	
۳۳۲	همزمانی حامل یا بازیابی کریر در گیرنده - قسمت ۳	
۳۳۴	همزمانی حامل یا بازیابی کریر در گیرنده - قسمت ۴	
فصل هفتم : مدولاسیون نمایی موج پیوسته		
۳۳۵	مدولاسیون نمایی موج پیوسته	

۳۳۶	مدولاسیون فاز و مدولاسیون فرکانس - قسمت ۱	۱
۳۳۸	مدولاسیون فاز و مدولاسیون فرکانس - قسمت ۲	
۳۴۰	مدولاسیون فاز و مدولاسیون فرکانس - قسمت ۳	
۳۴۳	مدولاسیون فاز و فرکانس باند باریک - قسمت ۱	۲
۳۴۵	مدولاسیون فاز و فرکانس باند باریک - قسمت ۲	
۳۴۷	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM - قسمت ۱	۳
۳۴۹	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM - قسمت ۲	
۳۵۰	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM - قسمت ۳	
۳۵۲	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM - قسمت ۴	
۳۵۴	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM - قسمت ۵	
۳۵۶	تعبیر باند باریک $x_0(t)$ برای پیام تن - قسمت ۱	۴
۳۵۸	تعبیر باند باریک $x_0(t)$ برای پیام تن - قسمت ۲	
۳۵۹	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM برای مدولاسیون چند نوایی - قسمت ۱	
۳۶۱	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM برای مدولاسیون چند نوایی - قسمت ۲	
۳۶۳	تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM برای مدولاسیون چند نوایی - قسمت ۳	
۳۶۵	پهنای باند انتقال - قسمت ۱	
۳۶۷	پهنای باند انتقال - قسمت ۲	
۳۶۹	پهنای باند انتقال - قسمت ۳	
۳۷۱	پهنای باند انتقال - قسمت ۴	
۳۷۳	اعوجاج خطی	۵
۳۷۴	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۱	
۳۷۵	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۲	
۳۷۷	اعوجاج غیر خطی - قسمت ۳	
۳۷۹	مدوله کننده های fm و pm	۶
۳۸۲	روش fm غیر مستقیم - قسمت ۱	
۳۸۵	روش fm غیر مستقیم - قسمت ۲	

۳۸۶	دمدوله کننده‌های fm و pm	
۳۸۷	آشکار ساز تبدیل FM و AM - قسمت ۱	۴
۳۸۹	آشکار ساز تبدیل FM و AM - قسمت ۲	
۳۹۰	آشکار ساز تمایز تغییر فاز	
۳۹۲	آشکار ساز عبور از صفر - قسمت ۱	
۳۹۴	آشکار ساز عبور از صفر - قسمت ۲	
فصل هشتم : مخابرات دیجیتال		
۳۹۶	مقدمه	۵
۳۹۸	مخابرات دیجیتال	
۴۰۰	معرفی اجزای سیستم مخابرات دیجیتال	
۴۰۲	کدبندی منبع و کانال	
۴۰۴	اعوجاج غیر خطی سیگنال	
۴۰۵	کدبندی کانال	
۴۰۷	تئوری اطلاعات - قسمت ۱	۶
۴۰۹	تئوری اطلاعات - قسمت ۲	
۴۱۱	تئوری اطلاعات - قسمت ۳	
۴۱۳	تئوری اطلاعات - قسمت ۴	
۴۱۴	اطلاعات شرطی اطلاعات توام و اطلاعات مشترک بین دو پیغام	
۴۱۷	اطلاعات منبع	
۴۱۹	آنتروپی منبع بدون حافظه	۷
۴۲۰	فرمول آنتروپی	
۴۲۲	ماکزیمم آنتروپی منبع $H(X)$ لایبی	
۴۲۴	مثال	
۴۲۶	آنتروپی به عنوان امید ریاضی	
۴۲۷	آنتروپی منبع با حافظه	
۴۲۹	فرمول آنتروپی منبع با حافظه - قسمت ۱	

۴۳۱	فرمول آنتروپی منبع با حافظه - قسمت ۲	
۴۳۴	ماکزیمم آنتروپی	
۴۳۵	بازدهی و اضافات منبع - قسمت ۱	۴.۳
۴۳۷	بازدهی و اضافات منبع - قسمت ۲	
۴۳۹	کد بندی منبع - قسمت ۱	
۴۴۱	کد بندی منبع - قسمت ۲	
۴۴۳	کد بندی با طول ثابت - قسمت ۱	
۴۴۵	کد بندی با طول ثابت - قسمت ۲	
۴۴۶	ظرفیت کانال دیجیتال	۴.۴
۴۴۷	پارامترهای توصیف کننده کانال دیجیتال	
۴۵۲	آنتروپی های ارسالی - دریافتی و انتقالی - قسمت ۱	
۴۵۴	آنتروپی های ارسالی - دریافتی و انتقالی - قسمت ۲	
۴۵۶	آنتروپی های ارسالی - دریافتی و انتقالی - قسمت ۳	
۴۵۸	آنتروپی های ارسالی - دریافتی و انتقالی - قسمت ۴	
۴۶۰	سرعت انتقال اطلاعات در کانال و ظرفیت کانال - قسمت ۱	۴.۵
۴۶۲	سرعت انتقال اطلاعات در کانال و ظرفیت کانال - قسمت ۲	
۴۶۴	سرعت انتقال اطلاعات در کانال و ظرفیت کانال - قسمت ۳	
۴۶۶	مبادله بین $B_{\frac{S}{N}}$ و زمان مخابره \mathcal{T} سیستم ایده آل - قسمت ۱	
۴۶۷	مبادله بین $B_{\frac{S}{N}}$ و زمان مخابره \mathcal{T} سیستم ایده آل - قسمت ۲	
۴۶۹	مخابرات دیجیتال در باند پایه	
۴۷۰	تجزیه و تحلیل سیگنال PAM	۴.۶
۴۷۲	قدرت سیگنال و طیف قدرت سیگنال PAM	
۴۷۵	مثال	
۴۷۸	تداخل بین پالس ها (isi) و حداقل عرض باند لازم برای PAM قسمت ۱	
۴۸۱	تداخل بین پالس ها (isi) و حداقل عرض باند لازم برای PAM قسمت ۲	
۴۸۳	مثال ۲	

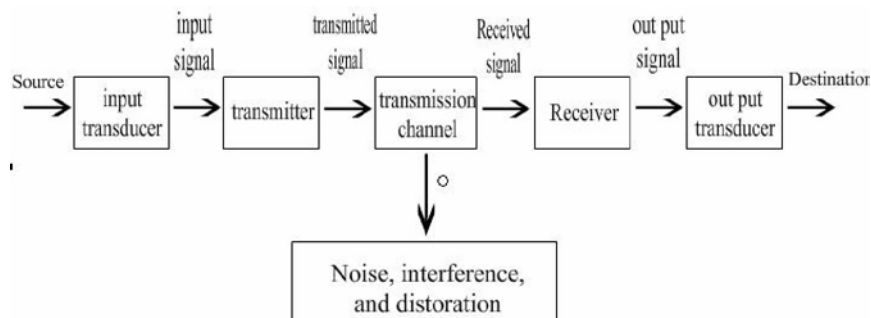
۴۸۵	مثال ۳	
۴۸۸	تجزیه و تحلیل سیستم PAM - قسمت ۱	۴
۴۹۰	تجزیه و تحلیل سیستم PAM - قسمت ۲	
۴۹۲	احتمال خطا در تشخیص دامنه ها	
۴۹۶	احتمال خطا بر حسب قدرت سیگنال و نویز و معرفی PAM بهینه - قسمت ۱	
۴۹۹	احتمال خطا بر حسب قدرت سیگنال و نویز و معرفی PAM بهینه - قسمت ۲	
۵۰۱	مبادله قدرت و عرض باند در سیستم	
۵۰۳	نکات	
۵۰۴	شکل دادن به طیف سیگنال PAM	۵
۵۰۵	کد بندی به منظور تنظیم طیف	
۵۰۷	مثال	
۵۱۱	نکات	
۵۱۳	مخابره دیجیتال در باند میانی	۶
۵۱۵	آشکار سازی بهینه پالس	
۵۱۶	تشخیص وجود یا عدم وجود پالس مفروض	
۵۱۸	آشکار سازی بهینه به کمک مدار همبستگی	
۵۱۹	آشکار سازی بهینه به کمک فیلتر منطبق - قسمت ۱	
۵۲۱	آشکار سازی بهینه به کمک فیلتر منطبق - قسمت ۲	
۵۲۴	تمایز بین دو پالس مفروض	
۵۲۶	تمایز بین M پالس مفروض	
۵۲۹	استفاده از فضای سیگنال و تعبیر هندسی	۷
۵۳۲	مدولاسیون های باینری دیجیتال - قسمت ۱	
۵۳۵	مدولاسیون های باینری دیجیتال - قسمت ۲	
۵۳۷	آشکار سازی همدوس	
۵۴۰	آشکار سازی غیر همدوس (به روش پرش)	
۵۴۲	مدولاسیون FSK (BFSK)	

۵۴۴	آشکارسازی همدوس (به روش بهینه)	دوازدهم
۵۴۷	آشکارسازی غیر همدوس (به روش پوش)	
۵۵۰	تجزیه تحلیل سیگنال BPSK	
۵۵۲	آشکارسازی همدوس (به روش بهینه)	
۵۵۴	مدولاسیون های M تائی دیجیتال (قسمت ۱)	سیزدهم
۵۵۷	مدولاسیون های M تائی دیجیتال (قسمت ۲)	
۵۵۹	آشکارسازی به روش بهینه (قسمت ۱)	
۵۶۲	آشکارسازی به روش بهینه (قسمت ۲)	
۵۶۵	آشکارسازی به روش بهینه (قسمت ۳)	
۵۶۷	مدولاسیون MQAM (MASK/PSK)	چهاردهم
۵۷۰	آشکارسازی MQAM	
۵۷۱	آشکارسازی بهینه (قسمت ۱)	
۵۷۲	آشکارسازی بهینه (قسمت ۲)	
۵۷۴	مدولاسیون MFSK	
۵۷۷	آشکار سازی بهینه و احتمال خطا	
۵۷۸	محاسبه احتمال خطا	

در طول قرون متمادی بشر روش‌ها و وسایل مختلف و متنوع برای انتقال افکار و نیازهای خود به دیگران ابداع و اختراع کرده است. انسان اولیه که در گروه‌های کوچک زندگی می‌کرد مخابرات و ارتباطات را با استفاده از مکالمه، ایما و اشاره، و سمبل‌هایی که می‌نوشت انجام می‌داد. با بزرگتر شدن گروه‌های بشری و توزیع جمعیت در مناطق جغرافیایی وسیع‌تر ارتباطات مسافت دور مطرح گردید و انسان از وسایلی مانند علامت دادن با دود، نور انعکاسی از آینه‌ها و کبوترهای نامه‌بر استفاده می‌نمود. با شروع انقلاب صنعتی نیاز به روش‌های دقیق‌تر و سریع‌تر جهت ارتباطات دور کاملاً محسوس‌تر گردید. سیستم‌های مخابراتی که سیگنال الکتریکی را بوسیله یک زوج سیم از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل می‌ساختند، پاسخی ابتدایی به ضرورت فوق بود. در طول جنگ دوم جهانی و بعد از آن مهندسی مخابرات شدیداً مورد توجه قرار گرفت و پیشرفت‌های وسیعی در این زمینه، بویژه در مورد رادار، سیستم‌های مایکروویو، مدارهای ترانزیستوری و مجتمع، مخابرات ماهواره‌ای و لیزری بوجود آمد. امروزه سیستم‌های مخابرات الکتریکی در تمام نقاط دنیا مورد استفاده قرار گرفته و اطلاعات مورد نیاز از قبیل صحبت، تصویر، دیتا و انواع مختلف پیام را منتقل می‌کنند. بعد از جنگ دوم جهانی، با توجه به پیشرفتهایی که در زمینه کامپیوتر و کنترل خودکار حاصل شده بود، ارتباط کامپیوترها و سایر ماشینها نه تنها با بشر بلکه با دیگر ماشینها کاملاً ضرورت پیدا کرده بود. در نتیجه سیستم‌های مخابراتی کامپیوتری و دیجیتالی ابداع و مورد استفاده قرار گرفتند. یک سیستم مخابراتی اطلاعات را از منبع به مقصد که معمولاً در فاصله دورتری قرار دارد منتقل می‌سازد. با توجه به گستردگی یک سیستم مخابراتی که عملاً بررسی جزئی و دقیق تمام بلوکهای آنرا در این درس غیر ممکن می‌سازد و با توجه به اینکه عملکرد اصلی کلیه سیستم‌های مخابراتی انتقال اطلاعات است، لذا در این درس اصول و مسائل مربوط به انتقال اطلاعات به شکل یک سیگنال الکتریکی را مشخص نموده و روشهایی جهت تجزیه و تحلیل و طراحی سیستم‌های مخابراتی که به طیف وسیعی از سیستم‌های عملی قابل اعمال باشند را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

عناصر اصلی یک سیستم
مخابراتی

در شکل زیر دیاگرام بلوکی یک سیستم مخابراتی رسم شده است. هدف اصلی این سیستم انتقال اطلاعات از یک نقطه در مکان و زمان خاص بنام منبع به نقطه دیگری در زمان و مکان متفاوت بنام مقصد می باشد.



به طور کلی اطلاعات خروجی از منبع الکتریکی نبوده بنابراین در ورودی سیستم نیاز به تبدیلی است که اطلاعات را به یک کمیت متغیر بر حسب زمان بنام سیگنال الکتریکی تبدیل نماید.

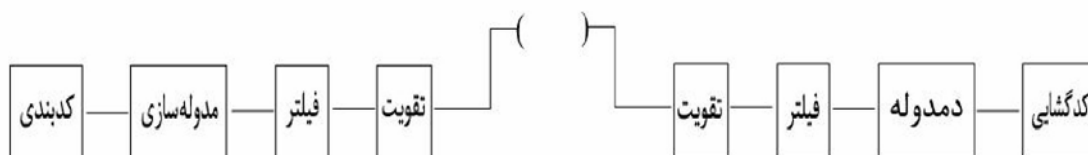
در مقصد نیز تبدیلی عمل عکس را انجام می دهد و شکل موج الکتریکی خارج شده از گیرنده را به اطلاعات مربوطه تبدیل می نماید. منبع اطلاعات و نقطه مقصد معمولاً از نظر مکانی با هم فاصله دارند.

کانال انتقال، اتصال الکتریکی بین منبع و مقصد را ایجاد می کند. به علت وجود اعوجاج، تداخل و نویز در کانال، کیفیت سیگنال انتقالی تنزل می یابد و لذا فرستنده و گیرنده به نحوی طراحی و ساخته می شوند که ایجاد نسخه قابل قبولی از پیام ارسالی بوسیله منبع درگیرنده امکان پذیر باشد.

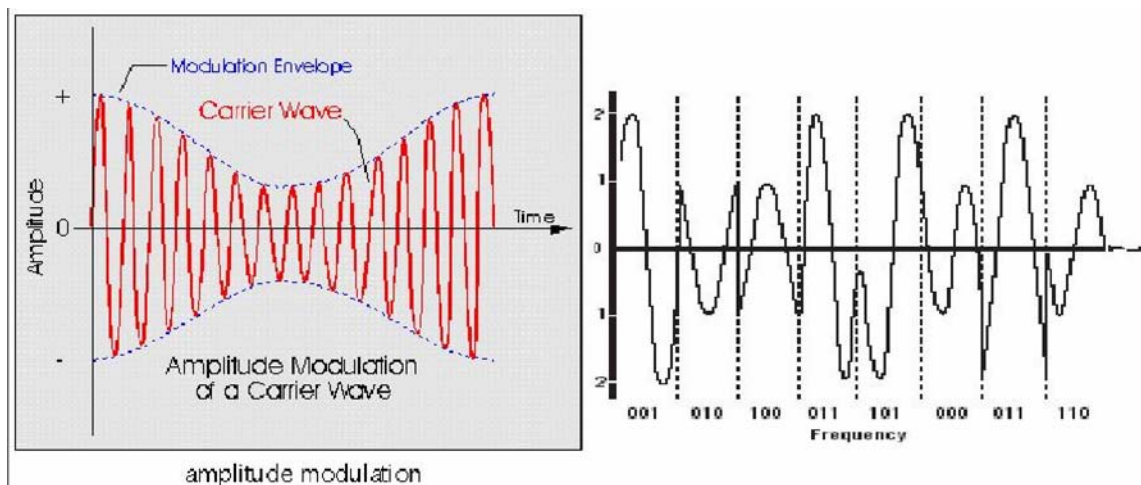
فرستنده سیگنال پیام را به کانال اعمال می کند و اگر چه در بعضی موارد می توان مبدل ورودی را مستقیماً به کانال اتصال داد اما در اغلب موارد ضروری است که به منظور انتقال موثر و بهتر سیگنال در کانال، سیگنال ورودی مورد پردازش قرار گرفته و تغییر یابد.

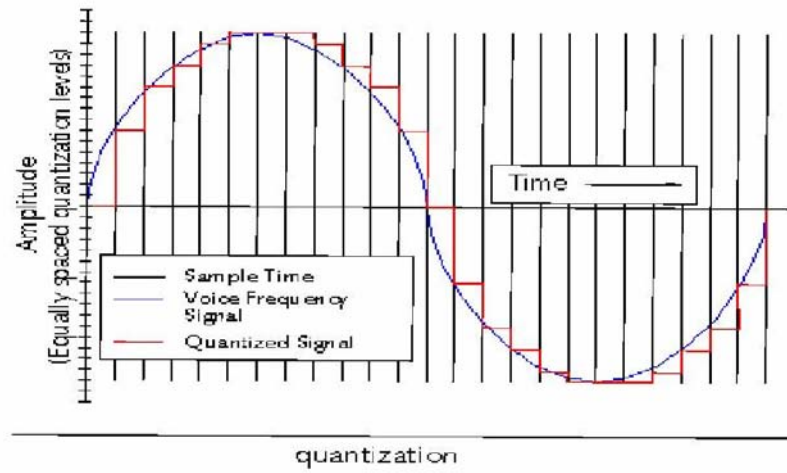
پردازش سیگنال که در فرستنده صورت می پذیرد، شامل تقویت، فیلتر کردن، مدوله سازی و کدبندی می باشد که شاید مدوله سازی از مهمترین آنها باشد.

سیگنال پس از انتقال توسط کانال به گیرنده وارد شده و در گیرنده مشابه فرستنده سیگنال دریافتی تقویت، فیلتر، دمدوله و کدگشایی می شود. سپس سیگنال خروجی گیرنده به مبدل خروجی داده می شود تا اطلاعات مشابه اطلاعات ارسالی در مقصد تولید گردد.



سیستم های مخابراتی را از نظر نوع مدوله سازی و ماهیت خروجی منبع اطلاعات می توان به سه نوع آنالوگ، دیجیتال و مختلط تقسیم بندی کرد. در سیستم مخابرات آنالوگ با استفاده از روش های مدوله سازی آنالوگ، اطلاعات آنالوگ ارسال و انتقال می یابد. در سیستم مخابرات دیجیتال، اطلاعات دیجیتال با استفاده از طرح های مدوله سازی دیجیتالی انتقال می یابند. در سیستم مخابراتی مختلط مقادیر نمونه برداری و کوانتیزه شده سیگنال پیام آنالوگ با استفاده از طراح های مدوله سازی دیجیتال، ارسال و انتقال می یابند.





با توجه به کلی بودن مفهوم اطلاعات در مخابرات، از پیام که تجلی فیزیکی اطلاعات بوجود آمده بوسیله منبع می باشد استفاده می کنیم.

پیام به هر شکلی که باشد، هدف سیستم مخابراتی تولید مجدد نسخه قابل قبولی از آن در مقصد می باشد.

انواع بسیاری از منابع اطلاعات و پیام وجود دارد که می توان آنها را در غالب دو دسته کلی، دسته بندی کرد.

پیام های آنالوگ و دیجیتال

پیام آنالوگ کمیتی فیزیکی است که به طور آرام و پیوسته بر حسب زمان تغییر می یابد.

فشار صوتی ایجاد شده بوسیله صحبت انسان، شدت نور در نقطه ای از تصویر تلویزیونی و یا وضعیت زاویه ای ژيروسکوپ هواپیما مثال هایی از پیام آنالوگ هستند. از آنجا که اطلاعات در شکل موج متغیر با زمان نهفته است، سیستم مخابرات آنالوگ باید قادر به تحویل این شکل موج با درجه معینی از اصالت و کیفیت اولیه آن باشد.

پیام دیجیتال، رشته مرتب شده ای از سمبل هایی است که از مجموعه محدودی عناصری گسسته انتخاب شده اند.

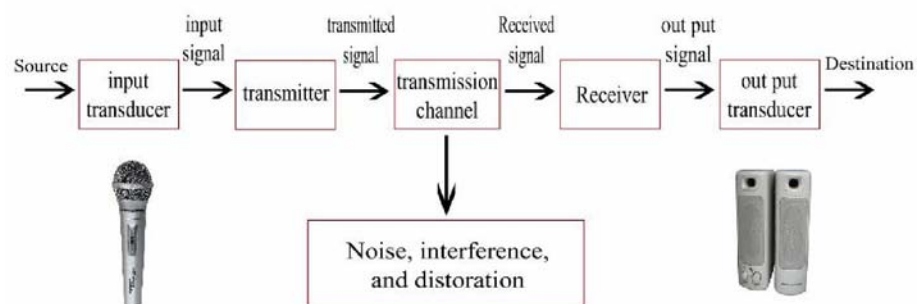
مثالی برای پیام های دیجیتالی عبارت است از حروفی که در یک کتاب چاپ شده اند یا لیستی از درجه حرارت امروز شهرهای کشور و یا دکمه هایی که بر روی صفحه کلید یک کامپیوتر مشاهده نموده و آنها را فشار می دهید.

از آنجا که اطلاعات در سمبل های گسسته نهفته است، سیستم مخابرات دیجیتال باید قادر به تحویل این سمبل ها با درجه معینی از دقت در مدت زمان مشخصی باشد.

منابع پیام معدودی ذاتاً الکتریکی بوده و اغلب سیستم های مخابراتی دارای مبدل های ورودی و خروجی می باشند تا پیام را به سیگنال الکتریکی و یا بالعکس تبدیل نمایند. مثلاً در سیستم مخابرات صوتی، میکروفن مبدل ورودی و بلند گو مبدل خروجی است.

بنابراین بعد از این فرض می کنیم که در تمام سیستم های مخابراتی مورد بررسی اینگونه مبدل ها وجود داشته و هدف اصلی از بحث، انتقال سیگنال می باشد.

پس در این رابطه دو عبارت سیگنال و پیام را که هر دو تحقق فیزیکی اطلاعات می باشند بدون تمایز و بطور یکسان بکار خواهیم برد.



فصل اول : مقدمه

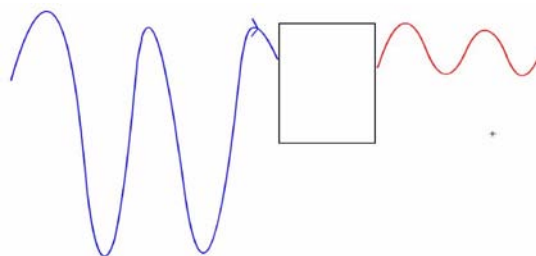
کانال انتقال مخابراتی

کانال انتقال
مخابراتی

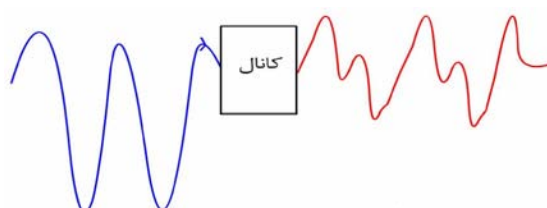
کانال انتقال مخابرات، اتصال و ارتباط الکتریکی بین منبع و مقصد را بوجود می آورد. این کانال می تواند یک زوج سیم، کابل هم محور، فضای آزاد و یا فیبر نوری باشد.

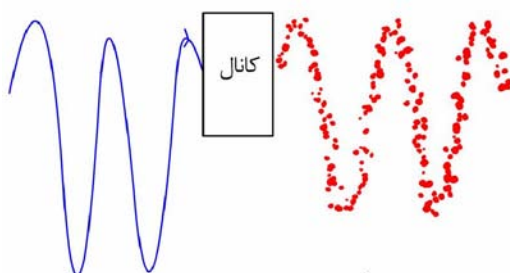
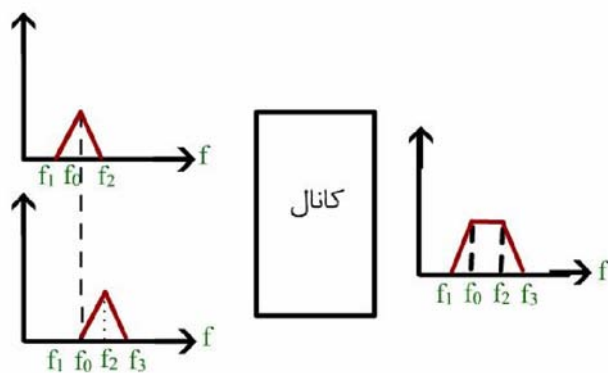


چند اثر نا مطلوب باعث تخریب و تنزل کیفیت سیگنال در طول انتقال آن می گردند. یکی از این اثرات تضعیف یا افت است که سبب کاهش شدت یا دامنه سیگنال در گیرنده می شود.

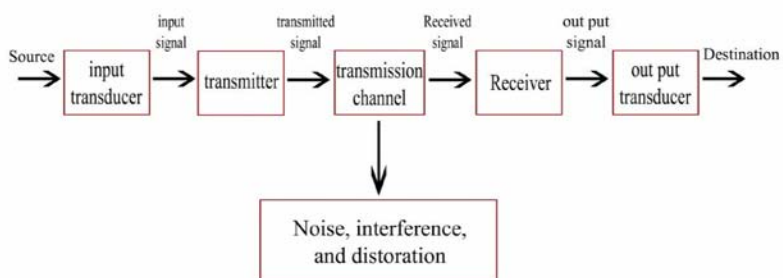


اثرات شدیدتر و جدی تر، اعوجاج تداخل و نویز می باشند که سبب تغییر شکل سیگنال می شوند.





اگر چه چنین اثراتی می تواند در هر نقطه از سیستم رخ دهد، ولی معمولاً آنها را انحصاراً به کانال اختصاص و نسبت داده و فرستنده و گیرنده را ایده آل در نظر می گیرند. اعوجاج که در واقع اختلال در شکل سیگنال است بواسطه ناکامل بودن پاسخ کانال به سیگنال مورد نظر بوجود می آید.



اگر کانال خطی ولی دارای اعوجاج باشد با کمک فیلترهای خاصی می توان اعوجاج مذکور را خنثی و یا حداقل کاهش داد. در صورتی که کانال به علت اعمال توان زیاد بصورت غیر خطی عمل نماید، اعوجاج غیر خطی سبب تغییر شکل خروجی کانال می شود.

تداخل بوسیله سیگنال های دیگر که از منابع انسانی، سایر فرستنده ها خطوط انتقال برق، ماشین آلات الکتریکی و مدارات سوئیچینگ ناشی می شوند بوجود می آید. این پدیده اغلب در سیستم های رادیویی که در آنها آنتن های گیرنده معمولاً چند سیگنال را در یک لحظه از زمان دریافت می نمایند رخ می دهد.

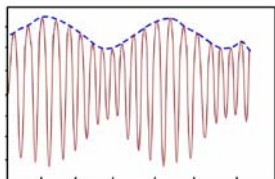
تداخل سیگنال رادیویی در سیستم های کابلی نیز می تواند وجود داشته باشد و آن هنگامی است که منابع تشعشعی سیگنال، در کابل های انتقال یا مدارات گیرنده عمل القای الکترو مغناطیسی را انجام دهند. مسلماً با فیلتر کردن مناسب می توان سیگنال های تداخلی را که در باند فرکانسی خارج از باند فرکانسی سیگنال مورد نظر قرار دارند حذف نمود.

نویز به سیگنال های تصادفی و غیر قابل پیش بینی که در اثر فرآیندهای طبیعی چه در داخل و چه در خارج سیستم بوجود می آیند، مربوط می شود. هنگامی که چنین تغییرات تصادفی به سیگنال حاوی اطلاعات اضافه شود، می تواند سیگنال پیام را تخریب و یا به طور کلی اطلاعات آن را از بین ببرد.

با فیلتر کردن می توان تا حدی اثرات تخریبی نویز را کاهش داد ولی همیشه مقداری نویز که غیر قابل حذف است، باقی می ماند. در واقع باید گفت نویز یکی از محدودیت های اصلی در طراحی سیستم های مخابراتی است.

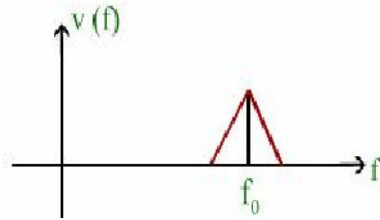
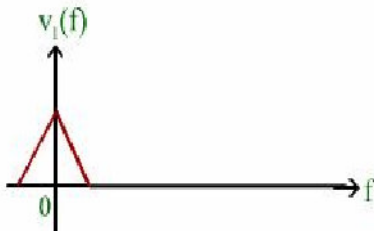
مدوله سازی

مدوله سازی از عملیات مهمی است که برای انتقال موثر و مطمئن اطلاعات در فرستنده صورت می پذیرد.



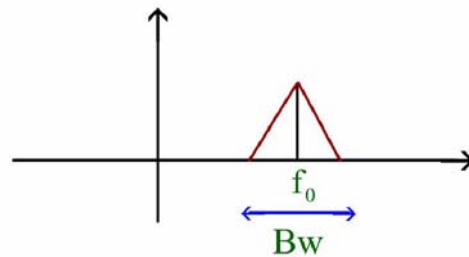
هر مدوله سازی شامل دو شکل موج است. یک سیگنال مدوله گر که نماینده پیام است و یک موج حامل که با توجه به کاربرد مشخص و مورد نظر انتخاب می شود. مدوله کننده، موج حامل را هماهنگ با تغییرات سیگنال مدوله گر تغییر می دهد، در نتیجه موج مدوله شده حاصله، اطلاعات پیام را حمل می کند. مدوله سازی فرآیندی معکوس پذیر است بطوری که اطلاعات را بتوان با استفاده از فرآیندی مکمل و مشابه بنام دمدوله سازی دوباره بدست آورد. بعنوان مثال شما در هنگام صحبت کردن بعنوان یک مدوله کننده موج پیوسته عمل می نمایند. انتقال صحبت شما در هوا در واقع توسط ایجاد نواهای حامل در تارهای صوتی و مدوله کردن این نواها بوسیله حرکت ماهیچه‌ای حفره صوتی صورت می پذیرد. همچنین صحبتی که گوش انسان می شنود موج صوتی مدوله شده می باشد. هدف اصلی د رمدوله سازی، تولید سیگنال مدوله شده مناسب با مشخصه‌های کانال انتقال است. در واقع غل و انگیزه‌های استفاده از مدوله سازی را در سیستم‌های مخابراتی می‌توان به صورت زیر ذکر کرد:

۱- انتقال سیگنال به فواصل دور معمولاً شامل موج الکترومغناطیسی است که در محیط انتقال در حال حرکت می باشد. کارایی هر روش انتقال به فرکانس سیگنال ارسالی بستگی دارد. با استفاده از خاصیت جابجایی فرکانسی مدوله سازی، اطلاعات پیام را می توان در حاملی که فرکانس آن برای روش انتقال مورد نظر مناسب است قرار داد.



بعنوان مثال، انتشار رادیویی دید مستقیم به آنتن‌هایی با ابعاد فیزیکی حداقل یک دهم طول موج سیگنال نیاز دارد برای انتقال مدوله نشده سیگنال صوتی که مولفه‌های فرکانس پایین آن حتی به 100 هرتز هم میرسد، آنتن‌هایی با طول حدوداً 30 کیلومتر مورد نیاز هستند. انتقال مدوله شده سیگنال مذکور در 100 MHz مانند رادیوی FM باعث کاهش طول آنتن به حدود 1 متر میگردد.

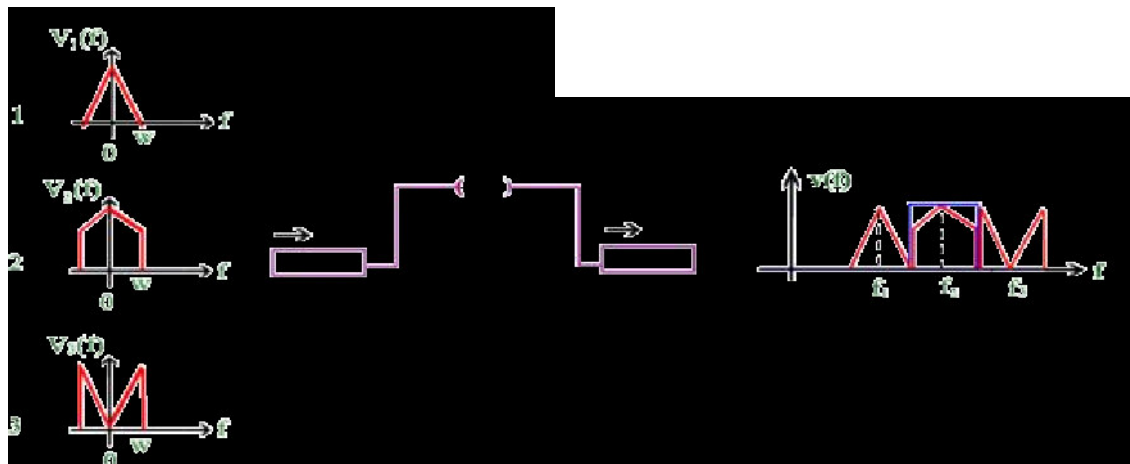
۲- در طراحی یک سیستم مخابراتی همیشه هزینه و در دسترس بودن سخت افزار باید در نظر گرفته شود. کیفیت عملکرد سخت افزار نیز به فرکانس‌های مورد نظر بستگی دارد. طراح یک سیستم مخابراتی می تواند با استفاده از مدوله سازی، سیگنال را در گستره‌ای از فرکانس قرار دهد که تا حد امکان دچار محدودیت های سخت افزار نشود. نکته مهم در این رابطه پهنای باند نسبی است که بصورت نسبت پهنای باند مطلق به فرکانس مرکزی تعریف می شود



اگر این پهنای باند نسبی در محدوده یک تا 10% قرار داده شود، هزینه‌ها و پیچیدگی‌های سخت افزار به حداقل مقدار می‌رسد. در واقع پهنای باند نسبی، عامل اصلی در استفاده از واحدهای مدوله کننده در فرستنده و گیرنده‌ها می‌باشد.

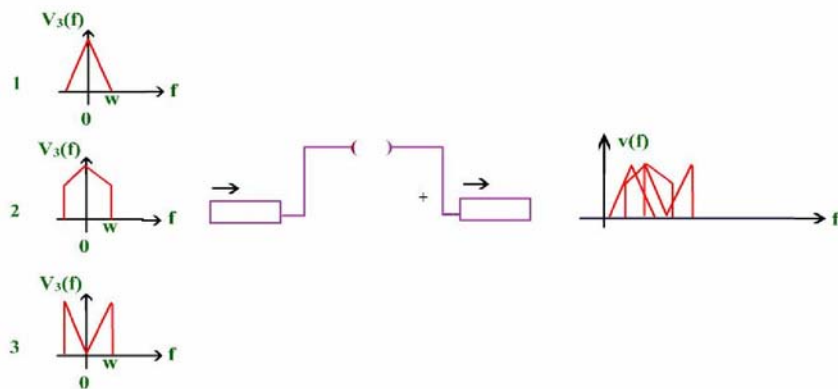
۳- یک راه حل برای خنثی کردن اثر تخریبی نویز و تداخل، افزایش توان سیگنال الکتریکی است ولی افزایش توان علاوه بر بالا بردن هزینه‌ها می‌تواند به وسایل و دستگاهها صدمه بزند. خوشبختانه بعضی از انواع مدوله سازی مانند مدوله سازی فرکانس (F.M) خاصیت با ارزش مقابله با نویز و تداخل را داشته و در نتیجه با استفاده از مدوله سازی‌های مذکور می‌توان تا حد زیادی سیگنال را در مقابل اثرات نویز و تداخل مصون نگه داشت.

۴ - یک گیرنده مانند رادیو یا تلویزیون، سیگنالهای متعددی را در هر لحظه از زمان دریافت می‌نماید. با استفاده از مدوله سازی، سیگنال هر ایستگاه فرستنده دارای فرکانس حاملی است که با فرکانس حامل فرستنده‌ها یا کانالهای دیگر متفاوت می‌باشد.



بدین ترتیب در گیرنده هر سیگنال مورد نظر با فیلتر کردن، از سایر سیگنالها جدا شده و آشکار سازی می‌شود.

همچنین با استفاده از مدوله سازی می‌توان چند سیگنال را بطور همزمان بر روی یک کانال انتقال داد. در غیر این صورت کلیه سیگنالهای ارسالی از فرستنده‌های مختلف با هم تداخل کرده و آشکار سازی یک سیگنال بخصوص و مورد نظر امکان پذیر نمی‌باشد.



این پدیده را ادغام فرکانسی می نامند و در آن هر سیگنال با حامل خاصی مدوله شده و در ناحیه معینی ازباند فرکانسی کانال قرار داده می شود. بعنوان مثال می توان ۸۰۰ کانال تلفنی صوتی را با هم ادغام فرکانسی کرده و بوسیله یک کابل هم محور به قطر کمتر از یک سانتیمتر ارسال داشت بنابراین با استفاده از ادغام فرکانسی که پایه و اساس آن مدوله سازی است می توان کارایی یک سیستم مخابراتی را افزایش داد .

در قسمت قبل در مورد مدوله سازی که می توان آنرا عملیاتی برای پردازش سیگنال به منظور انتقال بهتر و موثرتر تعریف کرد، شرح مختصری ارائه شد.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \ 1 \\ b \ 2 \\ c \ 3 \\ \vdots \end{array} & \xrightarrow{\begin{array}{c} K \\ \dots 1 \\ \dots 10 \\ \dots 11 \end{array}} & \begin{array}{c} a \ 1 \\ d \ 4 \\ c \ 3 \end{array} \\
 & \text{کتابخانه} \rightarrow & \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{r در ثانیه} \\ a \ b \ c \ d \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{K r رقم در ثانیه} \\ a \ b \ c \ d \end{array} \rightarrow BW = KBW_{\text{uncoded}}$$

K رقم باینری

کد بندی را نیز می توان عملیاتی برای پردازش سمبل به منظور مخابرات بهتر و موثرتر با اطلاعات دیجیتالی که به شکل سمبل های گسسته هستند توصیف نمود. در انتقال دیجیتالی مسافت دور با قابلیت اطمینان بالا امکان دارد به هر دو عملیات کد بندی و مدوله سازی نیاز باشد. با عمل کد گذاری، یک پیام دیجیتالی به یک رشته از سمبل های جدید تبدیل می شود. کد گشایی یک رشته کد شده بصورت پیام اولیه، احتمالاً با خطاهایی که بواسطه نویز، تداخل و اعوجاج در طول انتقال ایجاد شده اند، انجام می گیرد. اغلب روشهای کد بندی شامل مدارهای منطقی دیجیتالی و سمبل های باینری یعنی رقمهای باینری ۰ و ۱ می باشند. یک ترمینال کامپیوتر یا یک منبع دیجیتالی دیگر را در نظر بگیرید که $M \gg 2$ سمبل را از خود صادر می کند. انتقال کد بندی شده یک پیام صادر شده از یک منبع، به M شکل موج متفاوت نیاز دارد به طوری که هر شکل موج به یک سمبل اختصاص دارد. از طرف دیگر هر سمبل را می توان با یک کلمه کد بندی به طول K رقم باینری توصیف و ارائه کرد با توجه به اینکه 2^k کلمه کد، برای کد بندی M سمبل منبع وجود دارد، باید $2^k \geq M$ یا $K \geq \log_2 M$ باشد.

همچنین اگر منبع در هر ثانیه، r سمبل از خود صادر کند در اینصورت کد باینری دارای kr رقم باینری در ثانیه بوده و پهنای باند انتقال مورد لزوم، K برابر پهنای باند مورد نیاز جهت ارسال سمبل های کد نشده خواهد بود. در مقابل افزایش پهنای باند، کد گذاری باینری سمبل های M تایی یک منبع گسسته، دارای دو مزیت است.

اولاً سخت افزار مورد نیاز برای انتقال یک سیگنال باینری که فقط از دو شکل موج متفاوت تشکیل یافته است از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

ثانیاً اثرات تخریبی نویز بر روی یک سیگنال باینری کمتر از اثرات آن بر روی سیگنالی با M شکل موج مختلف است و در نتیجه خطاهای کمتری بعثت وجود نویز در سیگنال باینری دریافتی وجود خواهد داشت. بنابراین می‌توان گفت که این روش کد بندی، اساساً "یک فن و روش دیجیتالی برای کاهش نویز باند وسیع است. همچنین با اضافه کردن رقمهای کنترلی اضافی به هر کلمه کد باینری، می‌توان اغلب خطاهایی که در انتقال رخ می‌دهد را آشکار و حتی تصحیح کرد. کد بندی برای کنترل خطاها، سبب افزایش پهنای باند و پیچیدگی سخت افزار می‌شود ولی متقابلاً یک سیستم مخابرات دیجیتالی بدون خطا را بوجود می‌آورد. البته شرایط کاملاً معکوس نیز می‌تواند پیش بیاید. فرض کنید یک منبع داده‌های باینری و یک سیستم مخابراتی با نسبت سیگنال به نویز کافی ولی پهنای باند محدود به ما داده شده است. اینگونه شرایط در شبکه‌های مخابرات کامپیوتری که از کانال‌های صوتی تلفن استفاده می‌نمایند اغلب مطرح می‌گردد. با کد گذاری بلوکهای متشکل از K رقم باینری بصورت سمبل‌های M تایی، می‌توان پهنای باند سیگنال را با ضریب $K = \log_2 M$ کاهش داده و در نتیجه از یک کانال با پهنای باند محدود، داده‌ها را با سرعت زیاد انتقال داد. بالاخره باید گفت که با استفاده از کد بندی دیجیتالی و تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتالی می‌توان سیگنال‌های آنالوگ را توسط سیستم‌های مخابرات دیجیتالی انتقال داده و از کارایی، قابلیت انعطاف و اطمینان اینگونه سیستم‌ها بهره‌مند شد.

محدودیت های اساسی
در طراحی سیستم های
مخابراتی

یک مهندس در طراحی یک سیستم مخابراتی، اغلب با دو نوع کلی از محدودیت ها روبرو است. در یک طرف مسائل و مشکلات تکنولوژی قرار دارد. مسائلی از قبیل در دسترس نبودن سخت افزارهای مورد نظر و نیاز، عوامل اقتصادی، مقررات ملی و بین المللی و... اینگونه مشکلات در واقع به قابل تحقق بودن اهداف مرتبط بوده و می توان آنرا در تئوری حل نمود. اگر چه در عمل امکان دارد که حل آن به طور کامل تحقق پذیر نباشد. در طرف دیگر محدودیت های فیزیکی اصلی واقع شده است، یعنی قوانین طبیعت که بدون توجه به مشکلات تکنولوژی به ما دیکته می کنند که چه کاری قابل انجام بوده و چه کاری غیر قابل تحقق است. محدودیت های اساسی در انتقال اطلاعات بوسیله مدارهای الکتریکی، پهنای باند و نویز هستند. مفهوم پهنای باند هم به سیگنال و هم به سیستم قابل اعمال بوده، و معیاری از سرعت است. هنگامی که سیگنالی در زمان با سرعت تغییر می کند محتوای فرکانسی یا طیف آن در گستره وسیعی قرار گرفته و ما این سیگنال را دارای پهنای باند بزرگ بحساب می آوریم. همچنین قابلیت یک سیستم در تعقیب تغییرات سیگنال در پاسخ فرکانسی یا پهنای باند انتقال آن نهفته است. با توجه به این که کلیه سیستم های مخابراتی دارای عناصر ذخیره کننده انرژی بوده و اینگونه عناصر در یک لحظه از زمان نمی توانند انرژی ذخیره شده را تغییر دهند. هر سیستم مخابراتی دارای پهنای باند محدودی مانند B است که سرعت تغییرات سیگنال را محدود می سازد.

انتقال اطلاعات به پهنای باند انتقال کافی که بتواند طیف سیگنال را در خود جای دهد نیاز دارد، در غیر اینصورت اعوجاج شدیدی ایجاد خواهد شد. به عنوان مثال، سیگنال ویدئویی تلویزیون به پهنای باند چند مگاهرتز نیاز دارد، در صورتی که سیگنال صحبت انسان به علت تغییرات آهسته تر پهنای باند $B = 3\text{KHz}$ را لازم دارد. درمورد سیگنال دیجیتال با r سمبل در هر ثانیه پهنای باند باید $B \geq \frac{r}{2}$ باشد.

نویز محدودیت دوم در انتقال اطلاعات است. این پدیده غیر قابل اجتناب بوده و علت آن به نظریه انرژی جنبشی مربوط می شود. در درجه حرارت های بالاتر از صفر مطلق، انرژی حرارتی، ذرات میکروسکوپی را وادار به حرکات تصادفی کرده و حرکات تصادفی ذرات باردار مانند الکترون ها سبب ایجاد جریانها یا ولتاژهای تصادفی به نام نویز حرارتی می شوند. نویز انواع دیگری نیز دارد اما نویز حرارتی در هر سیستم مخابراتی وجود دارد. معیار اندازه گیری و توصیف نویز در مقایسه با سیگنال

اطلاعات، نسبت توان سیگنال به توان نویز یا نسبت سیگنال به نویز $\frac{S}{N}$ می‌باشد. معمولاً توان نویز حرارتی کاملاً کوچک و جزئی است و $\frac{S}{N}$ به حدی بزرگ است که می‌توان به نویز توجهی نکرد ولی در مقادیر کوچک $\frac{S}{N}$ نویز سبب تنزل کیفیت سیگنال‌ها در مخابرات آنالوگ و باعث ایجاد خطا در مخابرات دیجیتال می‌گردد.

در سیستم‌های مخابرات مسافت دور که اتلاف انتقال موجب کاهش توان سیگنال دریافتی به حد توان نویز می‌شود، مشکلات $\frac{S}{N}$ پایین خود را بیشتر نمایان می‌کند. بدیهی است که تقویت در گیرنده، دردی را دوا نخواهد کرد چون نویز نیز به همراه سیگنال تقویت خواهد شد. با توجه به هر دو محدودیت، شانون این اصل را مطرح کرد که سرعت انتقال اطلاعات از ظرفیت کانال که بر اساس رابطه‌ی زیر قابل تعیین است نمی‌تواند تجاوز کند.

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

رابطه فوق که به قانون هارتلی-شانون معروف است، حد بالا و سقفی برای عملکرد یک سیستم مخابراتی با پهنای باند و نسبت سیگنال به نویز معین را تعیین می‌نماید.

سیگنالها و طیف
فرکانسی آنها

سیگنالهای مخابراتی کمیاتی هستند که بر حسب زمان تغییر می کنند.

اگر چه سیگنال در دنیای واقعی د ر حوزه زمان وجود دارد می توان آن را د ر حوزه فرکانس به صورت مجموعه ای از مولفه های سینوسی در فرکانس های مختلف نمایش و ارائه داد. توصیف سیگنال در حوزه فرکانس را طیف فرکانسی می نامند. تجزیه و تحلیل طیفی با استفاده از سری و تبدیل فوریه یکی از روش های اصلی و اساسی مهندسی مخابرات است. یک سیگنال پریودیک را با استفاده از سری فوریه به حوز طیف (فرکانس) انتقال می دهیم.

۱- سیگنال های
متناوب سیگنال های
غیر متناوب

اگر سیگنال $v(t)$ در عبارت $v(t) = v(t + T_0)$ به ازاء تمام مقادیر t صدق کند آنرا یک سیگنال متناوب با دوره متناوب T_0 گویند. اگر هیچ T_0 ای برای عبارت فوق وجود نداشته باشد سیگنال را غیر پریودیک (غیر متناوب) گویند.

۲- سیگنال های
یقینی سیگنال های
تصادفی

سیگنال های یقینی، سیگنالی است که در مورد مقدار آن در هر لحظه از زمان هیچگونه نامطمئنی وجود ندارد. بنابراین سیگنال یقینی را می توان بصورت تابع مشخصی از زمان مدلسازی و تعریف کرد. سیگنال تصادفی سیگنالی است که قبل از وقوع آن تا حدی عدم اطمینان در مورد مقدار آن وجود دارد. چنین سیگنالی را می توان متعلق به مجموعه یا خانواده ای از سیگنال ها محسوب کرد به طوری که هر سیگنال در این مجموعه با سیگنال های دیگر تفاوت دارد.

۳- سیگنال‌های انرژی
سیگنال‌های توان

انرژی کل سیگنال $v(t)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$$

توان متوسط این سیگنال از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2 dt$$

یک سیگنال را سیگنال انرژی گویند اگر فقط اگر $0 < E < \infty$ به عبارت دیگر مقدار انرژی غیر صفر ولی محدود داشته باشد.

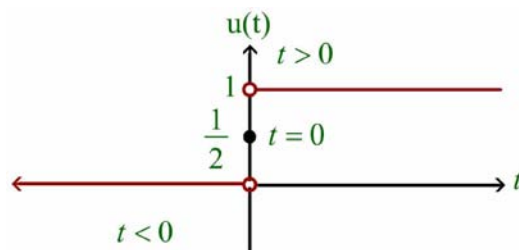
یک سیگنال را سیگنال توان گویند اگر فقط اگر $0 < P < \infty$ به عبارت دیگر توان سیگنال مقدار غیر صفر ولی محدود داشته باشد.

با توجه به روابط فوق یک سیگنال نمی‌تواند هم سیگنال انرژی و هم سیگنال توان باشد. در ادامه فرمول ریاضی چند سیگنال ارادی که در محاسبات سری فوریه به آنها احتیاج داریم معرفی می‌گردد.

۱- تابع پله

این تابع که دارای شکل حوزه‌ی زمانی زیر می‌باشد را می‌توان به این شکل نوشت.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}$$

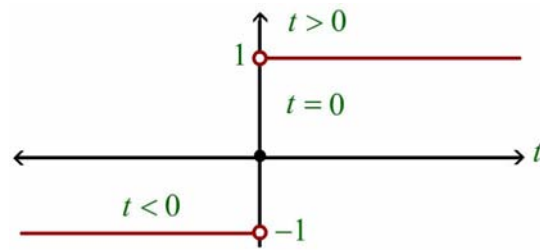


۲- تابع علامت
یا sgn

همان طوری که در شکل مشاهده می‌شود تابع sgn از دو تابع پله تشکیل شده

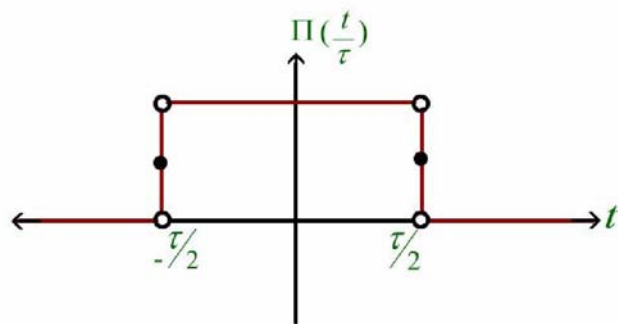
است. بطوری که:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$



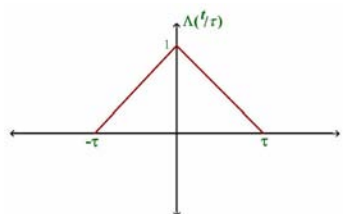
۳- تابع چهار
گوش یا rect

$$\text{rect} \left(\frac{t}{\tau} \right) = \Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ \frac{1}{2} & |t| = \tau/2 \end{cases}$$



۴- تابع مثلثی

$$\Lambda(t/\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



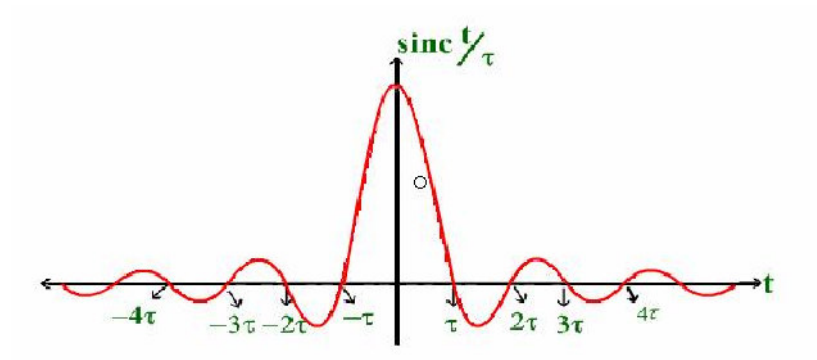
۵- تابع سینک

مشاهده می شود که این تابع دارای صفرهای متساوی الفاصله به اندازه $k\tau$

می باشد.

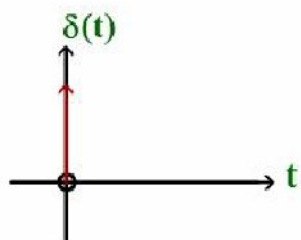
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\text{sinc}(t/\tau) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\tau})}{\pi (\frac{t}{\tau})}$$



طبق تعریف

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$



خواص تابع ضربه

$$۱) \delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \infty & t = \tau \end{cases}$$

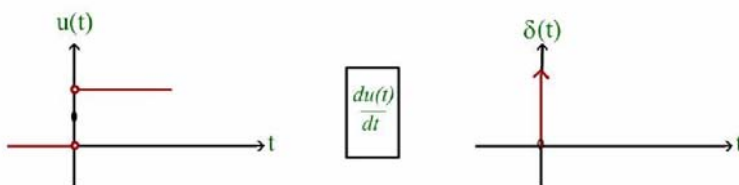


$$۲) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

این انتگرال در واقع سطح زیر منحنی $\delta(t)$ یا تابع ضربه است. یعنی اگر چه $\delta(t)$ دارای مقدار بی نهایت می باشد، ولی سطح زیر منحنی آن همواره ثابت و برابر واحد است.

$$\delta(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \longrightarrow 1$$

$$۳) \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



$$۴) \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

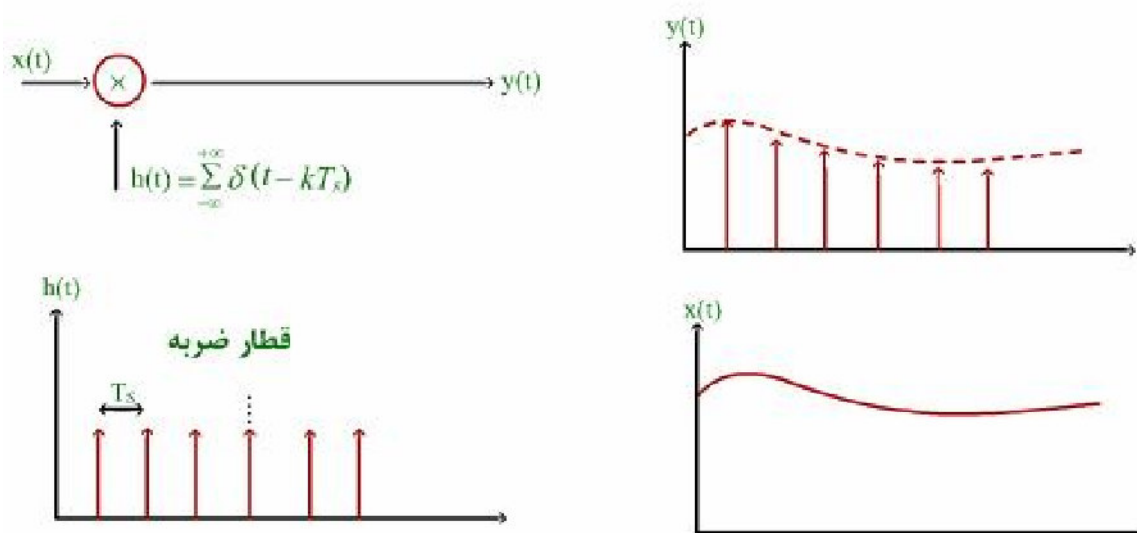
$$۵) \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \sin c\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

در واقع بیانگر این واقعیت هستند که می توان با به سمت صفر میل دادن عرض تابع چهار گوش و یا تابع سینک به سمت صفر تابع ضربه را شبیه سازی کرد.

به عنوان یک مثال از کاربردهای تابع ضربه به مدار شکل زیر توجه کنید.

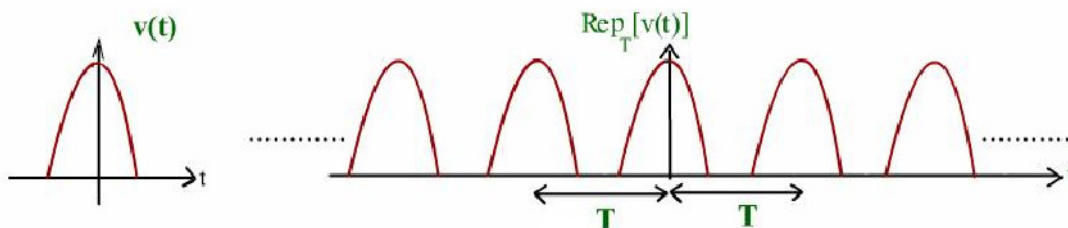
همانطوری ملاحظه می شود یک رشته یا قطار ضربه به فاصله T_s ثانیه در سیگنال $x(t)$ ضرب شده است تا سیگنال $y(t)$ حاصل شود.

چنانکه در شکل می بینید اگر یک قطار ضربه را در حوزه زمان در یک سیگنال $x(t)$ ضرب کنیم در واقع عمل نمونه برداری را انجام داده ایم.



۷-تابع تکرار

$$\text{Rep}_T[v(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t - kT) = v(t) * h(t) = v(t) * \text{Rep}_T[\delta(t)]$$



در ادامه بعد از تعریف کانولوشن خواهیم دید که کانولوشن هر سیگنالی با تابع ضربه‌ای باعث انتقال آن بر روی تابع ضربه می‌شود.

۸- تابع نمونه برداری
شده یا comb

$$\text{comb}_{T_s}[x(t)] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \cdot \delta(t - kT_s)$$

توجه داریم که ضرب در تابع ضربه نمونه برداری است در حالیکه کانولوشن با تابع ضربه انتقال است. در ادامه سری فوریه و تبدیل فوریه معرفی می‌گردند.

سری فوریه

فرض کنید $g(t)$ سیگنالی متناوب با دوره ی تناوب

$$g(t) = g(t \pm kT_0), k = 0, 1, 2, \dots$$

T_0 باشد.

در این حالت بسط سری فوریه ی نمایی این سیگنال عبارت است از

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi nf_0 t}, f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$c(nf_0)$ در این رابطه را ضرایب سری فوریه نامند. این ضرایب از رابطه ی زیر قابل محاسبه هستند.

$$c(nf_0) = c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi nf_0 t} dt$$

چند خاصیت از خواص
ضرایب سری فوریه

۱- کلیه فرکانس ها، مضارب صحیح یا هارمونیک های فرکانس اصلی :

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

می باشند. بنابراین خطوط طیفی مجاور از یکدیگر به اندازه f_0 فاصله دارند.

۲- مؤلفه DC ضرایب سری فوریه با مقدار متوسط سیگنال برابر است.

$$\begin{aligned} c(nf_0)|_{n=0} &= c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi \times 0 \times f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) dt = \langle g(t) \rangle \end{aligned}$$

$$c(0) = \langle g(t) \rangle$$

۳- اگر $g(t)$ تابعی حقیقی از زمان باشد، تقارن هرمیشن (Hermition) برقرار است یعنی :

$$c^*(nf_0) = c(-nf_0) \Rightarrow \begin{cases} |c(nf_0)| = |c(-nf_0)| \\ \angle c(nf_0) = -\angle c(-nf_0) \end{cases}$$

رابطه فوق نشان می دهد که طیف دامنه تقارن زوج و طیف فاز دارای تقارن فرد می باشد.

با استفاده از خاصیت فوق می توان سری فوریه نمایی را به صورت زیر نوشت:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n)$$

رابطه فوق را سری فوریه مثلثاتی می نامند.

۴- قضیه توان
پارسوال - قسمت اول

توان متوسط سیگنال $g(t)$ را با به توان دو رساندن مقادیر ضرایب سری فوریه و جمع کردن آنها می توان به دست آورد.

$$p = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) g^*(t) dt$$

$$g^*(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}$$

$$p = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \right] dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] c_n^*$$

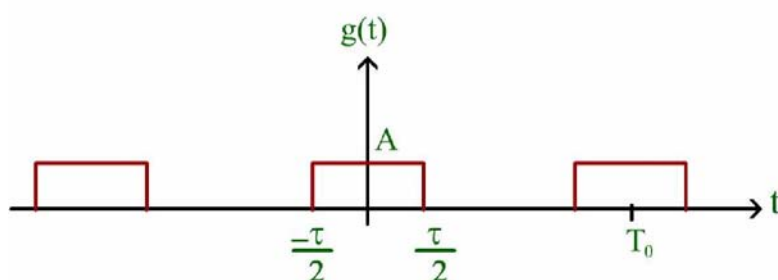
عبارت داخل علامت براکت در واقع همان C_n است بنابراین داریم

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c(n)|^2$$

در واقع $|c_n|^2$ به ازای هر مقدار از n ، توان مؤلفه nf_0 از سیگنال $g(t)$ است

مثال

ضرایب سری فوریه یک رشته پالس چهار گوش متناوب با عرض τ و پریود تکرار T_0 را به دست آورید. اگر $T_0 = 4\tau$ باشد توان متوسط در چهار هارمونی اول سیگنال را بدست آورید. توان کل سیگنال نیز محاسبه شود.



با توجه به شکل می توان ضریب سری فوریه را بدین صورت محاسبه کرد.

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{2A}{T_0} \int_0^{\tau/2} \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

که پس از ساده سازی خواهیم داشت:

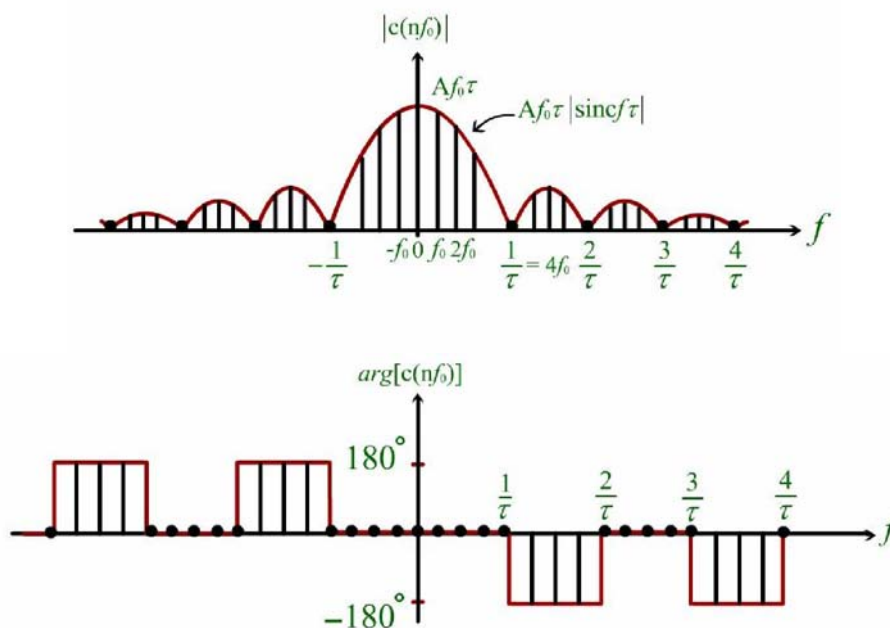
$$c(nf_0) = A \tau f_0 \text{Sinc}(nf_0 \tau)$$

$$\text{if } \tau = \frac{T}{4} \Rightarrow c(nf_0) = \frac{A}{4} \text{Sinc} \frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow \text{توان کل سیگنال} \quad p = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 dt = \frac{A^2 \tau}{T_0} \bigg|_{\tau = \frac{T_0}{4}} = \frac{A^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{توان متوسط در چهار هارمونی اول سیگنال} \quad p(B = \frac{4}{T_0}) = \sum_{n=-4}^4 \left| \frac{A}{4} \text{Sinc}\left(\frac{n}{4}\right) \right|^2$$

طیف رشته پالس چهار گوش متناوب به ازای $\tau = \frac{T_0}{4}$ در شکل زیر به صورت منحنی‌های دامنه و فاز رسم شده است.

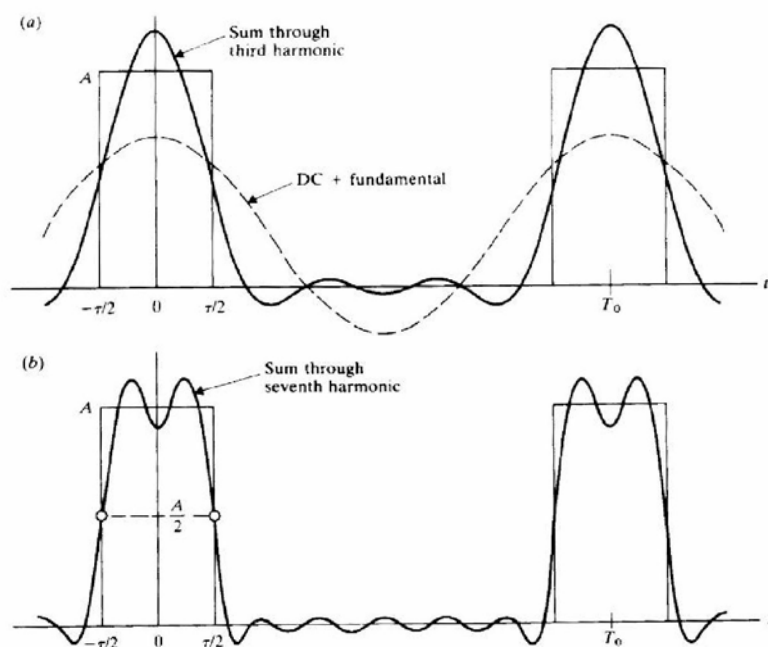


از شکل فوق پیداست که دامنه ضرایب سری فوریه زوج و فاز آنها توابعی فرد می‌باشند. حال که رشته پالس چهار گوش متناوب را به مؤلفه‌های فرکانسی آن تجزیه کرده‌ایم سعی می‌کنیم که با ترکیب این مؤلفه‌ها سیگنال اصلی را باز سازی کنیم. اگر تابع $g(t)$ را بر حسب ضرایب سری فوریه مثلثاتی بنویسیم داریم:

$$|2c_n| = \frac{2A}{4} \text{Sinc} \frac{n}{4}$$

$$g(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2}A}{\pi} \cos \omega_0 t + \frac{A}{\pi} \cos(2\omega_0 t) + \frac{\sqrt{2}A}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \dots$$

اگر مولفه‌های $g(t)$ را تا هارمونیک سوم و هفتم جمع بزنیم شکل زیر نتیجه خواهد شد.



مشاهده می‌شود در تقریب اول یعنی تقریب ۳ هارمونیکی، رشته پالس متناوب فاقد گوشه‌های تند و تیز $g(t)$ است. در تقریب دوم، یعنی تقریب ۷ هارمونیکی هارمونیک‌های بالاتر با دامنه کوچکتر سبب تند و تیز شدن گوشه‌های می‌شوند.

طیف فرکانسی
سیگنالهای غیر متناوب
(تبدیل فوریه)

در قسمت قبل از سری فوریه برای توصیف سیگنال در حوزه فرکانس استفاده شد. اکنون با استفاده از روش مشابه سیگنال غیر متناوب را بر حسب سیگنالهای

نهایی بیان می کنیم. (تبدیل فوریه برای سیگنال های انرژی $(E \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt < \infty)$)

تعریف می شود.

اگر $g(t)$ سیگنال حوزه زمان و $G(f)$ تبدیل فوریه آن باشد، رابطه این دو سیگنال به صورت زیر خواهد بود.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} dt$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

از اختصارات زیر در تبدیل فوریه استفاده می شود

$$F[g(t)] = G(f)$$

تبدیل فوریه $g(t)$ ، $G(f)$ است

$$F^{-1}[G(f)] = g(t)$$

عکس تبدیل فوریه $G(f)$ ، $g(t)$ است

این شکل برای شرایطی که $g(t)$ و $G(f)$ یک زوج فوریه را تشکیل دهند استفاده می شود.

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$

اگر $g(t)$ حقیقی باشد آنگاه تقارن هرمیتی برای سیگنال انرژی نیز برقرار و بصورت زیر خواهد بود:

$$G(-f) = G^*(f) \Rightarrow \begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| \\ \angle G(-f) = -\angle G(f) \end{cases}$$

بنابراین طیف دامنه $G(f)$ تابعی زوج و فاز آن تابعی فرد از فرکانس می باشد.

(۲) اگر $g(t)$ زوج و حقیقی باشد یعنی

$$g(t) = g(-t)$$

تبدیل فوریه ی $g(t)$ بصورت ساده زیر نوشته می شود:

$$G(f) = 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos(2\pi ft) dt$$

و اگر $g(t)$ فرد و حقیقی باشد. یعنی $g(t) = -g(-t)$ تبدیل فوریه آن بصورت ساده زیر نوشته می شود:

$$G(f) = -j2 \int_0^{\infty} g(t) \sin 2\pi ft dt$$

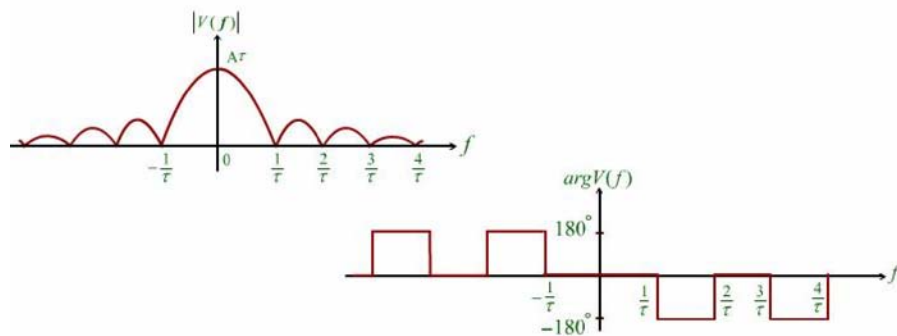
برای نمونه تبدیل فوریه ی سیگنال $v(t)$ را که بصورت $A\Pi(\frac{t}{\tau})$ تعریف شده است بدست می

آوریم:

$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A}{\pi f} \sin \pi f \tau$$

$$V(f) = A \tau \operatorname{sinc} f \tau$$

دامنه و فاز طیف این سیگنال در شکل زیر آورده شده است.



با توجه به شکل فوق متوجه می شویم که قسمت مهم و عمده طیف در محدوده $|f| < \frac{1}{\tau}$ قرار دارد. پس می توان $\frac{1}{\tau}$ را معیاری برای پهنای طیفی پالس در نظر گرفت. اگر پهنای پالس کاهش یابد، (τ کوچک شود)، پهنای فرکانسی افزایش می یابد و بالعکس با ازدیاد پهنای پالس پهنای طیف کاهش می یابد. بنابراین پالس های کوتاه طیف وسیع و پالس ها عریض طیف باریک دارند. این پدیده را گسترش معکوس (Reciprocal spreading) می نامند و یکی از خواص کلی سیگنالها چه پالسی و چه غیر پالسی است. بنابراین مولفه های فرکانس بالا بواسطه تغییرات زمانی سریع بوجود آمده و تغییرات زمانی آرامتر و کندتر محتوای فرکانس بالای نسبتاً کمتری را دارا هستند.

۳- قضیه‌ی انرژی ری لی

قضیه‌ی ری لی، در واقع مشابه قضیه‌ی توان پارسوال بوده و انرژی یک سیگنال را با طیف فرکانسی آن مرتبط می‌سازد

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g(f)g^*(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(f)|^2 df$$

بنابراین با انتگرال گیری از مربع طیف دامنه در تمامی فرکانس‌ها، انرژی کل سیگنال بدست می‌آید. $|v(f)|^2$ توزیع انرژی را در حوزه‌ی فرکانس بیان کرده و در نتیجه می‌توان آن را چگالی طیفی انرژی نامید.

به عبارت دیگر، انرژی در هر باند فرکانسی دیفرانسیلی، مانند df برابر با $|v(f)|^2 df$ است. با استفاده از این پارامتر و تعبیر فوق قادر خواهیم بود پهنای طیفی سیگنال را که مقدار اعظم انرژی در محدوده فرکانس‌های آن قرار دارد، تعریف و مطرح کنیم.

مثلاً در مثال قبل چگالی طیفی انرژی یک پالس چهار گوش رسم شد. اگر انرژی سیگنال در باند $|f| < \frac{1}{\tau}$

را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} |G(f)|^2 df = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \text{sinc}^2 f\tau = 0.92 A^2 \tau$$

انرژی کل پالس $E = A^2 \tau$ می باشد ، که پهنای طیفی فوق ۹۰ درصد انرژی کل سیگنال را شامل می‌گردد.

فصل دوم: سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

خواص تبدیل فوریه
- قسمت سوم

۴ - خاصیت خطی بودن

اگر $g_1(t) \leftrightarrow G_1(f)$ و $g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$ در این صورت به ازای تمام مقادیر ثابت α_1 و α_2 می توان گفت:

$$\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) \longleftrightarrow \alpha_1 G_1(f) + \alpha_2 G_2(f)$$

۵- خاصیت تغییر مقیاس زمانی

اگر تبدیل فوریه $g(t)$ ، $G(f)$ باشد یعنی

$$g(t) \longleftrightarrow G(f)$$

آنگاه

$$g\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow |\tau| G(f\tau)$$

با استفاده از تبدیل فوریه سیگنال $g(t/\tau)$ این عبارت به راحتی اثبات می شود.

$$F\left(g\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \tau g(k) e^{-j(\omega\tau)k} dk = |\tau| G(f\tau)$$

مفهوم خاصیت فوق این است که انقباض در حوزه زمان سبب انبساط در حوزه فرکانس و انبساط در

حوزه زمان سبب انقباض در حوزه فرکانس می شود.

به عنوان مثال اگر تبدیل فوریه سیگنال $g(t) = e^{-t}u(t)$ را با استفاده از تعریف آن حساب کنیم خواهیم داشت :

$$G(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

حال تبدیل فوریه سیگنال $y(t) = e^{-at}u(t)$ را با توجه به خاصیت فوق بدست می آوریم.

از آنجا که $y(t) = g(at)$

پس

$$y(f) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + j2\pi \frac{f}{a}} = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

۶- خاصیت
شیفت زمانی:

براساس این خاصیت اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشد آنگاه

$$g(t - \tau) \leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

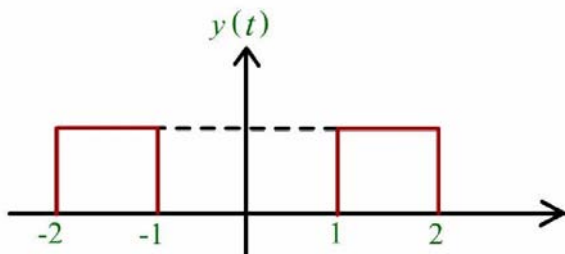
این خاصیت به فرم زیر اثبات می شود.

$$F(g(t - \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $t - \tau = p$ که نتیجه می دهد $dt = dp$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(g(t - \tau)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{-j2\pi fp} e^{-j2\pi f\tau} dp = \\ e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{-j2\pi fp} dp &= e^{-j2\pi f\tau} G(f) \end{aligned}$$

که رابطه ی فوق را تأیید می کند. بر اساس این خاصیت با دانستن تبدیل فوریه سیگنال $g(t) = \Pi(t)$ که به فرم $G(f) = \text{Sinc} f$ می باشد، می توان تبدیل فوریه ی شکل زیر را به راحتی محاسبه کرد.



$$y(t) = \Pi(t - \frac{3}{2}) + \Pi(t + \frac{3}{2}) = g(t - \frac{3}{2}) + g(t + \frac{3}{2}) \leftrightarrow$$

$$Y(f) = G(f)e^{-j2\pi f \frac{3}{2}} + G(f)e^{j2\pi f \frac{3}{2}}$$

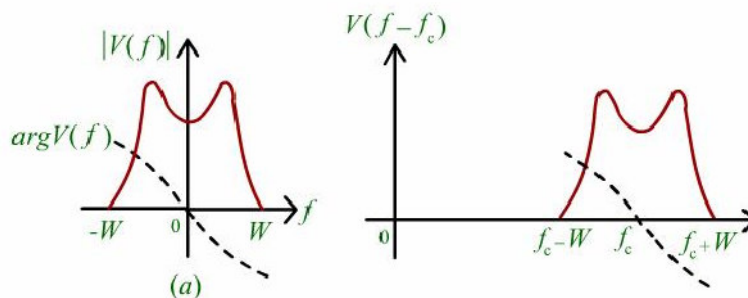
$$Y(f) = G(f)[e^{-j3\pi f} + e^{j3\pi f}] = 2 \sin cf \cos 3\pi f$$

۷- خاصیت شیف
فرکانسی یا خاصیت
مدوله سازی

بر اساس این خاصیت اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشد آنگاه :

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow G(f - f_0)$$

خاصیت فوق به صورت ترسیمی در شکل زیر آمده است.



خاصیت فوق را جابجایی فرکانسی یا مدوله سازی مختلط می نامند، چون ضرب یک تابع زمانی در $e^{j\omega_c t}$ باعث انتقال طیف فرکانسی آن تابع به اندازه f_c می گردد.

اگر مطابق شکل $v(t)$ طیف باند محدودی مانند $V(f)$ داشته باشد در مورد طیف $V(f - f_c)$ در صورتی که $f_c > W$ باشد (جایی که W پهنای باند سیگنال باند پایه است) می توان به نکات زیر اشاره کرد. ۱- مولفه های فرکانسی عمده حول f_c متمرکز هستند.

۲- اگر به پهنای باند $V(f)$ ، W است اما انتقال آن به فرکانس f_0 باعث دو برابر شدن پهنای باند گردیده است. به عبارت دیگر قسمت منفی $V(f)$ اکنون در فرکانس های مثبت قرار دارد.

۳- $V(f - f_c)$ دارای تقارن هرمیشن نیست ولی نسبت به مبدأ متقارن است. با توجه به اینکه $v(t)e^{j\omega_c t}$ یک تابع زمانی واقعی نبوده و به عنوان سیگنال مخابراتی نمی تواند وجود داشته باشد، اغلب سیگنالهایی به صورت $v(t)\cos(\omega_c t + \varphi)$ برای مدوله سازی مورد استفاده قرار می گیرند.

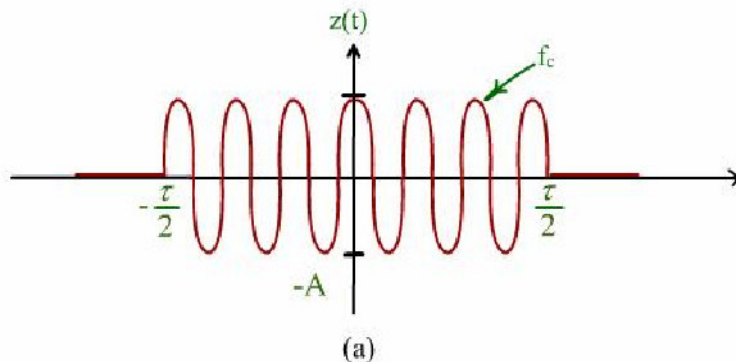
بر اساس خاصیت فوق قضیه‌ی مدوله سازی به صورت زیر مطرح می‌شود.

$$v(t)\cos(\omega_c t + \varphi) = \frac{v(t)}{2} \left(e^{j\omega_c t} e^{j\varphi} + e^{-j\omega_c t} e^{-j\varphi} \right) \leftrightarrow \frac{e^{j\varphi}}{2} V(f - f_c) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} V(f + f_c)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق مشخص می‌شود که ضرب کردن یک تابع سینوسی در یک تابع زمانی، باعث انتقال طیف آن به حول فرکانس‌های f_c و $-f_c$ می‌گردد. طیف ایجاد شده تقارن هرمتیک دارد چون $v(t)\cos(\omega_c t + \varphi)$ تابعی حقیقی از زمان است.

به عنوان مثالی دیگر طیف یک پالس RF را بدست می آوریم.

اگر f_c فرکانس کار در باند فرکانسی امواج رادیویی باشد، موج سینوسی با پهنای زمانی محدود را که در شکل زیر نشان داده شده است، پالس RF می گویند.



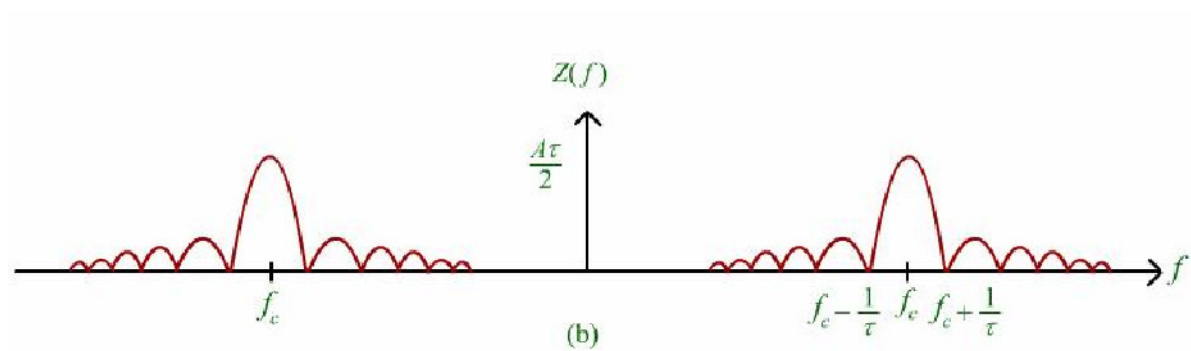
رابطه‌ی این پالس عبارت است از

$$Z(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega_c t$$

که تبدیل فوری آن به فرم زیر می‌باشد.

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2} \sin c(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2} \sin c(f + f_c)\tau$$

طیف دامنه این سیگنال در شکل زیر آورده شده است.



فصل دوم

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

خواص تبدیل فوریه
قسمت هفتم

۸- مشتق
گیری زمانی

اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشد آنگاه:

$$\frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f G(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n G(f)$$

عبارات فوق بیان می دارند که مشتق مرتبه n ام از تابع زمانی $g(t)$ باعث ضرب عبارت $(j2\pi f)^n$ در تبدیل فوریه تابع $g(t)$ یعنی $G(f)$ می شود.

فصل دوم:

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

خواص تبدیل فوریه
- قسمت هشتم

۹- مشتق گیری
فرکانسی

اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشند، آنگاه:

$$-j2\pi t g(t) \leftrightarrow \frac{dG(f)}{df}$$

$$(-j2\pi t)^n g(t) \leftrightarrow \frac{d^n G(f)}{df^n}$$

با توجه به رابطه فوق ضرب عبارت $(-j2\pi t)^n$ در تابع حوزه‌ی زمانی $g(t)$ باعث می‌شود که طیف فرکانسی آن مشتق مرتبه n ام طیف فرکانسی $g(t)$ یعنی $G(f)$ باشد.

فصل دوم:

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

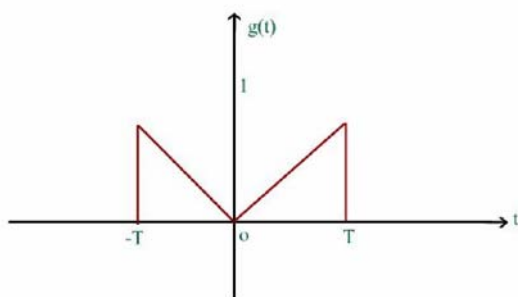
خواص تبدیل فوریه

قسمت نهم

مشتق گیری فرکانسی

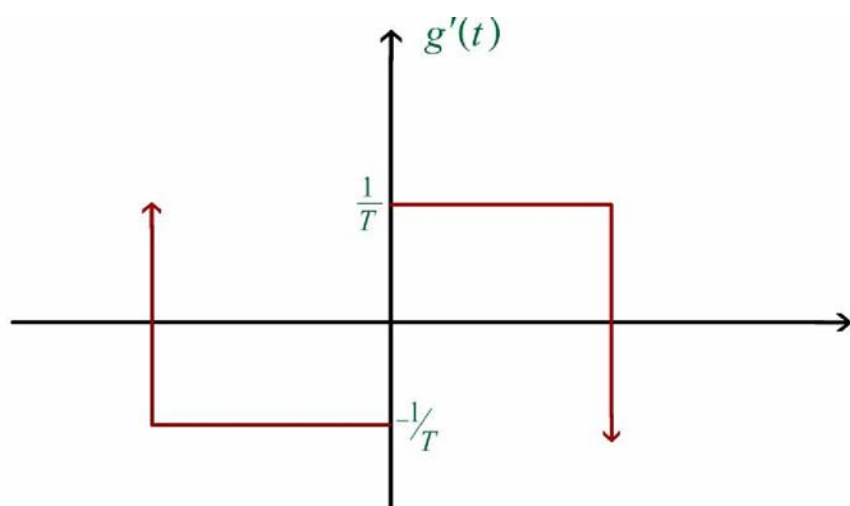
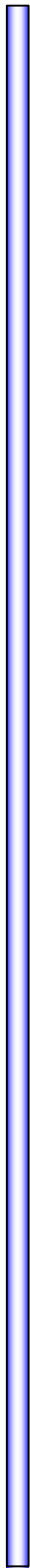
- قسمت دوم

برای مثال: اگر بخواهیم با استفاده از خواص تبدیل فوریه، طیف سیگنال زمانی $g(t)$ مطابق شکل را بدست آوریم باید روند زیر را بکارگیریم.



مشتق گرفتن از تابع $g(t)$ آن را به صورت دو پالس مربعی شیفت یافته و دو ضربه در می آورد. حال با دانستن طیف تابع ضربه و همچنین پالس های مربعی شیفت زمانی یافته می توانیم طیف کلی سیگنال $g'(t)$ را بدست آوریم، با تقسیم این طیف بر عبارت $j2\pi f$ ، طیف $g(t)$ یعنی $G(f)$ بدست می آید.

در شکل $g'(t)$ نشان داده شده است. روند ریاضی مطرح شده در فوق را به عنوان تمرین بر عهده شما می گذاریم.



۱۰- انتگرال

گیری زمانی:

اگر $G(f) \leftrightarrow g(t)$ باشند، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{2} G(0) \delta(f) + \frac{G(f)}{j2\pi f}$$

بنا بر این انتگرال گیری از یک تابع زمانی باعث تقسیم تبدیل فوریه آن بر $j2\pi f$

و ایجاد یک ضربه با وزن $\frac{G(0)}{2}$ در فرکانس f می شود.



این خاصیت بیان می دارد که اگر

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$

آنگاه

$$G(t) \leftrightarrow g(-f)$$

به عنوان مثال با توجه به اینکه $\Pi(t) \leftrightarrow \sin cf$ تبدیل فوریه $\sin ct$ برابر با

$\Pi(-f)$ که با $\Pi(f)$ یکی است می شود.

همچنین

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \sin c^2(f\tau)$$

بنابراین داریم

$$\sin c^2(\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{\tau} \Lambda\left(\frac{f}{\tau}\right)$$

12- سطح زیر
 $G(f)$

اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشند، با توجه به تعریف تبدیل معکوس فوریه مقدار سیگنال $g(t)$ در لحظه $t = 0$ با سطح زیر نمودار تبدیل فوریه آن $G(f)$ برابر است

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df$$

با توجه به تعریف تبدیل فوریه نیز داریم:

$$G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$$

با توجه به رابطه فوق اگر $g(t) = e^{-t}u(t)$ باشد با توجه به تبدیل فوریه آن

$$G(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \quad \text{و با توجه به اینکه مقدار تابع پله واحد در } t = 0 \text{ برابر } \frac{1}{2}$$

است رابطه‌ی زیر را می توان نوشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1 + j2\pi f} = \frac{1}{2}$$

13- خاصیت توابع

مزدوج

اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$ باشند، آنگاه:

$$g^*(t) \leftrightarrow G^*(-f)$$

14- خاصیت
کانولوشن در حوزه
زمان:

اگر $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $v(t) \leftrightarrow V(f)$ باشد، آنگاه:

$$v(t) * g(t) \leftrightarrow V(f) \cdot G(f)$$

کانولوشن بر طبقه رابطه زیر تعریف می شود.

$$v(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda$$

همچنین داریم:

$$g(t) \cdot v(t) \leftrightarrow G(f) * V(f)$$

$$\frac{d}{dt} [g(t) * v(t)] = \frac{d}{dt} g(t) * v(t) = \frac{d}{dt} v(t) * g(t)$$

بنابراین کانوالو کردن دو سیگنال در حوزه زمان معادل ضرب کردن طیف فرکانسی آنها می باشد.
همچنین ضرب کردن دو سیگنال در حوزه زمان معادل کانوالو کردن طیف های فرکانسی آنها است.

برای آشنایی با نحوه استفاده از انتگرال کانولوشن فرض کنید می خواهیم توابع زیر را باهم کانوالو کنیم.

$$\begin{cases} v(t) = Ae^{-t} & 0 < t < \infty \\ w(t) = t/T & 0 < t < T \end{cases}$$

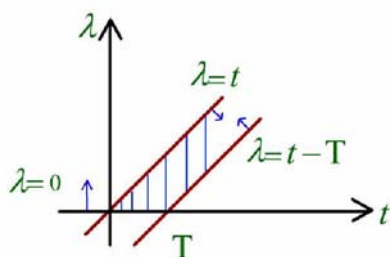
بر طبق تعریف انتگرال کانولوشن داریم:

$$v(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda) w(t - \lambda) d\lambda$$

حال باید مرز انتگرال گیری را مشخص کنیم. به همین دلیل توابع $v(\lambda)$, $w(t - \lambda)$ را مجدداً بازنویسی می کنیم.

$$\begin{cases} v(\lambda) = Ae^{-\lambda} & 0 < \lambda < \infty \\ w(t - \lambda) = \frac{t - \lambda}{T} & 0 < t - \lambda < T \end{cases}$$

حال منحنی هایی را که برای λ بر حسب t بدست می آید در یک گراف $\lambda - t$ رسم می نماییم. مرز مشترک آنها با هاشور مشخص شده است. در ضمن از معادلات فوق چهار ناحیه برای λ قابل تشخیص است.



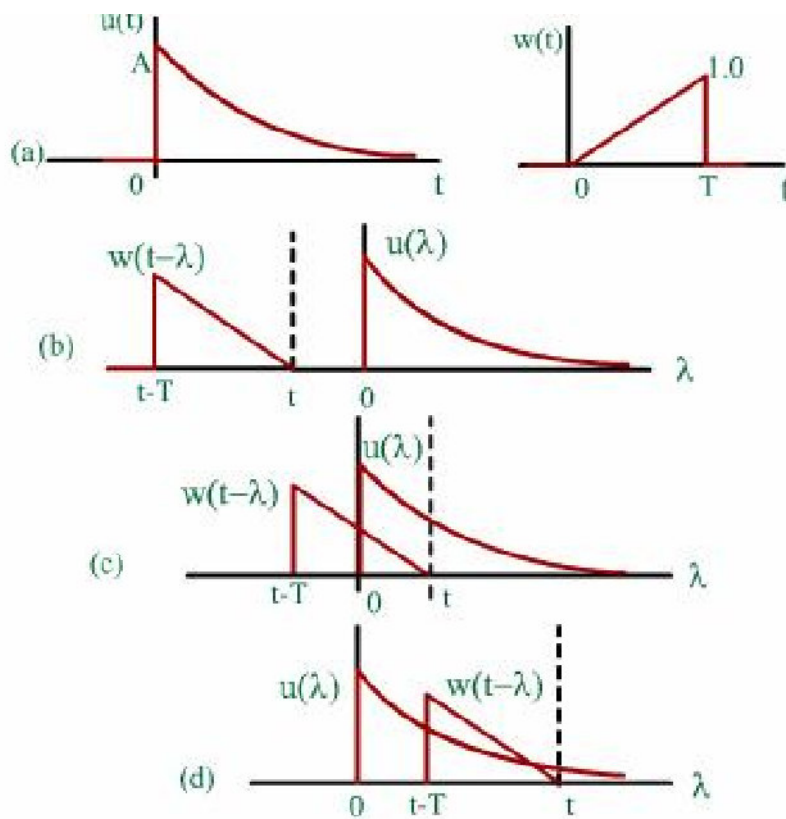
$$1) \lambda > 0 \quad 2) \lambda < \infty \quad 3) \lambda < t \quad 4) \lambda < t - T$$

ناحیه قابل قبول برای λ در شکل زیر با هاشور مشخص شده است.
بنابراین انتگرال کانولوشن را می توان برای دو ناحیه $0 < t < T$ و $t > T$ بصورت زیر نوشت.

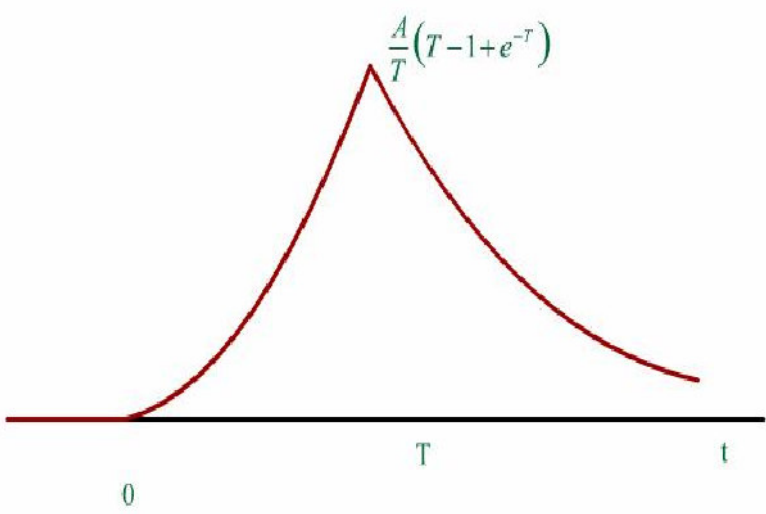
$$v(t) * w(t) = \int_0^t A e^{-\lambda} \left(\frac{t-\lambda}{T} \right) d\lambda = \frac{A}{T} (t - 1 + e^{-t}) \quad 0 < t < T$$

$$v(t) * w(t) = \int_{t-T}^t A e^{-\lambda} \left(\frac{t-\lambda}{T} \right) d\lambda = \frac{A}{T} (T - 1 + e^{-T}) e^{-(t-T)} \quad t < T$$

بررسی گرافیکی کانولوشن را برای دو تابع فوق در شکل آمده است.



نتیجه نهایی کانولوشن فوق در شکل زیر آورده شده است.



انتگرال کانولوشن، دارای خاصیت‌های جابجایی انجمنی و توزیعی می‌باشد که به ترتیب بر طبق روابط زیر بیان می‌شوند.

$$1) v(t) * w(t) = w(t) * v(t)$$

خاصیت جابجایی

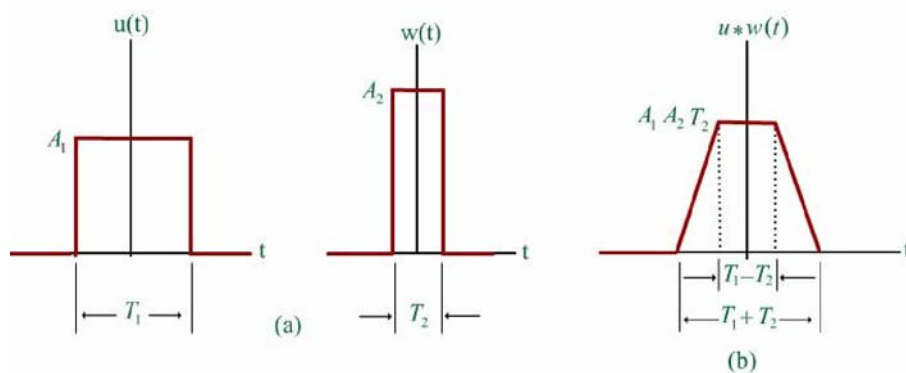
$$2) v(t) * (w(t) * z(t)) = (v(t) * w(t)) * z(t)$$

خاصیت انجمنی

$$3) v(t) * (w(t) + z(t)) = v(t) * w(t) + v(t) * z(t)$$

خاصیت توزیعی

اگر از روش توضیح داده شده در مثال قبل برای کانوالو کردن دو پالس مستطیلی استفاده شود. یک پالس دوزنقه‌ای بدست می‌آید که شکل آن مشاهده می‌شود.



ملاحظه می‌شود که عرض پالس حاصل مجموع عرض پالس‌های اولیه است. فرض کنید سیگنال متناوبی که می‌خواهیم ضرایب سری فوریه آنرا بدست آوریم $g_p(t)$ باشد.

$$g_p(t) = g_p(t \pm mT_0) = \text{Re } p_{T_0}[g(t)]$$

$g(t)$ یک پریود از سیگنال متناوب $g_p(t)$ است یعنی می توان نوشت:

$$\begin{cases} g_p(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر تبدیل فوریه ی سیگنال $g(t)$ را $G(f)$ بنامیم داریم:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_p(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

ضرایب سری فوریه $g_p(t)$ را $c(nf_0)$ نامگذاری می کنیم که از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g_p(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} G(nf_0)$$

بنابراین $g_p(t)$ را بر حسب ضرایب سری فوریه آن می توان به شکل زیر نوشت:

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi nf_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} G(nf_0) e^{j2\pi nf_0 t}$$

$$g(t) \leftrightarrow G(f)$$

بدست آوردن ضرایب
سری فوریه با استفاده از
تبدیل فوریه - قسمت ۲

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} G(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

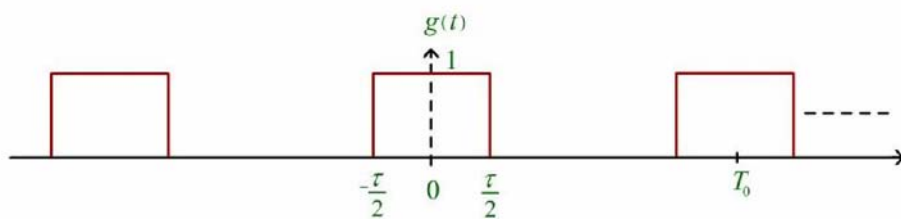
اگر تبدیل فوریه $g_p(t)$ را $G_p(f)$ بنامیم و از دو طرف رابطه ی بالا تبدیل فوریه بگیریم، چون تبدیل فوریه $e^{j2\pi n f t}$ تابع شیفت یافته ی δ است، خواهیم داشت:

$$G_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} G(nf_0) \delta(f - nf_0) = \frac{1}{T_0} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}}(G(f))$$

که $\frac{1}{T_0} G(nf_0)$ ضرایب سری فوریه می باشند. بنابراین:

$$\text{Re } p_{T_0}[g(t)] \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}}[G(f)]$$

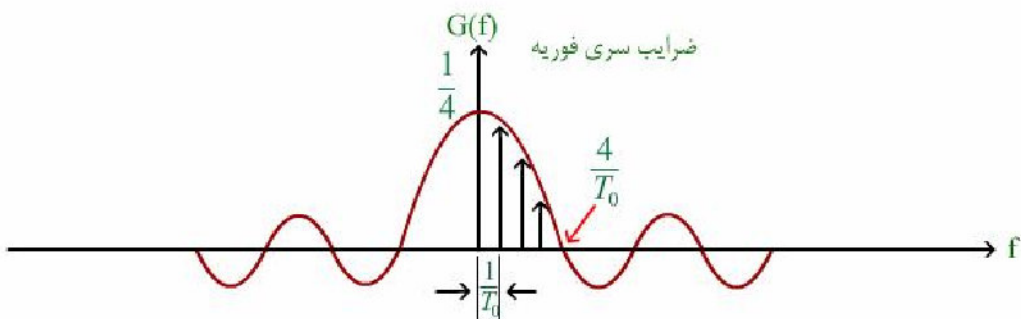
بنابراین اگر تابع $g(t)$ را با پریود T_0 تکرار کنیم تبدیل فوریه آن شامل سیگنال نمونه برداری شده ی $G(f)$ با پریود $\frac{1}{T_0}$ خواهد بود به عنوان مثالی از این روش، تبدیل فوریه پالس متناوب زیر را بدست می آوریم.



$$g(t) = \text{Re } p_{T_0} \left[\Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) \right]$$

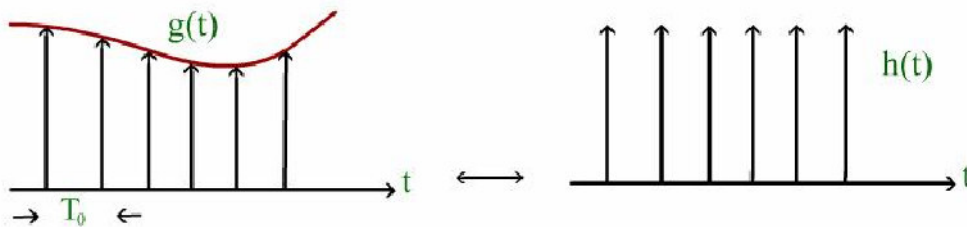
$$G(f) = \frac{1}{T_0} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}} [\tau \text{sinc}(f\tau)] \quad \xrightarrow{T_0 = 4\tau} \frac{1}{T_0} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}} \left[\frac{T_0}{4} \text{sinc} \left(f \frac{T_0}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}} \left[\text{sinc} \left(\frac{f}{4} T_0 \right) \right]$$



تبدیل فوریه سیگنال
نمونه برداری شده

فرض کنید سیگنال $g(t)$ نمونه برداری شده به شکل نشان داده شده باشد. در واقع این سیگنال نمونه برداری شده از ضرب تابع $g(t)$ در $h(t)$ حاصل شده است. دو شکل $g(t)$ و $h(t)$ را مشاهده می کنید. پس می توانیم بنویسیم:



$$\text{comb}_{T_0}[g(t)] = g(t) \cdot \text{Re } p_{T_0}[\delta(t)]$$

$$F[\text{comb}_{T_0}[g(t)]] = G(f) * \frac{1}{T_0} \text{comb}_{\frac{1}{T_0}}[1] = G(f) * \frac{1}{T_0} \text{Re } p_{\frac{1}{T_0}}[\delta(f)] = \frac{1}{T_0} \text{Re } p_{\frac{1}{T_0}}[G(f)]$$

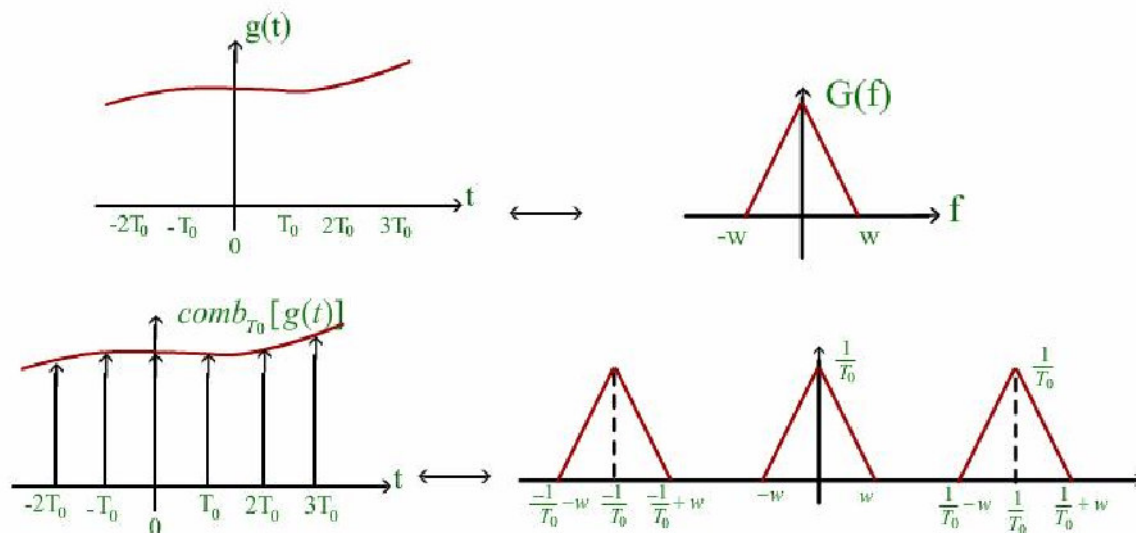
بنابراین اگر خلاصه کنیم می توان گفت:

$$\text{comb}_{T_0}[g(t)] \leftrightarrow \frac{1}{T_0} \text{Re } p_{\frac{1}{T_0}}[G(f)]$$

برای تفهیم بیشتر رابطه فوق به مثال زیر توجه نمائید.

اگر $g(t)$ چنان که در شکل ملاحظه می شود دارای طیف $G(f)$ باشد (با پهنای باند W) طیف سیگنال

نمونه برداری شده آن توسط قطار ضربه با پریود T_0 ، تکرار $G(f)$ با پریود f_0 می باشد که در شکل آورده شده است.



شرط درست بودن نمونه برداری از سیگنال $g(t)$ این است که طیف آن دچار تداخل نشود یعنی :

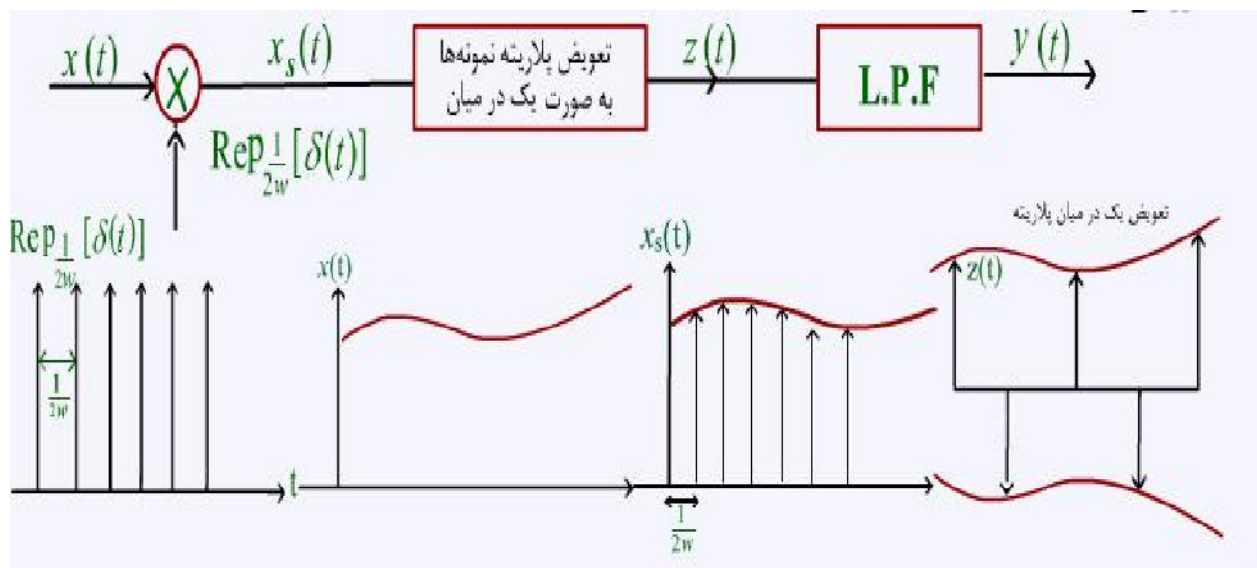
$$\frac{1}{T_0} - W \geq W \Rightarrow \frac{1}{T_0} \geq 2W \Rightarrow f_0 \geq 2W$$

بنابراین فرکانس نمونه برداری باید دو برابر عرض باند سیگنالی باشد که می خواهیم آن را نمونه برداری کنیم .

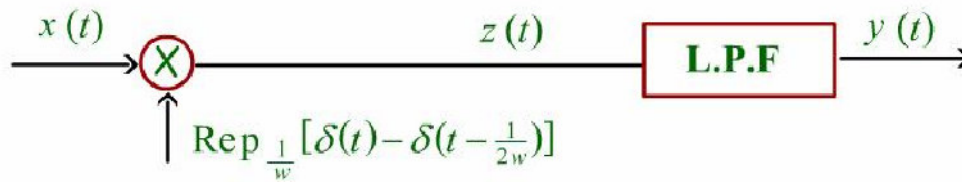
تا در طیف ایجاد شده تداخلی پیش نیاید و بعداً با عمل فیلتر کردن بتوان سیگنال اصلی را بازسازی کرد.

مثال

فرض کنید بلوک دیاگرام زیر بعد از ضرب سیگنال $\text{Rep}_{\frac{1}{2w}}[\delta(t)]$ در $x(t)$ و تعویض پلاریته حاصل به صورت یک در میان نتیجه حاصل را از یک فیلتر پایین گذر ایده آل با پهنای باند w عبور می دهد. طیف خروجی مدار را به دست آورده و کاربرد آن را توضیح دهید. این مدار آشکار ساز چه سیگنالی می تواند باشد. طیف $X(f)$ در زیر رسم شده است.



بلوک دیاگرام فوق را می توان به فرم زیر درآورد:



$$z(t) = x(t) \cdot \text{Rep}_{\frac{1}{w}} \left[\delta(t) - \delta\left(t - \frac{1}{2w}\right) \right]$$

$$Z(f) = X(f) * w \text{comb}_w \left[1 - e^{-j2\pi f \left(\frac{1}{2w}\right)} \right]$$

فصل دوم

سیگنال ها و طیف فرکانسی آنها

خواص تبدیل فوری

قسمت ۱۸

با توجه به این که

$$z(t) = x(t) \cdot \text{Re } p_{\frac{1}{w}} \left[\delta(t) - \delta\left(t - \frac{1}{2w}\right) \right]$$

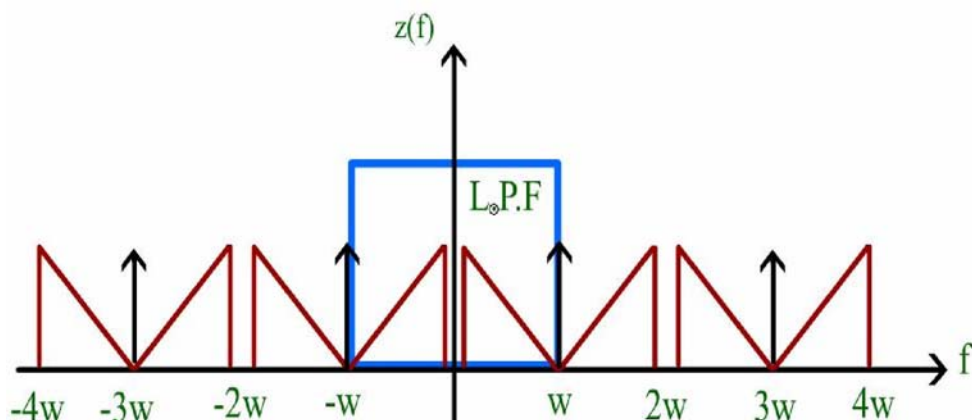
$$\text{comb}_w[X(f)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kw) \delta(f - kw)$$

$$e^{-j2\pi f \left(\frac{1}{2w}\right)} = \cos \frac{\pi f}{w} - j \sin \frac{\pi f}{w}$$

$Z(f)$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$Z(f) = WX(F) * \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (1 - \cos k\pi) \delta(f - kw)$$

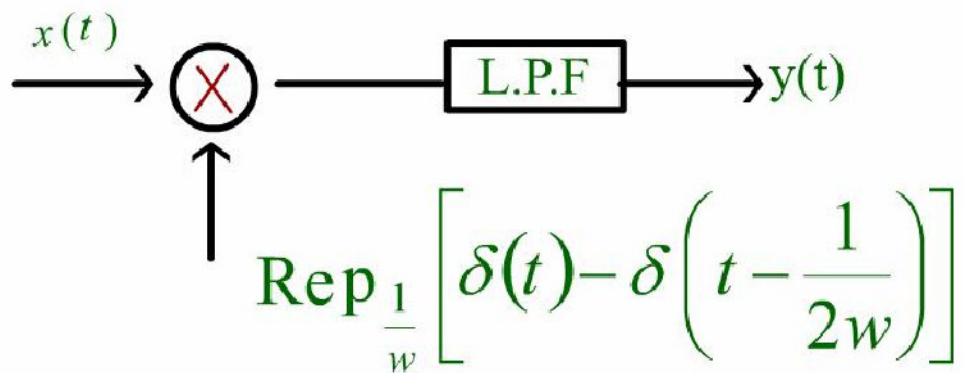
بدین ترتیب طیف $Z(f)$ با توجه به فرمول بدست آمده فوق به صورت نشان داده شده در شکل در می آید:



و طیف $y(f)$ یعنی $Z(f)$ بعد از عبور از یک فیلتر پایین گذر ایده آل با پهنای باند W عبارت خواهد شد از یک شکل مثلثی با پهنای باند W چنانکه در شکل مشاهده می شود.



کاربرد این بلوک دیاگرام در کد کردن سیگنال فرستاده شده است و مدار دکد کننده آن نیز به شکل زیر خواهد بود.



فصل دوم:

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

توان و انرژی سیگنال

V(t) - قسمت ۱

توان و انرژی
سیگنال $v(t)$

به ترتیب طبق رابطه‌های زیر توان و انرژی سیگنال تعریف می‌شوند.

متوسط

$$p = \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v^2(t) dt$$

توان متوسط

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g^*(t) dt$$

انرژی یک سیگنال

اگر $g(t)$ $complex$ باشد اگر $g(t)$ حقیقی باشد

اگر انرژی سیگنالی محدود باشد آنرا سیگنال انرژی و اگر توان آن محدود باشد آنرا سیگنال توان گویند.

سیگنالهای انرژی توان صفر و سیگنالهای توان انرژی نا محدود دارند.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t) \cdot g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df \end{aligned}$$

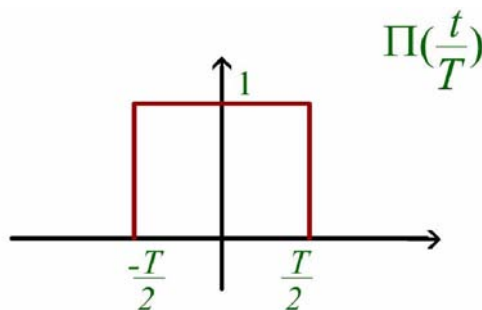
بر طبق تعریف $S_g(f) \triangleq |G(f)|^2$ را چگالی طیفی انرژی گویند. که نحوه ی توزیع انرژی در کل باند فرکانسی را توصیف می کند. از این رابطه مشخص است که فاز سیگنال در انرژی آن نقشی ندارد. اگر انرژی در پهنای باند B را بخواهیم حساب کنیم از رابطه

$$E = \int_{-B}^B s_g(f) df$$

استفاده می کنیم.

مثال: انرژی کل و انرژی در پهنای باند $\frac{1}{T}$ سیگنال $g(t)$ را بدست آورید:

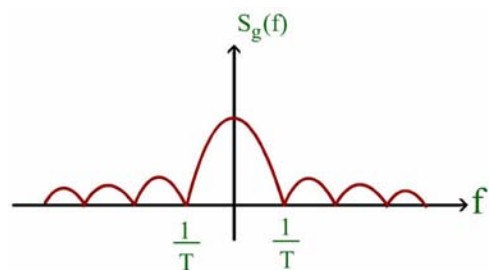
$$g(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 T$$

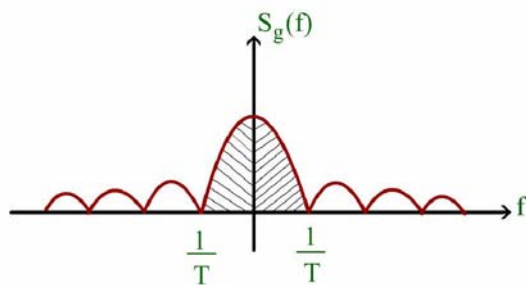
$$B = \frac{1}{T} \quad \text{انرژی در پهنای باند} = \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} |G(f)|^2 df$$

$$G(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad s_g(f) = |G(f)|^2 = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$



$$E_B = \int_{-1/T}^{1/T} A^2 T^2 \sin^2(fT) = 0.92 A^2 T = 0.92 E_{tot}$$

مشاهده می‌شود که ۹۲٪ انرژی در پهنای باند $B = \frac{1}{T}$ قرار دارد و بقیه‌ی انرژی در بقیه‌ی پهنای باند فرکانسی پخش شده است.



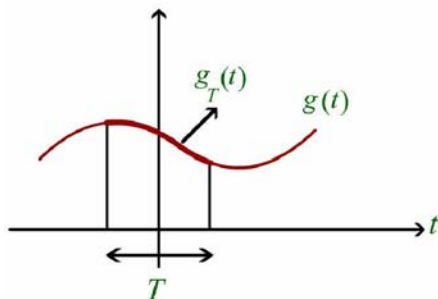
فصل دوم: سیگنال‌ها و طیف فرکانسی آنها

بدست آوردن چگالی طیفی توان

بدست آوردن چگالی
طیفی توان

بدست آوردن چگالی طیفی توان

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T g^2(t) dt$$



$$g_T(t) = g(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$p = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G_T(f)|^2 \right] df$$

طبق تعریف

$$S_g(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |G_T(f)|^2$$

را چگالی طیفی توان می گویند .

فصل دوم: سیگنال ها و طیف فرکانسی آنها

مثال

مثال

مثال: چگالی طیفی انرژی یا توان سیگنال $g(t)$ را محاسبه کنید:

$$g(t) = a_1 e^{j2\pi f_1 t} + a_2 e^{j2\pi f_2 t}$$

جواب:

چون سیگنال متناوب است توان آن محدود بوده و بنابراین سیگنال ما، سیگنال توان است و

باید چگالی طیفی توان آن را محاسبه کنیم.

$$G(f) = a_1 \delta(f - f_1) + a_2 \delta(f - f_2)$$

اگر از $g(t)$ تبدیل فوریه بگیریم داریم همچنین

$$\begin{aligned} g_T(t) &= g(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow \\ G_T(f) &= G(f) * T \sin c(fT) \Rightarrow \\ G_T(f) &= [a_1 \delta(f - f_1) + a_2 \delta(f - f_2)] * T \sin c(fT) \\ G_T(f) &= a_1 T \sin c(f - f_1)T + a_2 T \sin c(f - f_2)T \end{aligned}$$

حال باید $|G_T(f)|^2$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
 |G_T(f)|^2 &= G_T(f) \cdot G_T^*(f) = \\
 &T^2 \sin^2 c(fT) \cdot [a_1 \delta(f - f_1) + a_2 \delta(f - f_2)] * \\
 &[a_1^* \delta(f - f_1) + a_2^* \delta(f - f_2)] \\
 S_g(f) &= |a_1|^2 \delta(f - f_1) + |a_2|^2 \delta(f - f_2)
 \end{aligned}$$

اگر روند ارائه شده را برای یک تابع کسینوسی به شکل

$$g(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

در پیش بگیریم چگالی طیفی توان آن

$$s_g(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$$

حاصل خواهد شد .

حاصلضرب اسکالر دو سیگنال $v(t)$ و $g(t)$ بسته به اینکه سیگنال انرژی یا توان باشند به ترتیب به صورت زیر است.

$$\langle g(t).v(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)v^*(t)dt$$

1- سیگنال انرژی

2- سیگنال های توان

$$\langle g(t).v(t) \rangle \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T g(t)v^*(t)dt$$

بنابراین اگر $g(t)$ سیگنال انرژی باشد خواهیم داشت:

$$E = \langle g(t), g(t) \rangle$$

و اگر $g(t)$ سیگنال توان باشد نیز

$$p = \langle g(t), g(t) \rangle$$

دو سیگنال $g(t)$ و $v(t)$ را متعامد گویند ، اگر :

$$\langle g(t), v(t) \rangle = 0$$

نرم سیگنال $g(t)$ که باین علامت $\|g(t)\|$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|g(t)\|^2 = |< g(t), g(t) >|$$

نامساوی شوارتز نیز $g(t)$ و $v(t)$ را به صورت زیر به هم مربوط می کند:

$$|< g(t), v(t) >| \leq \|g(t)\| \cdot \|v(t)\|$$

نامساوی شوارتز معیاری برای تشابه دو سیگنال $g(t)$ و $v(t)$ می باشد.

فصل دوم: سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

توابع همبستگی و
خودبستگی - قسمت ۱

توابع همبستگی و
خودبستگی

این توابع در واقع وسیله و روشی برای تحلیل سیگنالها و سیستم ها می باشد . به عنوان مثال اگر از توابع خودبستگی تبدیل فوریه گرفته شود. توابع چگالی طیفی حاصل می شوند که در حالت سیگنال انرژی، در مورد سیگنال توان، چگالی طیفی توان خواهد بود .

تابع
خودبستگی:

شباهت یا هم ذات بودن یک سیگنال و شکل تأخیر یافته آن می باشد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_g(\tau) = \langle g(t) \cdot g(t - \tau) \rangle$$

در صورتی که $g(t)$ سیگنال انرژی باشد

$$R_g(\tau) = \langle g(t) \cdot g(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g^*(t - \tau) dt$$

که برای سیگنالهای سیگنال توان برابر توان سیگنال می باشد.

$$R_g(\tau) = \langle g(t) \cdot g(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot g^*(t - \tau) dt$$



۱- تابع خودبستگی معیاری برای هر دو سیگنال انرژی و توان دارای تقارن مزدوج است، یعنی:

$$R_g(t) = R_g^*(-t)$$

پس قسمت حقیقی $R_g(T)$ تابعی زوج و قسمت موهومی آن را تابعی فرد از t می باشد.

۲- مقدار تابع خود بستگی در مبدأ بسته به اینکه سیگنال انرژی یا توان باشد با :

$$R_g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = E$$

اگر سیگنال انرژی باشد:

$$R_g(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2 dt = P$$

اگر سیگنال توان باشد:

3- مقدار حداکثر تابع خودبستگی در مبدأ قرار دارد. درواقع با افزایش τ شباهت بین سیگنال و نوع تأخیریافته آن کاهش یافته و در نتیجه منطقی است که گفته شود با افزایش τ تابع خود بستگی کاهش می یابد.

$$R_g(\tau) \leq R_g(0)$$

4- تبدیل فوریه از تابع خودبستگی در صورتی که سیگنال انرژی باشد چگالی طیفی انرژی و در صورتی که سیگنال توان باشد چگالی طیفی توان را مشخص می کند.

$$R_g(\tau) \leftrightarrow S_g(f)$$

تابع همبستگی:

تابع خودبستگی معیاری برای شباهت بین سیگنال و شکل تأخیر یافته آن بود. می توان تابع دیگری به اسم تابع همبستگی تعریف کرد که معیاری برای شباهت بین یک سیگنال و نوع تأخیر یافته زمانی سیگنال دیگر باشد. بسته به اینکه سیگنال ها، انرژی یا توان باشند، توابع همبستگی به صورت زیر تعریف می شوند:

الف) $g(t), h(t)$ سیگنالهای انرژی باشند:

$$R_{gh}(\tau) = \langle g(t)h(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h^*(t-\tau)dt$$

ب. $g(t), h(t)$ سیگنالهای توان باشند.

$$R_{gh}(\tau) = \langle g(t)h(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)h^*(t-\tau)dt$$

فصل دوم: سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

تابع همبستگی و
خودبستگی_ قسمت ۳

مثال

تابع خودبستگی و چگالی طیفی توان سیگنال $g(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ را بدست آورید. مقدار توان این سیگنال چقدر است؟

جواب:

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) g^*(t - \tau) dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} [A \cos(\omega_0 t + \varphi)] [A \cos(\omega_0 (t - \tau) + \varphi)] dt \\ &= \dots = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

می باشد یعنی $R_g(\tau)$ تبدیل فوریه $g(t)$ با استفاده از خاصیت ۴، چگالی طیفی توان سیگنال

$$\begin{aligned} S_g(f) &= F(R_g(\tau)) = F\left[\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau\right] \\ &= \frac{A^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت ۲، توان سیگنال برابر با مقدار تابع خود بستگی در مبدأ می باشد

یعنی :

$$P = R_g(0) = \frac{A^2}{2}$$



اگر $z(t) = g(t) + h(t)$ باشد، خود بستگی تابع $z(t)$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \langle [g(t) + h(t)] \cdot [g^*(t - \tau) + h^*(t - \tau)] \rangle = \\ &\langle g(t) \cdot g^*(t - \tau) \rangle + \langle h(t) \cdot h^*(t - \tau) \rangle + \\ &\langle g(t) \cdot h^*(t - \tau) \rangle + \langle h(t) \cdot g^*(t - \tau) \rangle = R_g(\tau) + R_h(\tau) + R_{gh}(\tau) + R_{hg}(\tau) \end{aligned}$$

بنابراین خودبستگی تابع $z(t)$ که از مجموع دو تابع $g(t)$ و $h(t)$ بدست آمده است برابر با مجموع همبستگی تابع $g(t)$ و $h(t)$ ، همبستگی تابع $g(t)$ و $h(t)$ خودبستگی تابع gh می باشد.

تبدیل
هیلبرت:

همان گونه که در قسمت های قبل توضیح داده شد، تبدیل فوریه برای تعیین محتوای فرکانسی سیگنال انرژی و نیز در مفهوم حدی سیگنال توان، وسیله بسیار مهمی است. مثلاً با استفاده از تبدیل فوریه می توان فیلترهایی با خاصیت گزینش فرکانس های خاص و مورد نظرها تجزیه و تحلیل نموده و بر اساس آن سیگنال ها را بر اساس محتوای فرکانسی از هم جدا نمود. روش دیگر برای جداسازی سیگنال ها، استفاده از خاصیت گزینش فازی است که در آن اختلاف فازی بین سیگنال ها ایجاد کرده و در نتیجه جداسازی مطلوب انجام می شود. ساده ترین تغییر فاز ۱۸۰ درجه است که در مورد یک سیگنال سینوسی کافیسیت پلاریته را عوض کنیم. با به کار بردن یک ترانسفورماتور ایده آل می توان تمام مؤلفه های یک سیگنال را به اندازه ۱۸۰ درجه تغییر فاز داد. تغییر فاز مهم دیگر $\pm 90^\circ$ درجه است. اگر زوایای فاز تمام مؤلفه های یک سیگنال به اندازه $\pm 90^\circ$ درجه تغییر فاز یابند، تابع زمانی بدست آمده را تبدیل هیلبرت آن سیگنال گویند. اگر سیگنال اصلی $x(t)$ باشد تبدیل هیلبرت آن را با $\hat{x}(t)$ نشان می دهند که رابطه ریاضی آن به قرار زیر است:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$$

تبدیل هیلبرت $x(t)$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$$

تبدیل هیلبرت معکوس $\hat{x}(t)$

با توجه به تعریف تبدیل هیلبرت می توان نتیجه گرفت که $\hat{\hat{x}}(t)$ ، نتیجه کانولوشن $x(t)$ با

$$\frac{1}{\pi t} \text{ می باشد.}$$

با توجه به این که کانولوشن دو تابع در حوزه زمان به حاصلضرب طیف آنها در حوزه فرکانس

منجر می شود و با در نظر گرفتن اینکه تبدیل فوری به $\frac{1}{\pi t}$ عبارت است

از $-j \operatorname{sgn}(f)$ با تعریف $\operatorname{sgn}(f)$ به صورت زیر:

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases}$$

تبدیل فوری $\hat{x}(t)$ که آنرا با $\hat{X}(f)$ نمایش می دهیم به فرم زیر در می آید:

$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

با توجه به رابطه فوق برای بدست آوردن تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t)$ یعنی $\hat{x}(t)$ ، باید سیگنال $x(t)$ مورد نظر را از یک شبکه دو پورتی با تابع انتقال $-j \operatorname{sgn}(f)$ عبور دهیم. این مدار در واقع تمام مؤلفه های فرکانس مثبت سیگنال ورودی را به اندازه 90° درجه و کلیه مؤلفه های فرکانسی منفی سیگنال ورودی را به مقدار $90^\circ +$ درجه تغییر فاز می دهد. دامنه کلیه مؤلفه های ورودی نیز ثابت است.

چنین مدار ایده آلی را تبدیل کننده هیلبرت می نامند.

فصل دوم:

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

تبدیل هیلبرت قسمت ۲

یکی از کاربردهای مهم تبدیل هیلبرت خاصیت گزینش فازی است که بر اساس این خاصیت می توان نوع خاصی از مدولاسیون تک باند جانبی، ایجاد کرد که در بخش مدولاسیون ها به آن پرداخته می شود. برای آشنایی با نحوه استفاده از فرمول طیفی تبدیل هیلبرت، فرض کنید که می خواهیم تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$ را بدست آوریم.

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$
$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f) = \frac{-j}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \operatorname{sgn}(f) =$$
$$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$$

نتیجه فوق تبدیل فوریه تابع $\sin 2\pi f_c t$ می باشد، بنابراین تبدیل هیلبرت تابع $\cos 2\pi f_c t$ عبارت است از :

$$\hat{x}(t) = \sin(2\pi f_c t)$$

به روش مشابه تبدیل هیلبرت تابع سینوسی یعنی $x(t) = \sin 2\pi f_c t$ برابر است با :

$$\hat{x}(t) = -\cos 2\pi f_c t$$

خواص تبدیل
هیلبرت :

۱- سیگنالهای $x(t)$ و تبدیل هیلبرت آن $\hat{x}(t)$ دارای چگالی طیفی یکسان هستند یعنی :

$$S_x(f) = S_{\hat{x}}(f)$$

با توجه به رابطه چگالی طیفی و تابع خودبستگی، می توان نتیجه گرفت که سیگنال $x(t)$ و تبدیل هیلبرت آن $\hat{x}(t)$ ، توابع خودبستگی یکسانی دارند یعنی:

$$R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau)$$

۲- سیگنالهای $x(t)$ و تبدیل هیلبرت آن $\hat{x}(t)$ بر هم عمودند یعنی:

$$R_{x,\hat{x}}(0) = 0$$

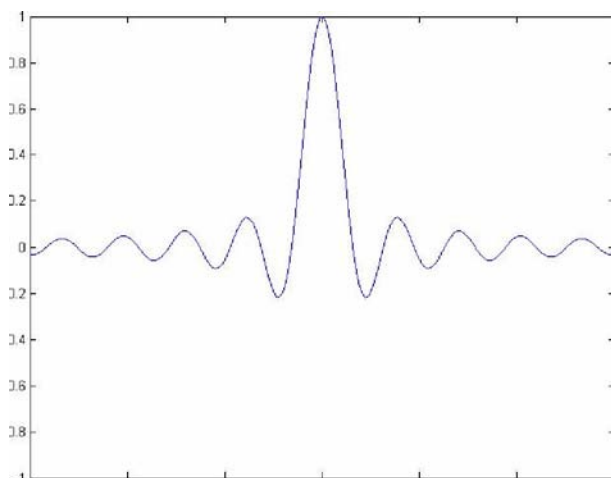
۳- اگر $x_L(t)$ یک سیگنال پایین گذر و $x_H(t)$ یک سیگنال بالا گذر باشد و حاصلضرب این دو سیگنال را $y(t)$ بنامیم، تبدیل هیلبرت $y(t)$ برابر با حاصلضرب سیگنال پایین گذر در تبدیل هیلبرت سیگنال بالا گذر می باشد.

$$y(t) = x_L(t) \cdot x_H(t) \rightarrow \hat{y}(t) = x_L(t) \cdot \hat{x}_H(t)$$

۴- اگر از $x(t)$ دوبار تبدیل هیلبرت گرفته شود $-x(t)$ حاصل می شود این مطلب درست است

چون هر تبدیل هیلبرت $\frac{\pi}{2}$ اختلاف فاز ایجاد می کرد .

مثال: تبدیل هیلبرت تابع $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ را بدست آورید.



اگر بخواهیم از روش حوزه زمانی و تعریف هیلبرت استفاده کنیم به انتگرال های غیر قابل حل برخورد

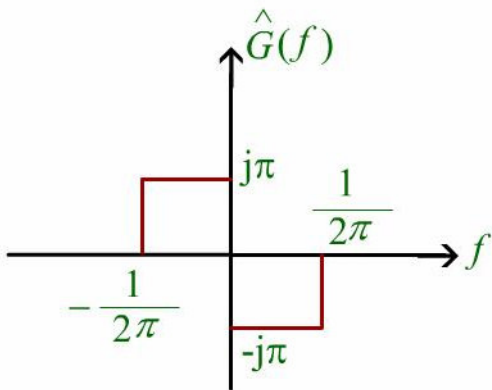
خواهیم کرد. برای حل این مشکل به سراغ حوزه طیف می رویم.

$$g(t) = \sin c\left(\frac{t}{\pi}\right) \leftrightarrow G(f) = \pi \text{rect}(\pi f)$$

$$\hat{G}(f) = -j \text{sgn}(f) \pi \text{rect}(\pi f)$$

اگر شکل $\hat{G}(f)$ را رسم کنیم ملاحظه می شود که می توان این تابع را به شکل جمع دو تابع rect

شیفت یافته نوشت.



$$\hat{G}(f) = j\pi \left\{ \Pi\left(\frac{f + \frac{1}{4\pi}}{\frac{1}{2\pi}}\right) - \Pi\left(\frac{f - \frac{1}{4\pi}}{\frac{1}{2\pi}}\right) \right\}$$

اگر بر طبق خواص تبدیل فوری که در قسمت های قبل به آن اشاره شد از تابع فوق تبدیل فوری معکوس

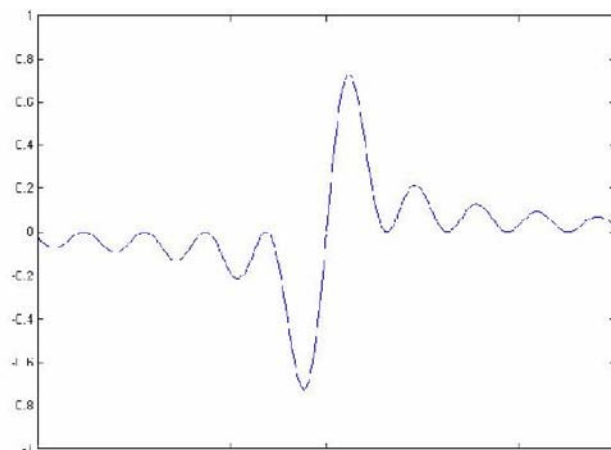
بگیریم تبدیل هیلبرت سیگنال $g(t)$ یعنی $\hat{g}(t)$ بدست خواهد آمد

$$\hat{g}(t) = j\pi \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \left\{ e^{-j2\pi \frac{1}{4\pi}} - e^{j2\pi \frac{1}{4\pi}} \right\}$$

از ساده ترین عبارت فوق به رابطه زیر برای $\hat{g}(t)$ می رسیم:

$$\hat{g}(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

شکل تبدیل هیلبرت تابع $g(t)$ را ملاحظه می کنید



فصل دوم: سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

سیگنالهای تحلیلی و مفروضه‌های
هم فاز و تربیعی یک سیگنال _ قسمت ۱

سیگنالهای تحلیلی و مفروضه‌های
هم فاز و تربیعی
یک سیگنال

اگر $v(t)$ یک سیگنال حقیقی باشد، تابع مختلط $v_+(t)$ را سیگنال تحلیلی (Analytic) یا پیش پوش (pre - envelop) سیگنال $v(t)$ نامیده و آن را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$v_+(t) \triangleq v(t) + j\hat{v}(t)$$

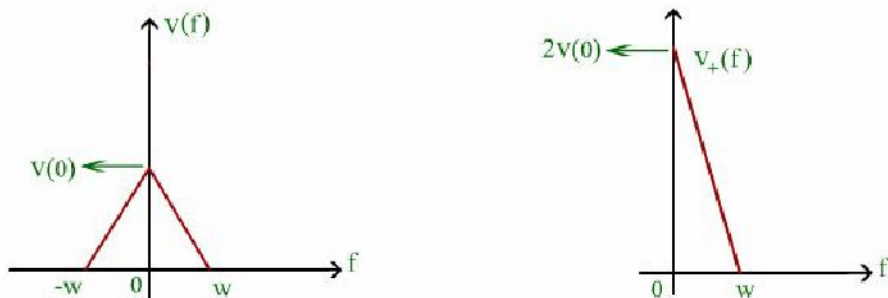
که $\hat{v}(t)$ تبدیل هیلبرت $v(t)$ است. بنابراین سیگنال $v(t)$ قسمت حقیقی پیش پوش $v_+(t)$ بوده و تبدیل هیلبرت سیگنال قسمت موهومی آن می‌باشد. یکی از ویژگیهای مهم سیگنال تحلیلی $v_+(t)$ تبدیل فوریه آن است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_+(f) = V(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)]V(f)$$

۱- با اعمال تعریف تابع $\operatorname{sgn}(f)$ خواهیم داشت:

$$V_+(f) = \begin{cases} 2V(f) & f > 0 \\ V(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

رابطه اخیر نشان می دهد که سیگنال تحلیلی در قسمت منفی محور فرکانسی هیچ گونه مؤلفه فرکانسی ندارد. اگر $V(f)$ به شکل نشان داده شده باشد شکل سیگنال تحلیلی نیز از رابطه فوق مشخص می شود.



برای هر سیگنال مشخص مانند $v(t)$ پیش پوش آن یا $v_+(t)$ را می توان به دو طریق بدست آورد:

۱- استفاده از رابطه زمانی بین $v_+(t), \hat{v}(t), v(t)$

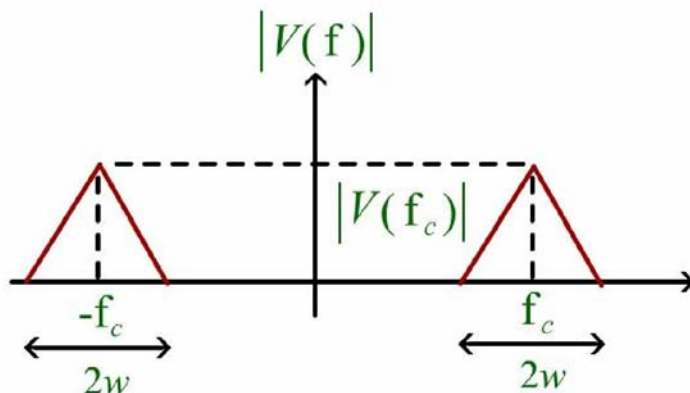
$$v_+(t) = v(t) + j\hat{v}(t)$$

۲- استفاده از تبدیل فوریه سیگنال $v(t)$ یعنی $V(f)$ و محاسبه $V_+(f)$ از روی آن و محاسبه عکس تبدیل فوریه $V_+(f)$

$$v_+(t) = 2 \int_0^{\infty} V_+(f) \exp(j2\pi ft) df$$

مباحث فوق را می توان در مورد یک سیگنال میانگذر ادامه داد.

سیگنال $v(t)$ را هنگامی میانگذر می نامند که مطابق شکل تبدیل فوریه آن یعنی $V(f)$ در باندی به پهنای کلی $2w$ و حول فرکانس $\pm f_c$ قرار داشته باشد. فرکانس f_c را فرکانس حامل (carrier) گویند و در صورتی که پهنای باند $2w$ از فرکانس f_c خیلی کوچکتر باشد سیگنال $v(t)$ را سیگنال باند باریک می نامند.



فرض کنید پیش پوش سیگنال باند باریکی مانند $v(t)$ که طیف فرکانسی آن، $V(f)$ حول فرکانس $\pm f_c$ قرار دارد بدین صورت باشد.

$$v_+(t) = \tilde{v}(t)e^{j2\pi f_c t}$$

در این رابطه $\tilde{v}(t)$ را پوش مختلط سیگنال می نامند. اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل فوریه بگیریم با دانستن تبدیل فوریه پیش پوش $v_+(t)$ که با $V_+(f)$ نشان داده می شود و رابطه آن که قبلاً بدست آمده ،

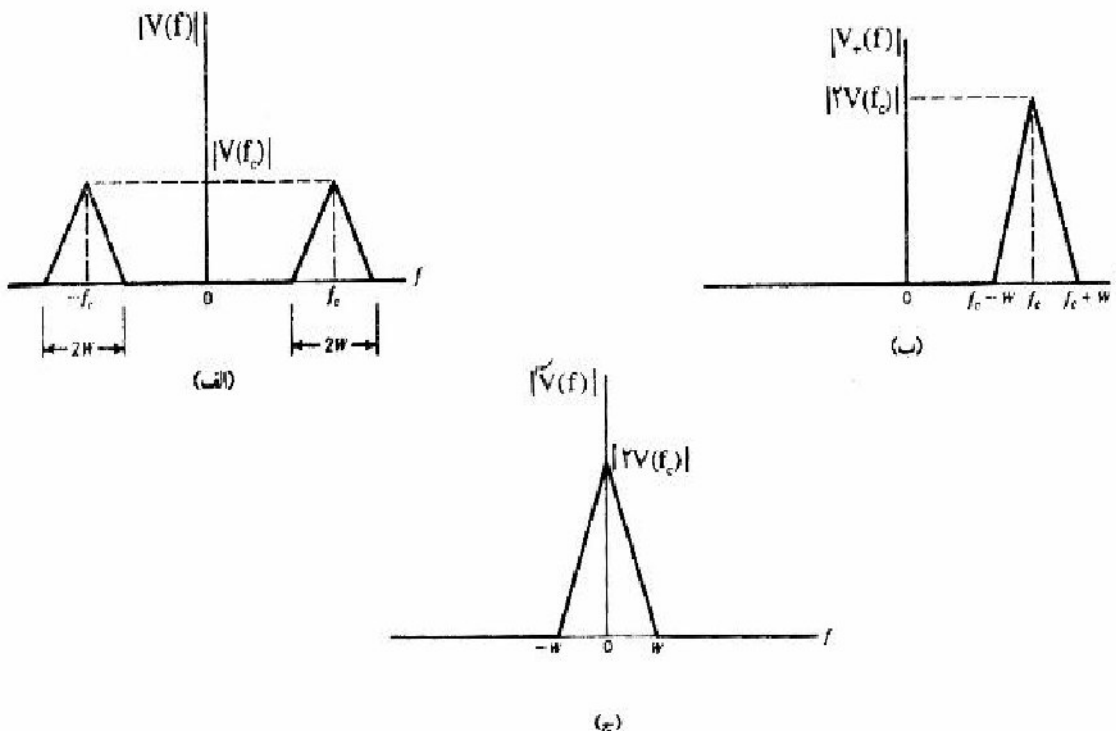
$$V_+(f) = V(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)]V(f)$$

می‌توانیم طیف پوش مختلط $\tilde{v}(t)$ را که با $\tilde{V}(f)$ نشان داده می‌شود بدست آوریم:

$$F\left\{v_+(t) = \tilde{v}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\} \rightarrow V_+(f) = \tilde{V}(f - f_c)$$

با توجه به شکل سیگنال $V_+(f)$ و رابطه فوق که نشان می‌دهد از شیفت پیدا کردن $\tilde{V}(f)$ به اندازه f_c در جهت f های مثبت $V_+(f)$ بدست می‌آید نتیجه می‌گیریم که طیف پوش

مختلط $\tilde{v}(t)$ به باند $-W \leq f \leq W$ محدود بوده و حول مبدأ قرار دارد.



به عبارت دیگر پوش مختلط سیگنال یعنی $\tilde{v}(t)$ یک سیگنال پائین گذر است.

با توجه به رابطه $v_+(t) = v(t) + j\hat{v}(t) = \hat{v}(t)e^{j2\pi f_c t}$ می‌توان سیگنال $v(t)$ را به صورت زیر بر حسب پوش مختلط $\tilde{v}(t)$ بیان کرد:

$$\tilde{v}(t) = \text{Re} \left\{ \hat{v}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

بطور کلی $\tilde{v}(t)$ یک مقدار مختلط است و می‌توان آن را به صورت مجموع مؤلفه‌های حقیقی و موهومی نوشت

$$\tilde{v}(t) = v_c(t) + jv_s(t)$$

با توجه به پایین گذر بودن سیگنال $\tilde{v}(t)$ که قبلاً نشان داده شدو مختلط بودن این سیگنال $v_c(t)$ و

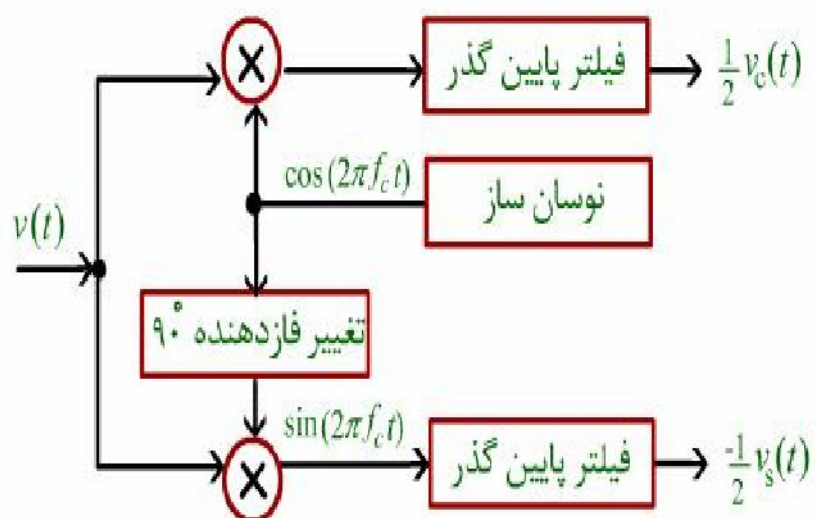
$v_s(t)$ هردو توابع پایین گذر با مقدار حقیقی می‌باشند.

اگر رابطه $\tilde{v}(t) = v_c(t) + jv_s(t)$ را در $\{ \tilde{v}(t) e^{j2\pi f_c t} \}$ جایگزین $v(t) = \text{Re} \{ \tilde{v}(t) e^{j2\pi f_c t} \}$ کنیم به عبارت زیر برای $v(t)$ خواهیم رسید:

$$v(t) = v_c(t) \cos 2\pi f_c t - v_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

به $v_c(t)$ مؤلفه هم فاز (In-phase) سیگنال میانگذر $v(t)$ و به $v_s(t)$ مؤلفه تربیعی (quadrature) سیگنال میانگذر $v(t)$ گفته می‌شود. عناوین هم فاز و تربیعی نسبت به محور حامل $\cos 2\pi f_c t$ بکار برده می‌شوند.

هر دو سیگنال $v_c(t)$ و $v_s(t)$ به باند فرکانس $-W \leq f \leq W$ محدود هستند. بنابراین می توان آنها را از سیگنال میانگذر با استفاده از بلوک دیاگرام نشان داده شده بدست آورد.



در این طرح هر دو فیلتر پایین گذر یکسان بوده و پهنای باند W دارند.

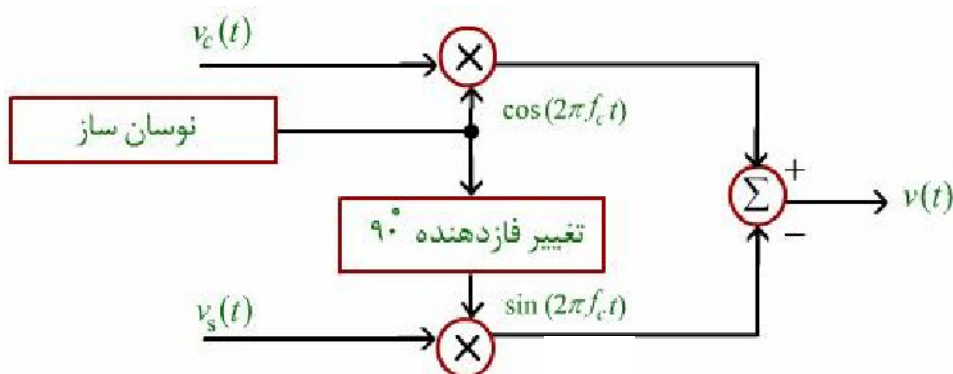
فصل دوم: سیگنال ها و طیف فرکانسی آنها

سیگنالهای تحلیلی و مفهوم

مؤلفه های هم فاز و تربیعی

یک سیگنال - قسمت ۴

جهت بازسازی $v(t)$ با استفاده از مؤلفه های هم فاز و تربیعی می توان از طرح نشان داده شده استفاده کرد.



از این طرح ها بعداً در مبحث مدولاسیون های خطی استفاده خواهیم کرد.

مثال: پیش پوش و پوش مختلط یک پالس RF را بدست آورید:

تعریف پالس RF به صورت زیر می باشد

$$v(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f_c t)$$

با فرض $f_c \tau \gg 1$ ، بنابراین پالس مذکور را می توان سیگنال باند باریک محسوب نمود. تبدیل

فوریه پالس RF را می توان به شکل زیر نوشت:

$$V(f) = \begin{cases} \frac{A\tau}{2} \text{sinc}(f - f_c)\tau & , f > 0 \\ \frac{A\tau}{2} \text{sinc}(f + f_c)\tau & , f < 0 \end{cases}$$

اکنون اگر از $V_+(f)$ تبدیل فوریه معکوس بگیریم، سیگنال پیش پوش بدست می آید.

$$v_+(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{j2\pi f_c t}$$

که پوش مختلط آن عبارت است:

$$\tilde{v}(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

فصل پنجم:

فرآیندهای تصادفی و نویز

خلاصه ای از خواص تبدیل فوریه

خلاصه ای از خواص
تبدیل فوریه

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) \leftrightarrow a_1 V_1(f) + a_2 V_2(f)$$

۱- خاصیت خطی بودن

$$v(t) \leftrightarrow V(f) \quad \text{اگر}$$

۲- تأخیر زمانی

$$v(t - t_0) \leftrightarrow v(f) e^{-j\omega t_0} \quad \text{آنگاه}$$

$$v(t) \leftrightarrow V(f) \quad \text{اگر}$$

۳- تغییر مقیاس

$$v(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad \text{آنگاه}$$

$$v(t) \leftrightarrow V(f) \quad \text{اگر}$$

۴- مزدوج مختلط

$$v^*(t) \leftrightarrow V^*(-f) \quad \text{آنگاه}$$

۵- خاصیت دوغانی

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

اگر

$$V(t) \leftrightarrow V(-f)$$

آنگاه

۶- جابجایی فرکانسی

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

اگر

$$v(t)e^{+j\omega_c t} \leftrightarrow V(f - f_c)$$

آنگاه

۷- خاصیت مدوله سازی

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

اگر

$$v(t)\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{1}{2}[V(f - f_c)e^{j\phi} + V(f + f_c)e^{-j\phi}]$$

آنگاه

۸- مشتق گیری زمانی

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

اگر

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f)$$

آنگاه

۹- انتگرال گیری از سیگنال حوزه زمان

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

اگر

$$\int_{-\infty}^t v(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} V(f) + \frac{1}{2} V(0) \delta(f)$$

آنگاه

۱۰- خاصیت کانولوشن در حوزه زمان

$$v(t) \leftrightarrow V(f) \quad \& \quad w(t) \leftrightarrow W(f) \quad \text{اگر}$$

$$v(t) * w(t) \leftrightarrow V(f)W(f) \quad \text{آنگاه}$$

۱۱- خاصیت ضرب در حوزه زمان

$$v(t) \leftrightarrow V(f) \quad \& \quad w(t) \leftrightarrow W(f) \quad \text{اگر}$$

$$v(t).w(t) \leftrightarrow V(f) * W(f)$$

۱۲- ضرب سیگنال در t^n

$$v(t) \leftrightarrow V(f)$$

$$t^n v(t) \leftrightarrow (-j2\pi)^{-n} \frac{d^n v(f)}{df^n}$$

تبدیل فوری به بعضی از شکل موجهای مهم:

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \operatorname{sinc}(f\tau)$$

(۱) تابع مستطیلی

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \operatorname{sinc}^2(f\tau)$$

(۲) تابع مثلثی

$$e^{-\pi(bt)^2} \leftrightarrow \left(\frac{1}{b}\right) e^{-\pi\left(\frac{f}{b}\right)^2}$$

(۳) تابع گاوسی

$$e^{-bt} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{b + j2\pi f}$$

(۴) تابع نمایی در زمانهای مثبت

$$e^{-b|t|} \leftrightarrow \frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

(۵) نمایی متقارن

$$\operatorname{sinc}(2wt) \leftrightarrow \frac{1}{2w} \Pi\left(\frac{f}{2w}\right)$$

(۶) تابع سینک

$$\operatorname{sinc}^2(2wt) \leftrightarrow \frac{1}{2w} \Lambda\left(\frac{f}{2w}\right)$$

(۷) سینک به توان ۲

$$1 \leftrightarrow \delta(f)$$

(۸) ثابت ۱

$$e^{j(\omega_c t + \phi)} \leftrightarrow e^{j\phi} \delta(f - f_c)$$

(۹) تابع نمایی

$$\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{1}{2} [e^{j\phi} \delta(f - f_c) + e^{-j\phi} \delta(f + f_c)]$$

(۱۰) تابع سینوسی

$$\delta(t - t_d) \leftrightarrow e^{-j\omega t_d}$$

(۱۱) تابع ایمپالس

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \leftrightarrow f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_s)$$

(۱۲) تابع نمونه برداری

$$\text{Sgnt} \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

(۱۳) تابع علامت

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

(۱۴) تابع پله

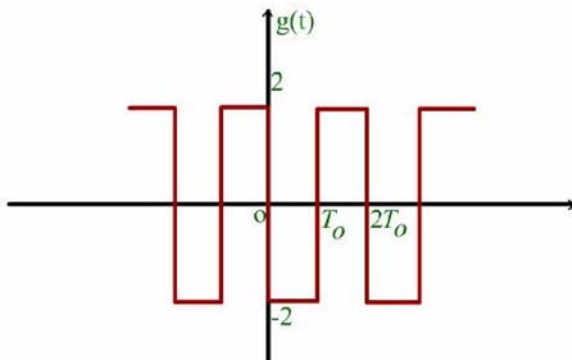
تبدیل فوریه توابع فوق که به خاطر داشتن آن ها موجب حل سریعتر مسائل تبدیل فوریه می گردد با استفاده از تعریف تبدیل فوریه و خواص تبدیل فوریه به آسانی قابل استنتاج هستند .

فصل دوم:

سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

مسائل نمونه - ۱

۱) طیف هر یک از سیگنال های زیر را بدست آورید :
اگر سیگنال $g(t)$ به فرم نشان داده شده باشد , به علت فرد بودن تابع $g(t)$ داریم :

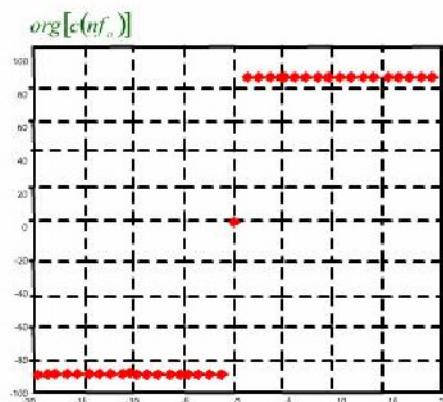
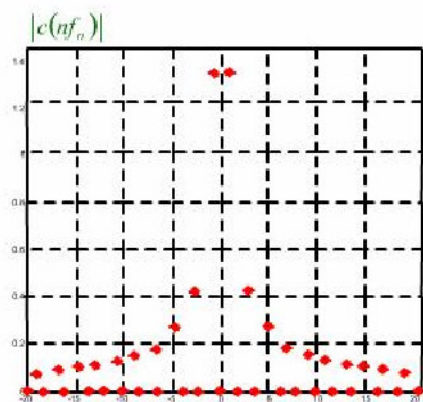


$$c(nf) = -\frac{2j}{T} \int_0^{T/2} g(t) \sin(2\pi nft) dt$$

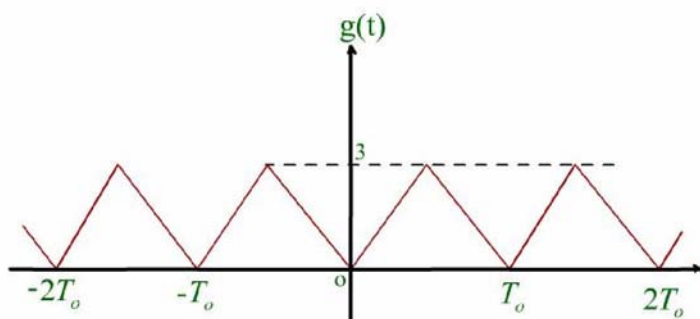
دوره تناوب تابع $g(t)$, $2T_0$ است , بنابراین :

$$\begin{aligned} c(nf_0) &= -\frac{2j}{2T_0} \int_0^{T_0} (-2) \sin\left(\frac{2\pi nft}{2T_0}\right) dt = \frac{2j}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{n\pi t}{T_0}\right) dt \\ &= \frac{j2}{T_0} \frac{-T_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi t}{T_0}\right) \Big|_0^{T_0} = \frac{j2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2j}{n\pi} 2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

دامنه و فاز ضرایب سری فوریه سیگنال $g(t)$ در شکل زیر رسم شده اند زوج بودن دامنه و فرد بودن فاز در این شکل ها قابل رؤیت است .



حال تابع $g(t)$ را به صورت تابع فرد زیر در نظر گرفته و ضرایب سری فوریه آن را می نویسیم:



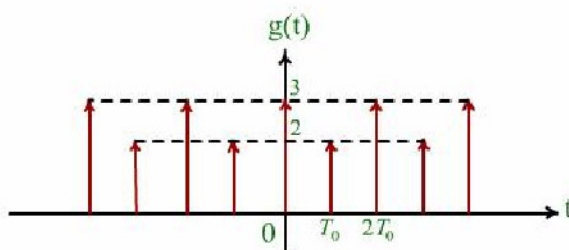
$$c(nf_0) = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

تابع $g(t)$ در بازه $[0, T_0/2]$ از رابطه $g(t) = \frac{6}{T_0} t$ تبعیت می کند، پس:

$$\begin{aligned}
 c(nf_0) &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{6}{T_0} t \cos(2\pi n f_0 t) dt \\
 &= \frac{12}{T_0^2} \left\{ \frac{\cos(2\pi n f_0 t)}{(2\pi n f_0)^2} + \frac{t \sin(2\pi n f_0 t)}{(2\pi n f_0)} \right\}_0^{T_0/2}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow c(nf_0) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \text{Sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ \frac{3}{2} & n = 0 \end{cases}$$

حال فرض کنید تابع $g(t)$ بدین شکل باشد :



این تابع را می توان به فرم ریاضی $g(t) = \text{Re } p_{2T_0} \{v(t)\}$ که در آن $v(t) = 3\delta(t) + 2\delta(t - T_0)$ است نوشت . با استفاده از خواص تبدیل فوریه می توان تبدیل فوریه تابع $g(t)$ یعنی $G(f)$ را به صورت زیر نوشت :

$$G(f) = \frac{1}{2T_0} \text{comb}_{\frac{1}{2T_0}} [V(f)]$$

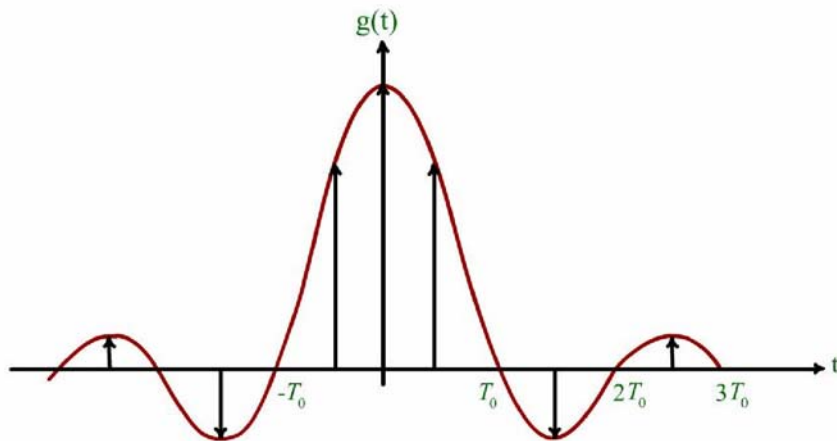
که $V(f)$ تبدیل فوریه $v(t)$ است و با استفاده از خواص تبدیل فوریه و فرم ریاضی تابع آن $(v(t))$ به صورت زیر قابل نوشتن است .

$$V(f) = 3 + 2e^{-j2\pi fT_0}$$

بنابراین تبدیل فوریه $g(t)$ به صورت زیر خواهد شد :

$$G(f) = \frac{1}{2T_0} \text{comb}_{\frac{1}{2T_0}} \left[3 + 2e^{-j2\pi f T_0} \right]$$

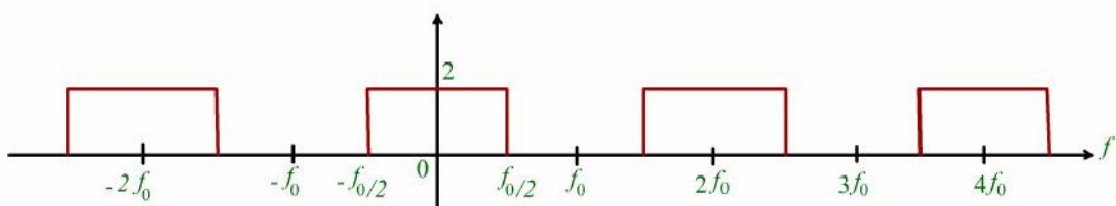
در نهایت تبدیل فوریه سیگنال نمونه برداری شده $g(t)$ را بدست می آوریم :



$$g(t) = \text{comb}_{T_0/2} \left[\text{sinc} \left(\frac{t}{T_0} \right) \right] \quad \begin{array}{c} \text{با استفاده از خواص} \\ \longleftrightarrow \\ \text{تبدیل فوریه} \end{array} \quad G(f) = \frac{2}{T_0} \text{Rep}_{\frac{2}{T_0}} [T_0 \Pi(fT_0)]$$

$$= \text{Rep}_{2f_0} \left[2\Pi \left(\frac{f}{f_0} \right) \right]$$

طیف سیگنال $g(t)$ فوق را می توان در شکل مشاهده نمود .

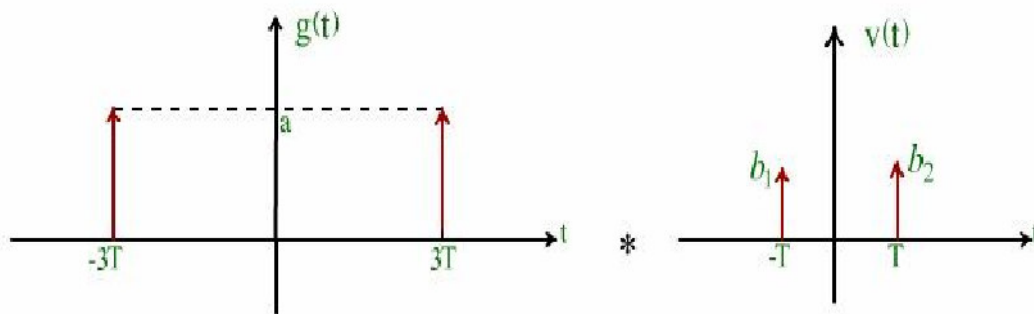


فصل دوم:

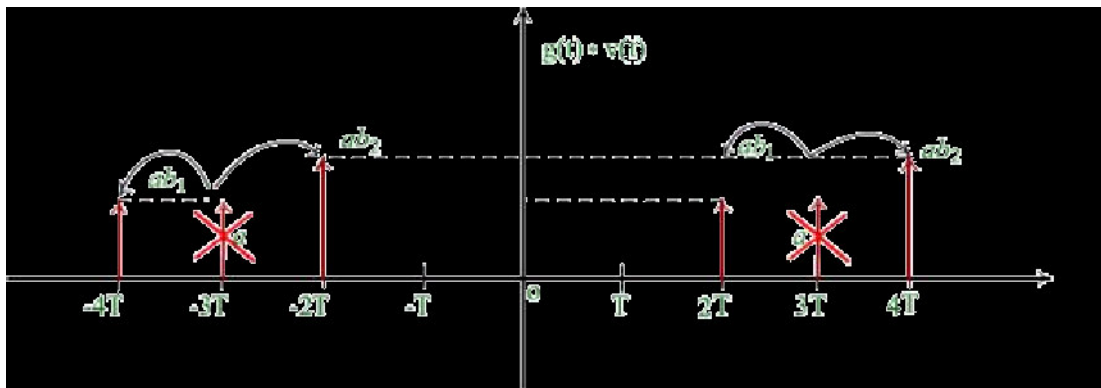
سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

مسائل نمونه - ۳

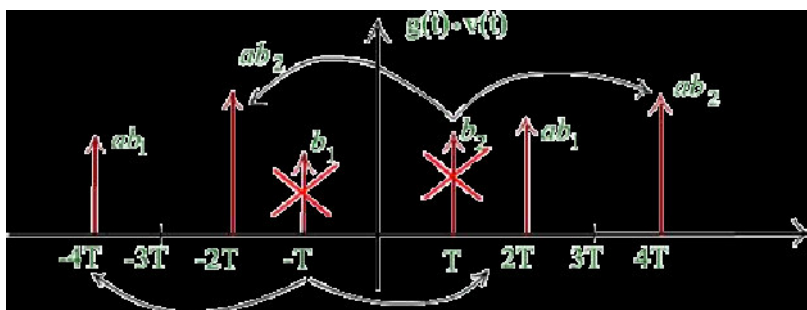
۲) حاصل کانولوشن های زیر را بدست آورده و رسم کنید .



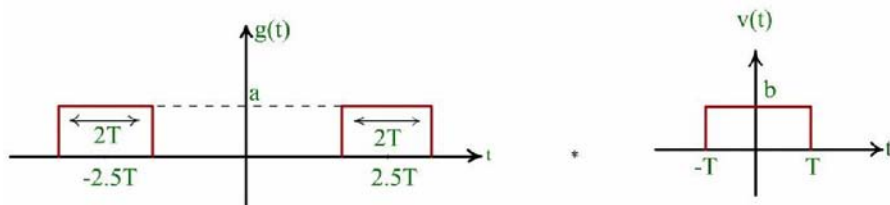
قبلاً دیده بودیم که کانولوشن هر سیگنال با سیگنال ضربه انتقال آن سیگنال حول سیگنال ضربه می شود با استفاده از همین خاصیت اگر سیگنال $v(t)$ را حول سیگنال ضربه در نقاط $3T$ و $-3T$ ی سیگنال $g(t)$ انتقال دهیم و یا بر عکس سیگنال $g(t)$ را حول ضربه های $v(t)$ در T و $-T$ منتقل کنیم ، حاصل این کانولوشن بدست می آید .



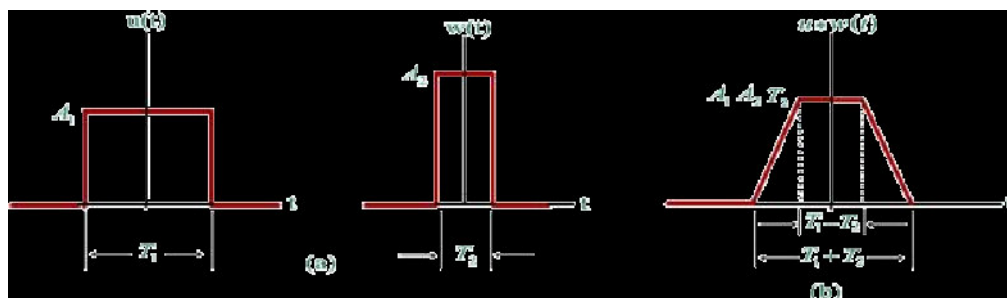
یا



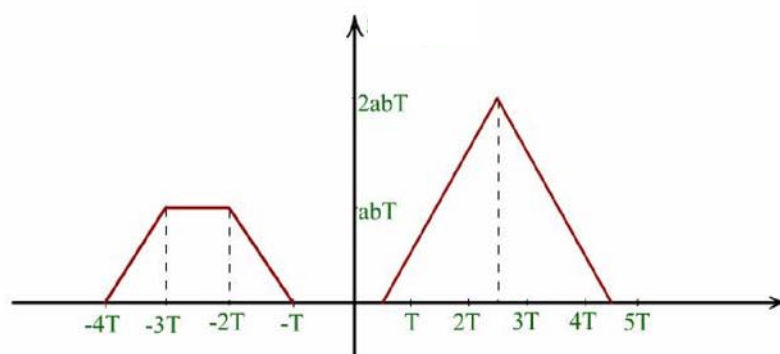
حال می خواهیم دو پالس مستطیلی $v(t)$ و $g(t)$ را با هم کانالو کنیم .



با توجه به کانالو کردن دو پالس مستطیلی با عرضهای متفاوت که قبلاً به آن اشاره شده است این مساله به راحتی حل می شود.



نتیجه حاصل حول $2.5T$ و $-2.5T$ قرار دارد که با توجه به یکسان بودن عرض پالس $v(t)$ و $g(t)$ در قسمت T نتیجه حاصل یک مثلث با عرض $4T$ و مرکز $2.5T$ و ارتفاع $2abT$ می شود، اما به دلیل یکسان نبودن عرض $v(t)$ و $g(t)$ در $-2.5T$ یک شکل دوزنقه بدست می آید که عرض قاعده کوچک آن $2T - T = T$ و قاعده بزرگ آن $2T + T = 3T$ خواهد بود. مرکز این دوزنقه در $-2.5T$ قرار دارد. در ضمن ارتفاع آن abT می باشد.



۳: با استفاده از خواص تبدیل فوریه طیف فرکانسی سیگنال $g(t)$ را بدست آورید .

$$g(t) = 2At\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

اگر تبدیل فوریه سیگنال $v(t)$ را $V(f)$ بنامیم ، داریم :

$$v(t) \longleftrightarrow V(f)$$

$$-j2\pi f v(t) \leftrightarrow \frac{dV(f)}{df}$$

حال تابع $rect$ را برابر با $v(t)$ می گیریم، یعنی :

$$v(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

که تبدیل فوریه آن عبارت خواهد شد از :

$$V(f) = \tau \operatorname{sinc}(f\tau)$$

و مشتق آن عبارت است از:

$$\frac{dV(f)}{df} = \frac{\tau}{\pi\tau} \frac{d}{df} \left(\frac{\sin(f\tau\pi)}{f} \right) = \frac{1}{\pi f^2} (\pi\tau f \cos(\pi\tau f) - \sin(\pi\tau f))$$

بنابراین :

$$-j2\pi f v(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi f^2} (\pi\tau \cos(\pi\tau f) - \sin(\pi\tau f))$$

که با مقداری عملیات ریاضی تبدیل فوریه $2Atv(t)$ یعنی $G(f)$ به صورت زیر در می آید :

$$G(f) = \frac{A\tau}{j\pi f} \{ \operatorname{sinc}(f\tau) - \cos(\pi f\tau) \}$$

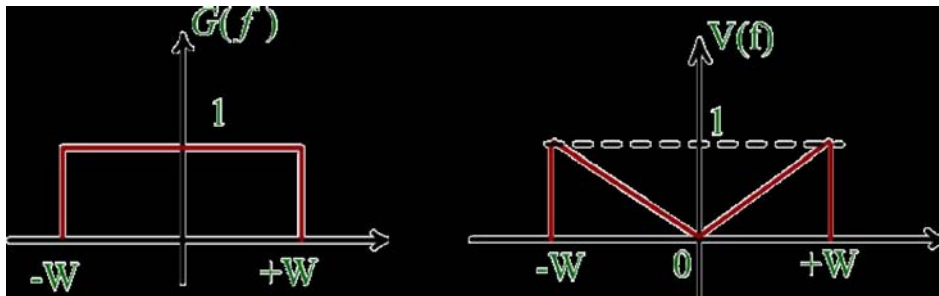
فصل دوم: سیگنالها و طیف فرکانسی آنها

حل مسائل نمونه

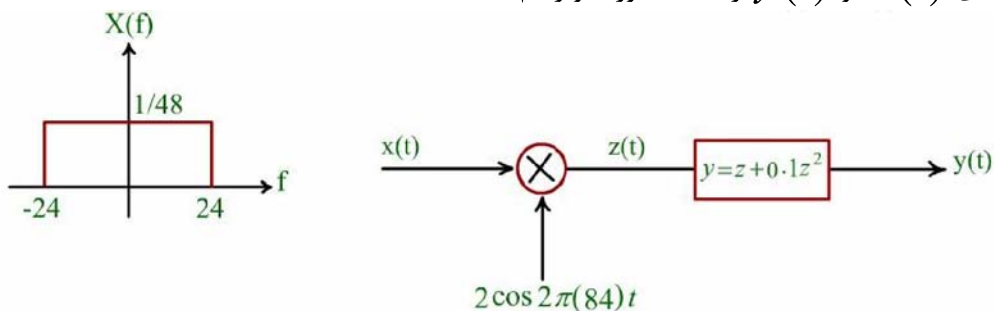
برای درک بیشتر مطالب این فصل تمرین های زیر را حل نمایید .

۱- تبدیل فوریه پالس گوسی $g(t) = Ae^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ را بدست آورید .

۲- با در نظر گرفتن سیگنال های $g(t)$ و $v(t)$ هر کدام با عرض باند w و طیف های $G(f)$ و $V(f)$ برای آنها، طیف سیگنال $h(t) = 2g(t)\cos 2\pi f_c t + 2v(t)\sin 2\pi f_c t$ را بدست آورده و رسم نمایید . عرض باند لازم جهت انتقال سیگنال $h(t)$ چقدر خواهد بود ؟ چه کاربردی برای این مسأله می توانید ذکر کنید .

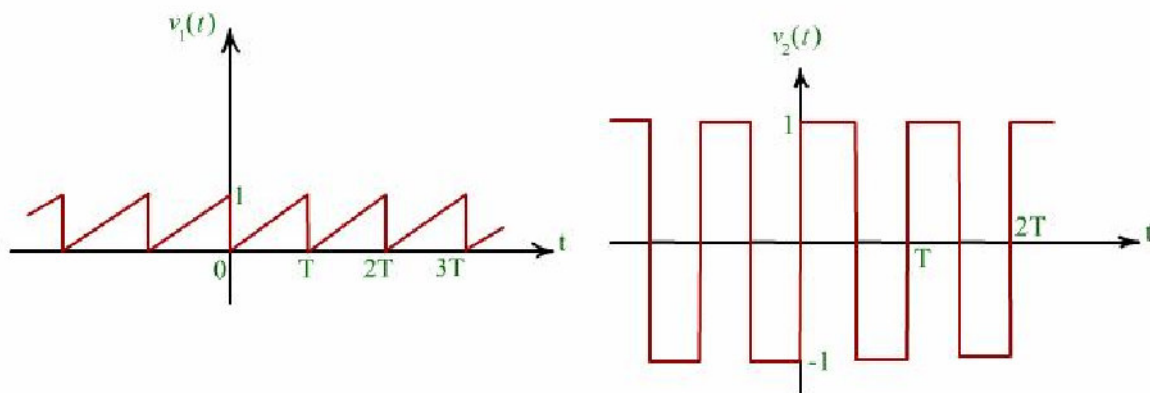


۳- طیف سیگنال های $z(t)$ و $y(t)$ را بدست آورده و رسم کنید .



۴- چگالی طیفی توان و تابع خود بستگی سیگنال $v(t) = \cos 10\pi t + \cos 20\pi t$ را بدست آورید و تابع چگالی طیفی توان را رسم کنید .

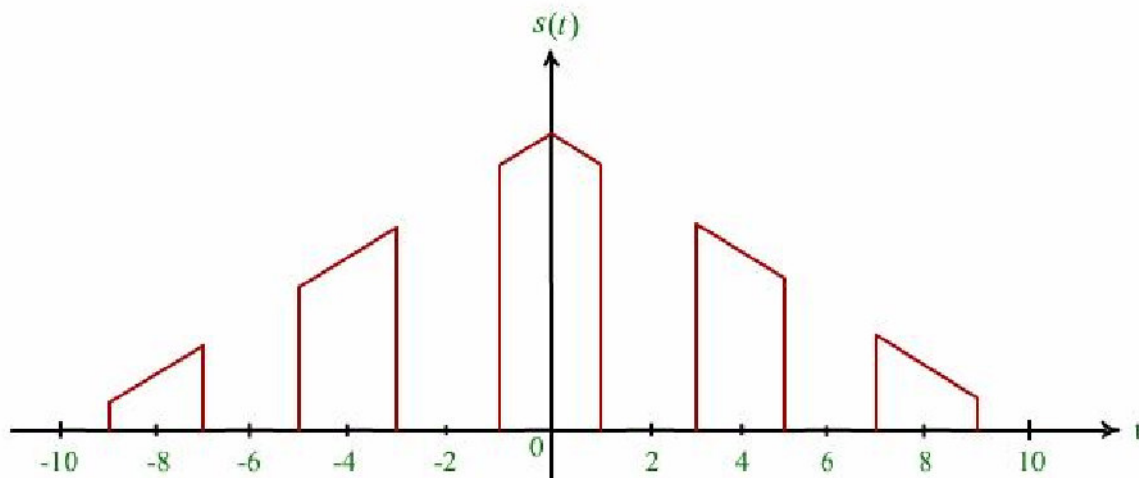
۵- تابع همبستگی متقابل دو شکل موج پریودیک زیر را بدست آورید .



۶- طیف سیگنال $s(t)$ را با توجه به این که

$$[v_1(t) * v_2(t)] \cdot v_3(t) \xleftrightarrow{F} [V_1(f)V_2(f)] * V_3(f)$$

بدست آورید .



سیستم ها و
فیلتر ها

در مخابرات، سیستم را می توان به عنوان پدیده ای که منجر به انتقال سیگنال های الکتریکی می شود دانست. بلوک دیاگرام یک سیستم مخابراتی را می توان به صورت نشان داده شده، در نظر گرفت.



این سیستم ورودی $x(t)$ را به $y(t)$ با رابطه $y(t) = f(x(t))$ تبدیل می کند. سیستم ها را می توان از لحاظ انتقال سیگنال و فیلتر کردن مورد بررسی قرار داد. انتقال سیگنال فرآیندی است که طی آن سیگنال الکتریکی از یک نقطه به نقطه دیگر می رسد بدون آن که اعوجاجی در آن ایجاد شود. اما در فرآیند فیلتر کردن به علت انتخاب طیف فرکانسی مطلوب، طیف کلی سیگنال قبل از فیلتر شدن و بعد از آن با هم متفاوت خواهد بود. با این وجود اغلب سیستم های انتقال و فیلترها دارای خواص خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده و این خواص مشترک سبب می شود که هر دو پدیده را بتوان در حوزه زمان و فرکانس تجزیه و تحلیل کرد. بنابراین در این فصل ابتدا پاسخ سیستم را در هر دو حوزه بررسی کرده و نتایج را به تحلیل مباحثی مانند فیلتر کردن، انتقال سیگنال و اعوجاج اعمال می کنیم.

طبقه بندی
سیستم ها

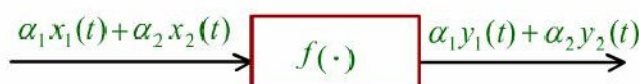
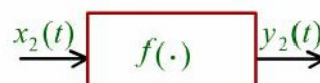
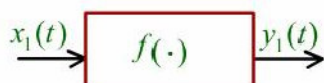
سیستم ها را از لحاظ خواص عملکردی و ماهیت فیزیکی آنها می توان به انواع

مختلف زیر طبقه بندی کرد :

سیستم های خطی
و غیر خطی:

اگر خاصیت جمع آثار در یک سیستم ارضاء شود آن سیستم را خطی و در غیر این صورت غیر خطی گویند. جمع آثار بدین صورت بیان می شود که اگر پاسخ سیستم به $x_1(t)$ ، $y_1(t)$ باشد و پاسخ آن به $x_2(t)$ ، $y_2(t)$ آنگاه پاسخ همان سیستم به ورودی $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ ، $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ باشد.

در شکل این خاصیت را ملاحظه می کنید.



سیستم های تغییر
ناپذیر و تغییر پذیر
با زمان:

اگر اعمال یک شیفت زمانی در ورودی یک سیستم باعث ایجاد همان شیفت زمانی در خروجی سیستم شود، آن را تغییر ناپذیر با زمان گویند.



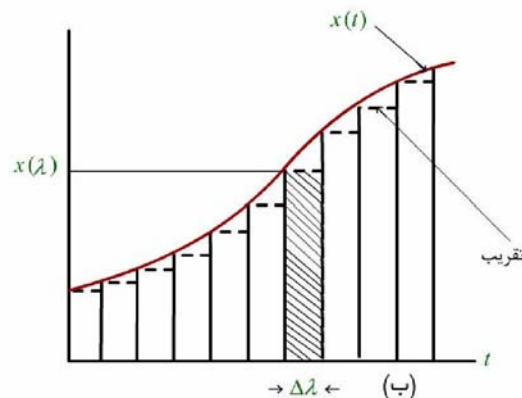
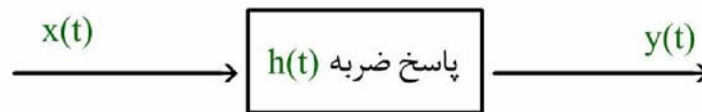
سیستمی که خاصیت فوق را نداشته باشد، سیستمی تغییر پذیر با زمان است.

سیستم های
علی و غیر علی:

سیستم علی، سیستمی است که قبل از اعمال ورودی هیچ گونه خروجی ندارد. تمام سیستم های عملی، علی هستند.
سیستمی را که خطی و تغییر پذیر با زمان باشد، LTI (Linear Time Invariant) گویند.

پاسخ ضربه و تحلیل
سیستم در حوزه زمان

در حوزه زمان یک سیستم خطی تغییرناپذیر بر حسب زمان، محلی و بطور مجانبی پایدار بوسیله پاسخ ضربه تعریف و توصیف می شود. پاسخ ضربه در واقع پاسخ سیستم به ایمپالس واحد یا تابع دلتایی است که به ورودی سیستم اعمال می شود. با توجه به این که سیستم تغییر ناپذیر با زمان است شکل پاسخ ضربه مستقل از زمان اعمال ضربه ورودی سیستم بوده و تغییر نمی کند. با دانستن پاسخ ضربه هر سیستم، پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را می توان بدست آورد. فرض کنید که سیستم با ورودی دلخواه $x(t)$ تحریک شود.



برای تعیین پاسخ سیستم $(y(t))$ می توان $x(t)$ را بطور تقریب به صورت یک تابع پله ای که متشکل از پالس های باریک چهارگوش می باشد در نظر گرفت بطوریکه پهنای هر یک از

پالس های مذکور $\Delta\lambda$ می باشد. با توجه به شکل هر قدر $\Delta\lambda$ کوچکتر باشد، تقریب فوق کاهش می یابد و با میل کردن $\Delta\lambda$ به سمت صفر، هر پالس در نهایت به صورت یک تابع دلتا در می آید که وزن آن با حاصلضرب ارتفاع پالس در $\Delta\lambda$ برابر است.

مشاهده می شود که سطح پالس هاشور خورده $x(\lambda)\Delta\lambda$ است و پاسخ سیستم به تابع دلتایی با سنگینی $x(\lambda)\Delta\lambda$ که در $x = \lambda$ رخ می دهد عبارت است از:

$$x(\lambda)h(t - \lambda)\Delta\lambda$$

در تعیین پاسخ کلی $y(t)$ در زمان t ، می توان از اصل جمع آثار استفاده نمود. پس با جمع زدن پاسخ های بسیار کوچک و مختلف که بواسطه پالس های ورودی مختلف ایجاد می شوند و از نظر حدی با میل دادن $\Delta\lambda$ به سمت صفر پاسخ کلی $y(t)$ بدست می آید.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t) * h(t)$$

بنابراین برای بدست آوردن پاسخ یک سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ کافی است که این ورودی را با پاسخ ضربه سیستم کانوالو کنیم.
پاسخ ضربه یک سیستم را علاوه بر اعمال ضربه به ورودی آن و مشاهده پاسخ، می توان با اعمال ورودی پله به سیستم بدست آورد.
فرض کنید ورودی پله باشد $x(t) = u(t)$ بدین ترتیب پاسخ پله سیستم عبارت خواهد شد از:

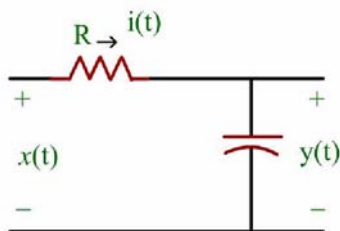
$$y_u(t) = u(t) * h(t)$$

اگر از طرفین رابطه فوق در حوزه زمان مشتق بگیریم داریم.

$$\frac{dy_u(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(u(t) * h(t)) = \frac{du(t)}{dt} * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

بنابراین برای بدست آوردن پاسخ ضربه یک سیستم می توان مشتق پاسخ پله آن را بدست آورد.

با استفاده از خاصیت فوق پاسخ ضربه مدار RC را بدست می آوریم.



ابتدا معادلات دیفرانسیل مربوط به حلقه را با استفاده از KVL می نویسیم.

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = y(t) + RC \frac{dy(t)}{dt}$$

اگر در رابطه فوق $x(t) = u(t)$ باشد، پاسخ پله سیستم بدست می آید، که برابر خواهد شد با:

$$y_u(t) = [1 - e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$

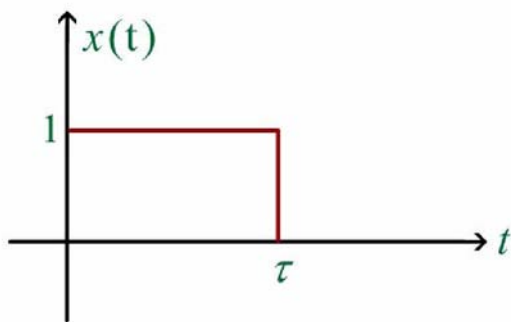
برای بدست آوردن پاسخ ضربه از رابطه فوق مشتق می گیریم که برابر خواهد شد با:

$$h(t) = \frac{dy_u(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + \delta(t)[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]$$

عبارت دوم طرف راست تساوی، فقط در $t = 0$ مقدار دارد که در این لحظه عبارت داخل کروشه صفر می شود. پس $h(t)$ خواهد شد:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

اگر بخواهیم پاسخ این سیستم را به ورودی پالسی $x(t)$ بدست آوریم، از کانولوشن $x(t)$ با $h(t)$ استفاده می کنیم:



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

$$x(\lambda) = \begin{cases} 1 & 0 < \lambda < \tau \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$h(t - \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{\frac{-(t-\lambda)}{RC}} & t - \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فصل سوم:

سیستم ها و فیلترها

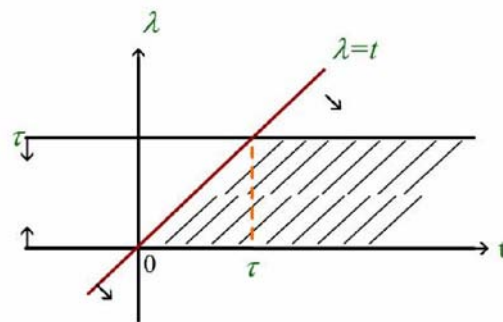
پاسخ ضربه و تحلیل سیستم
در حوزه زمان - قسمت ۴

اگر نمودار λ بر حسب t را رسم کنیم حدود انتگرال گیری بدست می آید، که در شکل با هاشور مشخص شده است.
بنابراین $y(t)$ به راحتی بدست می آید.

$$\text{if } t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$$

$$\text{if } 0 < t < \tau \Rightarrow y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-\lambda)}{RC}} d\lambda = [1 - e^{-\frac{t}{RC}}]$$

$$\text{if } t > \tau \Rightarrow y(t) = \int_0^{\tau} \frac{1}{RC} e^{-\frac{(t-\lambda)}{RC}} d\lambda = [1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}] e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}$$



در ادامه به بررسی همبستگی بین ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر بر حسب زمان می پردازیم.

فرض کنید $x(t)$ ورودی سیستم مذکور، $R_x(\tau)$ تابع خود بستگی آن، $y(t)$ خروجی سیستم، $R_y(\tau)$ تابع خودبستگی آن و تابع $R_{yx}(\tau)$ تابع همبستگی ورودی و خروجی باشد. روابط زیر را می توان نوشت:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt$$

در روابط فوق سیگنال های انرژی فرض شده اند، اما در مورد سیگنال های توان نیز می توان با روش مشابه به نتایج مشابهی رسید.

در عبارت مربوط به تابع همبستگی ورودی و خروجی اگر به جای عبارت $y(t)$ مقدارش را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) x^*(t-\lambda) d\lambda dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda) x^*(t-\lambda) dt \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) R_x(\tau - \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau)$$

به عبارت دیگر تابع همبستگی خروجی و ورودی یک سیستم LTI با کانولوشن پاسخ ضربه و تابع خود بستگی ورودی برابر است.

تابع خود بستگی خروجی برابر است با :

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\lambda) x^*(t - \tau - \lambda) d\lambda \right] dt \quad \underline{\underline{جابجایی تقدم dt و d\lambda}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t - \tau - \lambda) dt \right] d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\lambda) R_{yx}(\tau + \lambda) d\lambda$$

با تغییر متغیر $\mu = -\lambda$ رابطه فوق را می توان به صورت نوشت :

$$R_y(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(-\mu) R_{yx}(\tau - \mu) d\mu$$

که به فرم زیر قابل نوشتن است:

$$R_y(\tau) = h^*(-\tau) * R_{yx}(\tau)$$

که اگر $R_{yx}(\tau)$ را نیز جایگزین کنیم به عبارتی بر حسب تابع خود بستگی ورودی و پاسخ ضربه سیستم برای تابع خودبستگی خروجی خواهیم رسید.

$$R_y(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau)$$

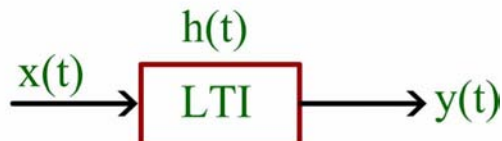
تابع تبدیل و تحلیل
سیستم در حوزه فرکانس

در سیستم های مرتبه بالا که معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم، درجه بالاتر از ۲ دارد، تحلیل زمانی سیستم امری مشکل و پیچیده می شود که برای غلبه بر این مشکل و بررسی یک سیستم و پاسخ آن، تحلیل در حوزه فرکانس مورد استفاده قرار می گیرد. این تحلیل با استفاده از تابع تبدیل سیستم (System Transfer Function) انجام می گیرد. تابع تبدیل سیستم، تبدیل فوریه پاسخ ضربه آن سیستم می باشد.

$$H(f) = F(h(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

لازمه تعریف فوق آن است که $H(f)$ ، حداقل در مفهوم حدی وجود داشته باشد. در مواردی که سیستم ناپایدار است، $h(t)$ لحظه به لحظه افزایش یافته و $H(f)$ قابل تعریف نیست.

فرض کنید تبدیل فوریه سیگنال ورودی به یک سیستم LTI یعنی $x(t)$ ، پاسخ ضربه آن $h(t)$ و پاسخ سیستم $y(t)$ را به ترتیب $X(f)$ ، $H(f)$ و $Y(f)$ بنامیم.



با توجه به رابطه حوزه زمانی این سیستم داشتیم:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

اگر از این رابطه تبدیل فوریه بگیریم بر اساس خواص تبدیل فوریه خواهیم داشت :

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

رابطه فوق پایه و اساس تحلیل سیستم در حوزه فرکانس بوده و بنابراین رابطه طیف خروجی با حاصلضرب تابع تبدیل سیستم، $H(f)$ ، در طیف ورودی آن، $X(f)$ ، برابر است. بدین ترتیب دامنه و فاز خروجی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|Y(f)| = |H(f)| |X(f)|$$

$$\arg Y(f) = \arg H(f) + \arg X(f)$$

با توجه به این که تابع تبدیل یک سیستم، طیف فوریه ی پاسخ ضربه است، طیف خروجی سیستم به ازای ورودی ایمپالس با توجه به این که $F(\delta(t)) = 1$ است، تابع تبدیل سیستم خواهد بود.

با بررسی مجدد رابطه $Y(f) = X(f)H(f)$ و به توان دو رساندن طرفین این رابطه به نتیجه مهمی خواهیم رسید:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

بنابراین رابطه، چگالی طیفی انرژی خروجی سیستم عبارت است از حاصل ضرب چگالی طیفی ورودی سیستم در مربع قدمطلق تابع تبدیل آن سیستم. رابطه فوق در مورد سیگنال های توان نیز صادق است.

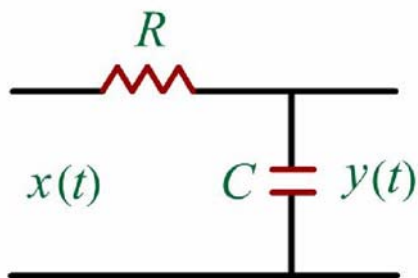
اگر ورودی سیستمی به صورت $x(t) = e^{j\omega t}$ باشد می توان رابطه ساده ای برای تابع تبدیل آن بدست آورد.

در این سیستم خروجی از رابطه زیر بدست می آید:

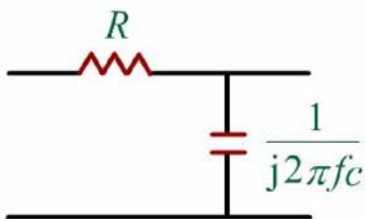
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) e^{j2\pi f(t-\lambda)} d\lambda = e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda$$

$$= x(t) H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \Big|_{x(t) = e^{j\omega t}}$$

حال تابع تبدیل مدار RC نشان داده شده را بدست می آوریم.



برای تحلیل این مدار در حوزه فرکانس، المان های آن را به صورت امپدانسی در حوزه فرکانس می نویسیم:

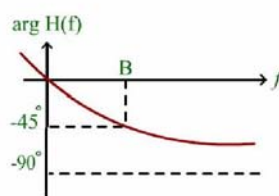
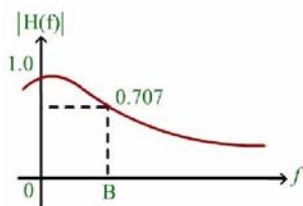


$$H(f) = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B}}, B = \frac{1}{2\pi RC}$$

اگر از پاسخ ضربه این مدار که در قسمتهای قبل بدست آمد تبدیل فوریه می گرفتیم، به همین نتیجه برای $H(f)$ می رسیدیم.
پاسخ دامنه و فاز عبارت فوق برابر است با :

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}}, \arg H(f) = -\tan^{-1} \frac{f}{B}$$

این پاسخ ها در شکل نشان داده شده اند. با توجه به اینکه $H(f)$ دارای تقارن هرمیتی است، می توانیم قسمت فرکانس های منفی را نشان ندهیم، بدون آنکه اطلاعاتی از دست داده شود. بررسی تابع تبدیل مدار Rc مفروض نشان می دهد که این مدار تقریباً اثری بر مؤلفه های فرکانس پایین ($|f| \ll B$) ندارد، در حالی که دامنه مؤلفه های فرکانسی بالاتر را شدیداً کاهش می دهد. بنابراین به این مدار فیلتر پایین گذر Rc گفته می شود.

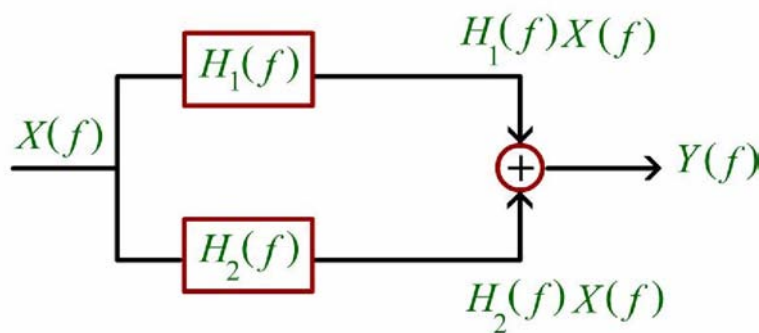


در اغلب موارد، سیستم مخابراتی از تعدادی بلوکهای سازنده یا زیر سیستم تشکیل یافته است. اگر زیر سیستم های مورد نظر با تابع تبدیل مربوطه توصیف شده باشند، می توان با استفاده از آنها تابع تبدیل کلی سیستم را تعیین کرد. در آنجا باید به این نکته نیز توجه شود که هر گونه اثر باردهی یا تأثیر متقابل بین دو بلوک، باید در تابع تبدیل هر یک از بلوکهای مذکور در نظر گرفته شود، بطوریکه تابع تبدیل بلوکها بیانگر پاسخ واقعی آنها در شرایط شان باشد.

بلوکهای یک سیستم می توانند با اشکال متفاوتی در کنار یکدیگر قرار گیرند، اما معمولاً سه نوع موازی، سری و فیدبکی در همه سیستم ها دیده می شود و اگر سیستم پیچیده تر نیز باشد می توان با استفاده از این ساختارها پاسخ کلی سیستم را بدست آورد.

در اتصال موازی که به صورت نشان داده شده می باشد پاسخ نهایی سیستم به صورت زیر است:

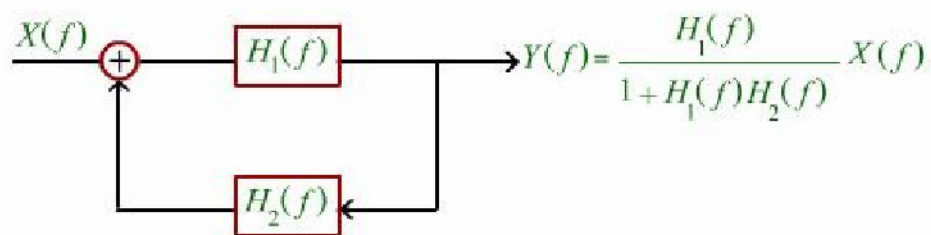
$$Y(f) = [H_1(f) + H_2(f)]X(f)$$



یعنی تابع تبدیل کلی یک سیستم با بلوکهای موازی از مجموع تابع تبدیل های آن بدست می آید. اگر بلوکهای یک سیستم به صورت سری قرار گرفته باشند. تابع تبدیل های آنها در هم ضرب می شوند و پاسخ سیستم عبارت است از:

$$X(f) \rightarrow H_1(f) \rightarrow H_1(f)X(f) \rightarrow H_2(f) \rightarrow Y(f) = H_1(f)H_2(f)X(f)$$

اگر بلوکهای یک سیستم به صورت فیدبکی قرار گرفته باشند پاسخ این سیستم را می توان به صورت:



نوشت.

فصل سوم : سیستم ها و فیلترها

تابع تبدیل و تحلیل سیستم
در حوزه فرکانس _ قسمت ۵

در صورتیکه تابع تبدیل بلوک های یک سیستم مشخص باشند، می توان با استفاده از آنالیزهای مشابه پاسخ کلی سیستم را بدست آورد اما امکان دارد بعضی از بلوک ها بصورت عملکرد آنها در حوزه زمان توصیف و یا معرفی شوند، که در این صورت باید تابع تبدیل مربوطه را تعیین کرد. برای چهار عمل ضرب عددی، مشتق گیری، انتگرال گیری و تأخیر زمانی تابع تبدیل به صورت زیر خواهد بود.

ضرب عددی

$$y(t) = \pm Kx(t) \longleftrightarrow H(f) = \pm K$$

مشتق گیری

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow H(f) = j2\pi f$$

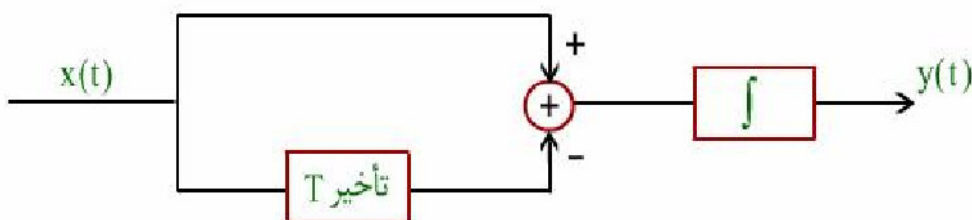
انتگرال گیری

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \longleftrightarrow H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

تأخیر زمانی

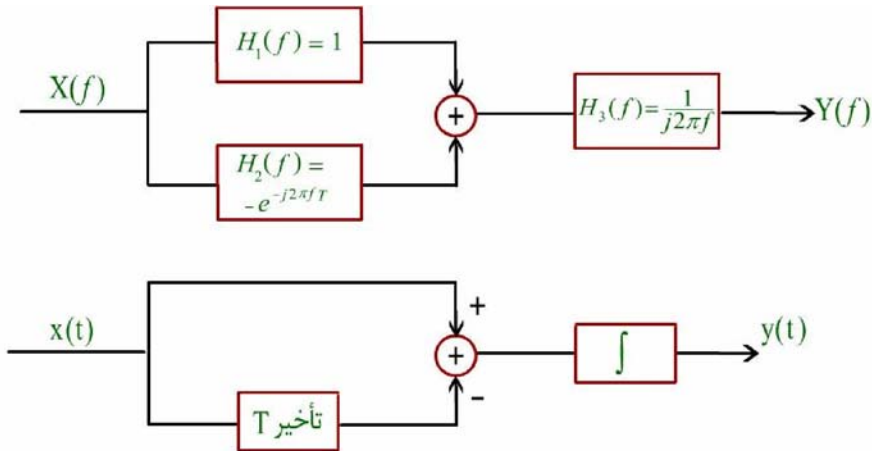
$$y(t) = x(t - t_d) \longleftrightarrow H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$$

به عنوان مثال تابع تبدیل و پاسخ ضربه سیستم نشان داده شده را بدست می آوریم.



با توجه به شکل شاخه بالای قسمت موازی یک مسیر مستقیم بوده و در نتیجه $H_1(f) = 1$ خواهد بود. در شاخه پائین تأخیر زمانی T ثانیه و تغییر علامت رخ می دهد. در شاخه پایین، تأخیر زمانی T ثانیه و تغییر پلاریته رخ می دهد. بنابراین $H_2(f) = -e^{-j2\pi fT}$ می باشد. تابع تبدیل انتگرال گیری در بلوک نهائی عبارت است از:

بنابراین بلوک دیاگرام سیستم بر حسب تابع تبدیل های فوق به شکل زیر در می آید.

$$H_3(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$


و با توجه به اتصالات سری و موازی می توان نوشت:

$$H(f) = [H_1(f) + H_2(f)]H_3(f)$$

$$= \left[1 - e^{-j2\pi fT} \right] \frac{1}{j2\pi f}$$

$$= \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} e^{-j\pi fT} = \frac{\sin \pi fT}{\pi f} e^{-j\pi fT} = T \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}$$

فصل سوم : سیستم ها و فیلترها

تابع تبدیل و تحلیل سیستم در
حوزه فرکانس - قسمت ۶

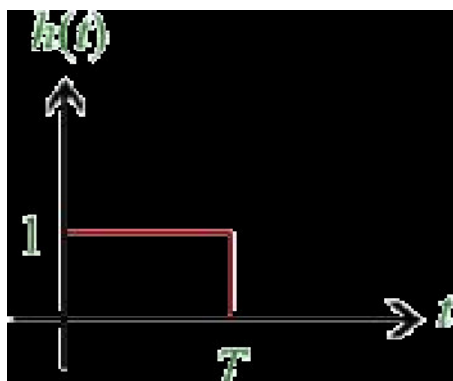
اگر پاسخ ضربه سیستم را بخواهیم با توجه به شکل بدست آوریم، ورودی را $x(t) = \delta(t)$ فرض می کنیم. در این صورت سیگنال ورودی به انتگرال گیر $x(t) - x(t - T) = \delta(t) - \delta(t - T)$ خواهد بود، که پس از انتگرال گیری به صورت:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\lambda) - \delta(\lambda - T)] d\lambda = u(t) - u(t - T)$$

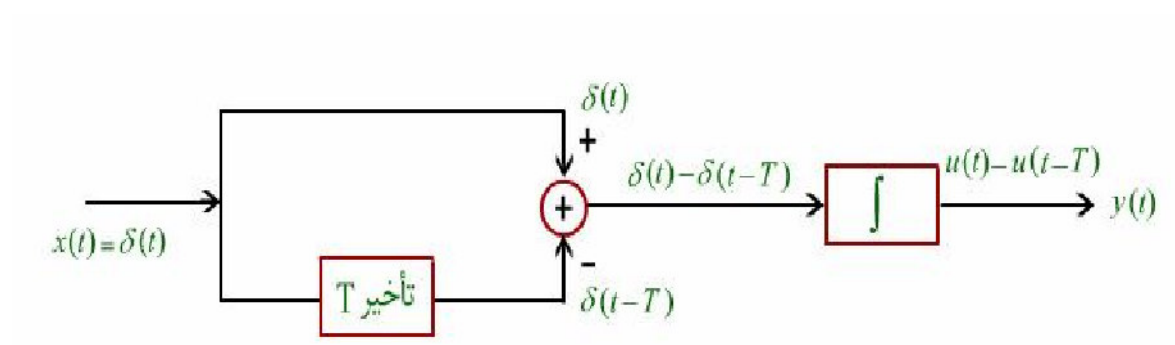
بدست خواهد آمد. بنابراین پاسخ ضربه، پالس چهارگوش، با پهنای T است که در زمان $t = 0$ شروع می شود و می توان آن را به صورت

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

نوشت.

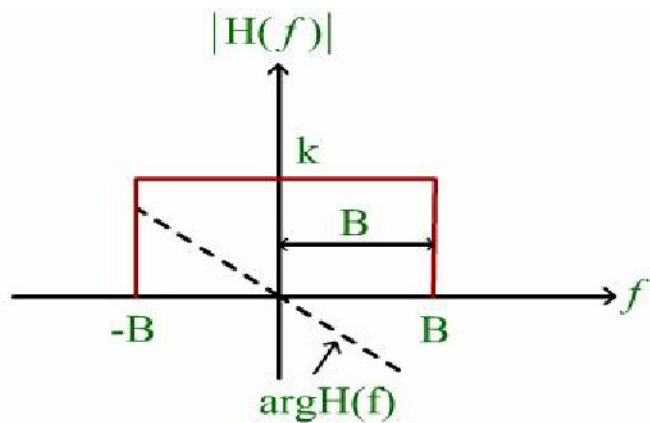


پاسخ ضربه بدست آمده به این روش را می‌توان مستقیماً از عکس تبدیل فوریه تابع تبدیل کلی سیستم یعنی $H(f)$ بدست آورد.

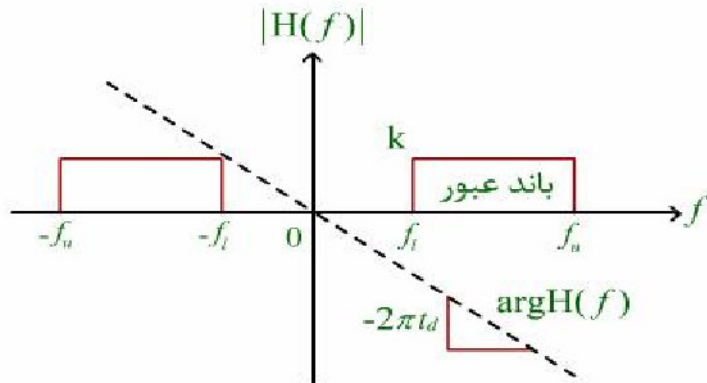


فیلترها

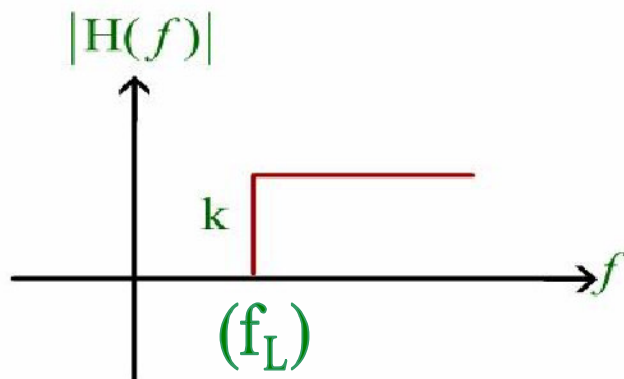
بطور کلی در هر سیستم مخابراتی به منظور جدا ساختن سیگنال اطلاعات از سیگنالهای نامطلوب مانند نویز، تداخل و حاصل ضربهای اعوجاج، از یک یا چند فیلتر استفاده می شود. در بررسی فیلترها ابتدا آنها را ایده آل در نظر گرفته و تعریف می نماییم. سپس فیلترهای واقعی را که در عمل به کار می روند مورد بحث قرار خواهیم داد. بنا به تعریف فیلترهای ایده آل باند معینی از فرکانسها را بدون اعوجاج انتقال داده و سایر فرکانسها را حذف می نمایند. به عنوان مثال فیلتر پایین گذر ایده آل کلیه مؤلفه های فرکانسی کوچکتر از B را بدون اعوجاج عبور داده و سایر فرکانسها را که از بزرگتر باشند حذف می کند.



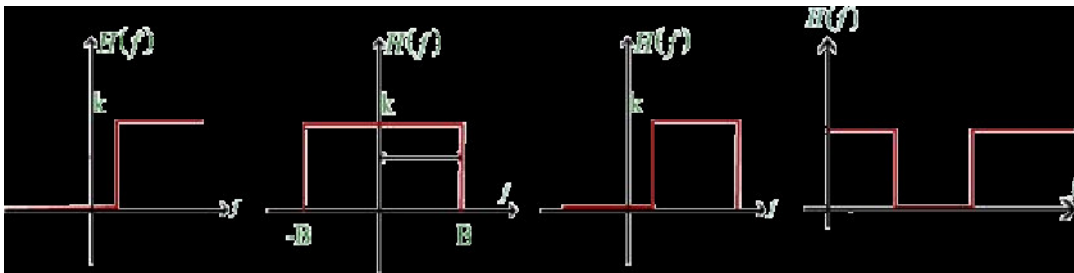
مشخصه‌ی فیلتر میان‌گذر نیز به این شکل است.



پارامترهای f_u و f_l نیز به ترتیب فرکانس‌های قطع پایین و بالای فیلتر هستند. قسمت فرکانس مثبت باند عبور هر فیلتر را پهنای باند آن فیلتر می‌نامند. پهنای باند فیلتر پایین‌گذر نشان داده شده، B و پهنای باند فیلتر میان‌گذر $B = f_u - f_l$ می‌باشد. فیلتر بالا‌گذر ایده‌آل را می‌توان بصورت فیلتر میان‌گذر ایده‌آل را در نظر گرفت که در آن $f_u = \infty$, $f_l > 0$



فیلتر ایده آل میان گذر نیز نوع دیگری از فیلتر است که به استثنای باند معینی از فرکانس ها به نام باند توقف کلیه فرکانس های دیگر را بدون اعوجاج و دگرگونی انتقال می دهد.



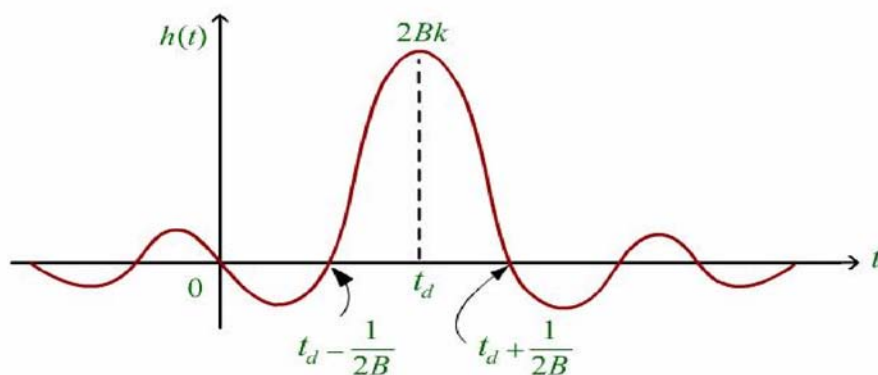
فیلترهای ایده آلی که تعریف شدند، از نظر فیزیکی قابل تحقق نمی باشند و مشخصه های آنها را نمی توان با تعداد محدودی از عناصر و قطعات الکتریکی به طور دقیق بدست آورد. به عنوان مثال فیلتر پایین گذر ایده آل رادر نظر می گیریم .

تابع تبدیل این فیلتر عبارت است از $H(f) = ke^{-j\omega t_d} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$ پاسخ ضربه فیلتر مذکور که تبدیل فوریه معکوس تابع تبدیل است برابر خواهد بود با:

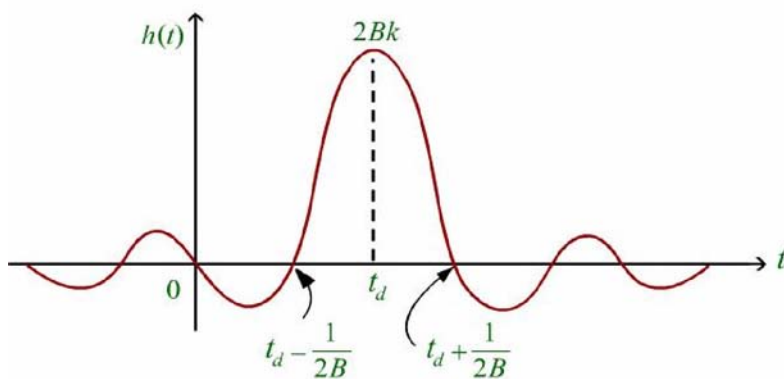
$$h(t) = F^{-1}\{H(f)\} = 2Bk \operatorname{sinc} 2B(t - t_d)$$

این پاسخ ضربه در شکل نشان داده شده است. ملاحظه می شود که پاسخ ضربه در زمان های $t < 0$ نیز وجود دارد. با توجه به این که ورودی ایمپالس در زمان $t = 0$ اعمال شده است مشاهده می شود که پاسخ ضربه سیستم قبل از اعمال ورودی شروع شده است. به عبارت دیگر سیستم قادر به پیش بینی ورودی است. چنین سیستمی را غیر علی گویند و هیچ سیستم واقعی این خاصیت را ندارد بنابراین فیلتر پایین گذر ایده آل از نظر فیزیکی تحقق پذیر نمی باشد.

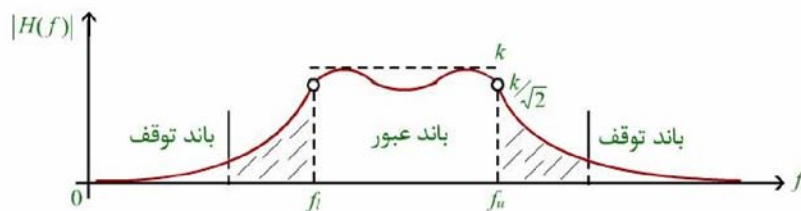
به روش مشابه سایر فیلتر های ایده آل نیز از نظر فیزیکی تحقق پذیر نمی باشند .



پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر اگر به صورت $h(t)u(t)$ باشد، در این صورت فیلتر مذکور را عملاً می توان بوجود آورد. با این وجود مشخص است که این فیلتر مشخصه ایده آل نداشته و در سیگنال ورودی با پهنای باند B ، ایجاد اعوجاج خواهد کرد. البته اگر t_d به اندازه کافی افزایش یابد تقریب بهتری از فیلتر ایده آل بدست می آید. با توجه به شکل پاسخ ضربه یک فیلتر ایده آل، اگر t_d دو یا سه برابر $\frac{1}{2B}$ منظور شود $h(t)u(t)$ تا حد قابل قبولی به $h(t)$ شبیه بوده و فیلتر ایده آل پایین گذر تقریباً محقق خواهد گردید.



در ادامه اندکی به تفاوت بین فیلترهای ایده آل و واقعی می پردازیم. در شکل تابع تبدیل یک فیلتر میان گذر واقعی مشاهده می شود.



از نظر مقایسه با فیلتر میان گذر ایده آل، باند عبور این فیلتر باند فرکانسی است که در آن $|H(f)|$ نسبتاً بزرگ است ولی ثابت نیست و باند توقف آن باند فرکانسی است که در آن $|H(f)|$ کاملاً کوچک است ولی صفر نیست. نقاط انتهایی باند عبور معمولاً بصورت زیر تعریف می شوند.

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f)|_{\max} = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad f = f_L \text{ and } f = f_u$$

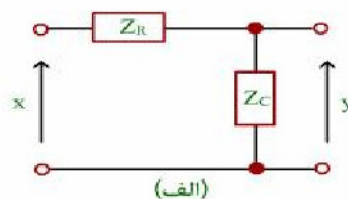
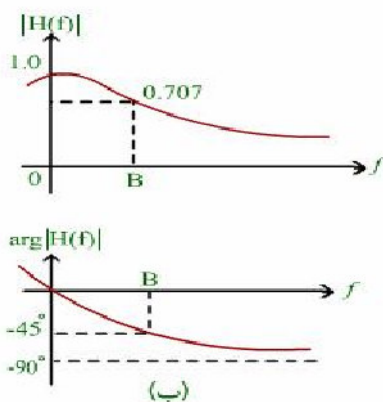
با توجه به تعریف فوق مقدار $|H(f)|^2$ در فاصله فرکانسی $f_L \leq f \leq f_u$ از $\frac{k^2}{2}$ کمتر نخواهد بود. این پهنای باند را پهنای باند نصف توان یا پهنای باند $3dB$ می نامند. همچنین نقاط انتهایی باند های توقف را در نقاطی در نظر می گیرند که دامنه $|H(f)|$ مقدار مناسب کوچک و اختیاری مانند $\frac{k}{10}$ یا $\frac{k}{100}$ یا ... را داشته باشد. بین باند عبور و باند توقف نواحی گذر قرار دارند که در شکل با هاشور مشخص شده اند. در این ناحیه فیلتر، مؤلفه های فرکانسی را نه به طور کامل عبور می دهد و نه به طور کامل حذف می کند. بنابر این فیلتر کردن مؤثر یک سیگنال اغلب مستلزم داشتن فیلتری با نواحی گذر بسیار باریک است.

ساده ترین نوع فیلتر استاندارد، فیلتر پائین گذر باترورث مرتبه n ام است که مدار آن از عناصر راکتیو سلف و خازن تشکیل شده است.

قدر مطلق تابع تبدیل این فیلتر به ازاء $k = 1$ به صورت زیر است:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^{2n}}}$$

فیلتر باترورث مرتبه اول، مشخصه فرکانسی مشابه مشخصه فیلتر RC پایین گذر داشته و تقریب ضعیفی از فیلتر پائین گذر ایده آل است. با این وجود با افزایش n که سبب اضافه کردن عناصر بیشتری به مدار فیلتر می گردد، تقریب مذکور بهتر می شود. به عنوان مثال تابع تبدیل فیلتر باترورث مرتبه سوم و پاسخ ضربه آن در شکل رسم شده است.



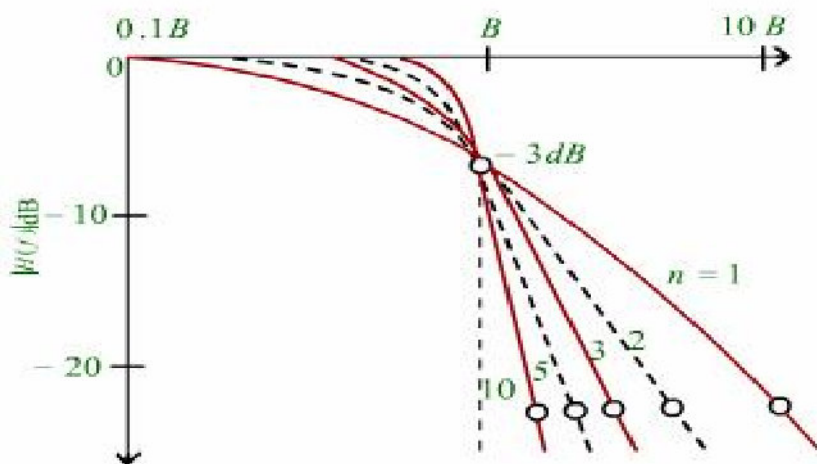
تصویر بهتر در مورد تابع تبدیل و نواحی گذر با استفاده از دیاگرام بود (که در آن $|H(f)|$ بر حسب دسی بل و محور فرکانسی با مقیاس لگاریتمی مدرج می گردد). حاصل می شود. در شکل دیاگرام بود فیلترهای پائین گذر را به ازای مقادیر مختلف n از 1 تا 10 مشاهده می کنید. اگر لبه باند توقف را در $|H(f)| = -20dB$ تعریف کنیم پهنای باند ناحیه گذر به ازاء $n = 1$ عبارت است از: $10B - B = 9B$

و به ازاء $n = 10$ برابر خواهد بود با $1 \cdot 25B - B = 0 \cdot 25B$

بدیهی است که با میل کردن n به سمت بی نهایت، $|H(f)|$ به مشخصه چهار گوش ایده آل فیلتر پایین گذر نزدیک خواهد شد ولی در عین حال شیب تغییر فاز با افزایش n افزایش یافته و در نواحی مجاور فرکانس قطع B به شکل بسیار بدی دچار اعوجاج می شود.

از طرف دیگر، فیلترهای چبی و بیضوی به ازاء مقادیر معینی از n ، باریک ترین ناحیه گذر را دارند اما قدر مطلق تابع تبدیل آنها در باند عبور دارای موجک ها یا ریبیل هایی با دامنه ی کوچک بوده و منحنی فاز $\angle H(f)$ ، به صورت قابل توجهی غیر خطی است.

فیلترها را علاوه بر مدارات پسیو می توان با استفاده از مدارهای اکتیو مانند تقویت کننده های عملیاتی نیز تحقق بخشید، که باعث عدم نیاز به استفاده از سلف های بزرگ می شود. فیلترهای طراحی شده پایین گذر را می توان با استفاده از روش هایی که ذکر آنها در غالب این درس نمی گنجد به فیلترهای میان گذر یا بالا گذر تبدیل نمود.



اعوجاج سیگنال در
اثر انتقال

اگر در یک سیستم مخابراتی نسخه قابل قبولی در گیرنده از سیگنال ارسالی دریافت شود، انتقال بدون اعوجاج بوده است.

منظور از نسخه قابل قبول، سیگنالی است که نسبت به سیگنال ارسالی یک شیفت زمانی پیدا کرده باشد و دامنه آن نیز در یک ضریب ثابت ضرب شده باشد یعنی

$$y(t) = kx(t - t_d)$$

که در آن $x(t)$ ورودی سیستم فرض شده است. در این رابطه t_d میزان تأخیر و k یک ضریب ثابت است.

اگر از طرفین این رابطه تبدیل فوریه بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y(f) &= F(y(t)) = F(kx(t - t_d)) \\ Y(f) &= kX(f)e^{-j2\pi f t_d} \end{aligned}$$

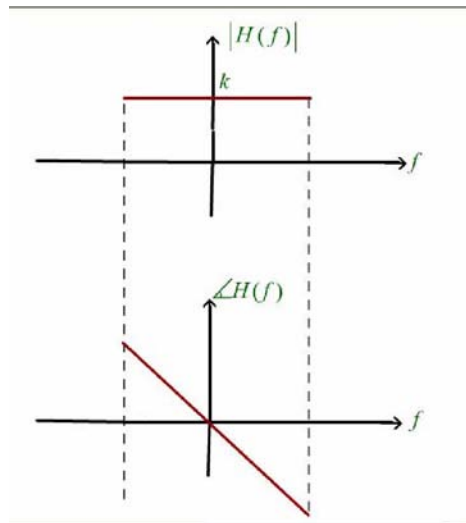
با استفاده از این رابطه، تابع تبدیل یک سیستم بدون اعوجاج عبارت خواهد بود از:

$$H(f) = ke^{-j2\pi f t_d}$$

که دامنه و فاز آن را به صورت جداگانه می توان نوشت:

$$\begin{aligned} |H(f)| &= k \\ \angle H(f) &= -2\pi f t_d \end{aligned}$$

بنابر این در یک سیستم بدون اعوجاج، پاسخ فرکانسی دامنه ثابت و پاسخ فرکانسی تغییر فاز آن، خطی با شیب منفی است. این مورد در شکل نشان داده شده است.



انواع مختلف
اعوجاج

اعوجاج را می توان به دو دسته کلی خطی و غیر خطی تقسیم بندی نمود.

اعوجاج خطی بر دو نوع است: ۱- اعوجاج دامنه ۲- اعوجاج فاز
در مورد اعوجاج دامنه دیگر، اندازه ی تابع تبدیل سیستم، یک عدد ثابت نیست، اما فاز آن همچنان خطی است.

$$\begin{aligned} |H(f)| &\neq k \\ \angle H(f) &= -2\pi f t_d \end{aligned}$$

در اعوجاج فاز، فاز تابع تبدیل دیگر خطی نمی باشد، $\angle H(f) \neq -2\pi f t_d$

اما مشخصه دامنه ثابت است. $|H(f)| = k$

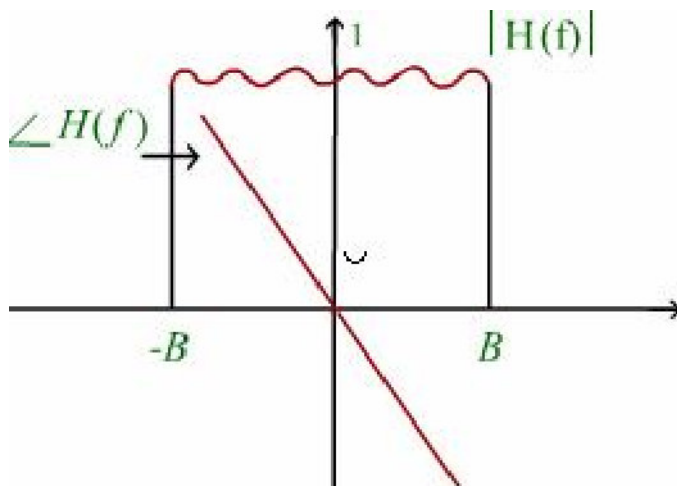
اعوجاج غیر خطی نیز در اثر عبور سیگنال از یک سیستم غیر خطی بوجود می آید که در ادامه به توضیح آن خواهیم پرداخت.

بررسی اعوجاج
دامنه

اگر یک سیگنال سینوسی با دامنه بسیار کوچک ε را با اندازه تابع تبدیل یک سیستم مخابراتی که اعوجاج دامنه ندارد جمع کنیم، اعوجاج حاصل می شود. یعنی :

$$H(f) = [1 + \varepsilon \cos 2\pi f\tau] e^{-j2\pi f t_d} = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

تابع کسینوسی را به صورت نمایی نوشته و از رابطه $H(f)$ تبدیل فوری معکوس می گیریم:



$$H(f) = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} e^{-j2\pi f\tau} + \frac{\varepsilon}{2} e^{j2\pi f\tau} \right\} =$$

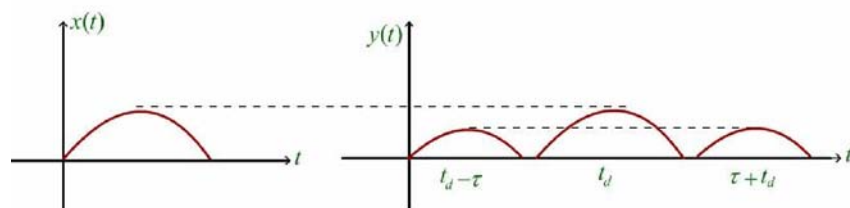
$$e^{-j2\pi f t_d} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-j2\pi f(\tau + t_d)} + \frac{\varepsilon}{2} e^{-j2\pi f(t_d - \tau)}$$

$$h(t) = \delta(t - t_d) + \frac{\varepsilon}{2} \delta(t - (\tau + t_d)) + \frac{\varepsilon}{2} \delta(t - (t_d - \tau))$$

خروجی چنین سیستمی برای ورودی $x(t)$ عبارت خواهد شد از :

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t - t_d) + \frac{\varepsilon}{2} x(t - (\tau + t_d)) + \frac{\varepsilon}{2} x(t - (t_d - \tau))$$

از رابطه فوق مشخص است که خروجی $y(t)$ ، علاوه بر یک نمونه تأخیر یافته از سیگنال ورودی دارای دو پژواک کوچک نیز می باشد.



اعوجاج فاز

حال فرض کنید یک سیگنال سینوسی با دامنه کوچک با فاز سیستم بدون اعوجاج

جمع شود، یعنی:

$$H(f) = ke^{-j2\pi ft_d} e^{-j\epsilon 2\pi ft_d} = ke^{-j2\pi ft_d} [1 - j\epsilon \sin 2\pi f\tau + \dots]$$

$$= ke^{-j2\pi ft_d} - \frac{k\epsilon}{2} e^{-j2\pi f(t_d - \tau)} + \frac{k\epsilon}{2} e^{-j2\pi f(t_d + \tau)}$$

در این رابطه از محاسبات میانی صرف نظر شده است.

با تبدیل فوریه معکوس گرفتن از $H(f)$ پاسخ ضربه چنین سیستمی بدست خواهد آمد:

$$h(t) = k \left[\delta(t - t_d) - \frac{\epsilon}{2} \delta(t - t_d + \tau) + \frac{\epsilon}{2} \delta(t - t_d - \tau) \right]$$

و نهایتاً پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ عبارت است از:

$$y(t) = k \left[x(t - t_d) - \frac{\epsilon}{2} x(t - t_d + \tau) + \frac{\epsilon}{2} x(t - t_d - \tau) \right]$$

از این رابطه نیز دیده می شود که اعوجاج فاز باعث ایجاد پژواک در خروجی سیستم می شود. در اینجا یک سؤال مطرح می شود، آیا راهی برای مقابله با اعوجاج های مذکور وجود دارد؟ پاسخ به این سؤال مثبت است.

از نظر تئوری، اعوجاج خطی دامنه و فاز را می توان با استفاده از مدار های متعادل کننده (equalizer) ها از بین برد.

فرض کنید متعادل کننده ای با تابع تبدیل $H_{eq}(f)$ با کانال انتقال دارای اعوجاج، $H_c(f)$ سری است. در این صورت تابع تبدیل کلی سیستم عبارت است از:



$$H(f) = H_c(f)H_{eq}(f)$$

این سیستم زمانی بدون اعوجاج خواهد بود که:

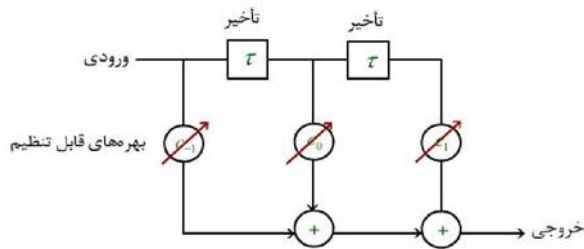
$$H_c(f)H_{eq}(f) = ke^{-j\omega t_d}$$

k, τ_d مقادیر اختیاری هستند.

بنابر این تابع تبدیل متعادل کننده عبارت خواهد بود از:

$$H_{eq}(f) = \frac{ke^{-j\omega t_d}}{H_c(f)}$$

یکی از انواع متعادل کننده ها ، خط تأخیر انشعابی یا فیلتر ترنسورسال است که در شکل یک نمونه از آن با سه انشعاب نشان داده شده است.



خروجی این فیلتر عبارت است از:

$$y(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \tau) + c_1x(t - 2\tau)$$

که با توجه به شکل به سادگی قابل درک است. بدین ترتیب تابع تبدیل چنین فیلتری به شکل

$$H_{eq}(f) = c_{-1} + c_0e^{-j\omega\tau} + c_1e^{-j\omega 2\tau}$$

که می تواند به صورت زیر نیز نوشته شود:

$$H_{eq}(f) = (c_{-1}e^{j\omega\tau} + c_0 + c_1e^{-j\omega\tau})e^{-j\omega\tau}$$

اگر فیلتر از $2M$ مدار تأخیر و $2M + 1$ ضرب کننده تشکیل شده باشد رابطه تابع تبدیلش عبارت خواهد بود از:

$$H_{eq}(f) = \left[\sum_{m=-M}^M c_m e^{-j\omega_m\tau} \right] e^{-j\omega\tau}$$

برای آشنایی با نحوه استفاده از اکولایزر در ترمیم اعوجاج یک کانال به ترمیم اعوجاج کانالی با خروجی

$$y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2)$$

که در آن جمله دوم بیانگر پژواک جمله اول است، می پردازیم.

فرض می کنیم $t_2 > t_1$ باشد.

تابع تبدیل چنین کانالی عبارت است از :

$$H_c(f) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2} = k_1 e^{-j\omega t_1} (1 + k e^{-j\omega t_0})$$

$$t_0 = t_2 - t_1, k = \frac{k_2}{k_1} \quad \text{که در آن}$$

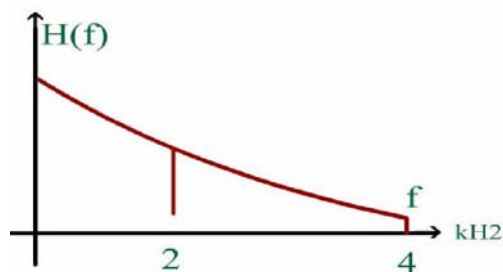
اگر تابع تبدیل متعادل کننده به صورت $H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + k e^{-j\omega t_0}}$ باشد این اعوجاج بر طرف خواهد شد. این تابع تبدیل را با استفاده از بسط دو جمله ای، بسط می دهیم:

$$H_{eq}(f) = 1 - k e^{-j\omega t_0} + k^2 e^{-j\omega 2t_0} + \dots = e^{-j\omega t_0} [e^{j\omega t_0} - k + k^2 e^{-j\omega t_0}]$$

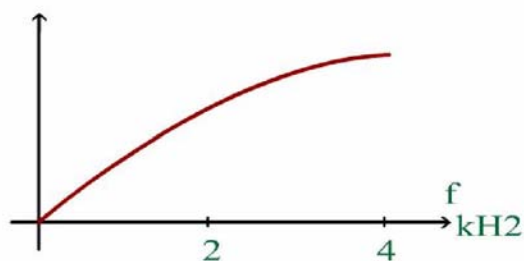
از مقایسه این رابطه با فیلتر ترنسورسال ضرایب انشعاب ها و میزان تأخیر به صورت زیر به دست می آیند:

$$c_{-1} = 1, c_0 = -k, c_1 = k^2, \tau = t_0$$

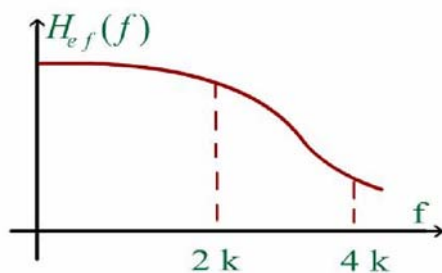
توجه داریم که در تعریف این متعادل کننده از جملات مرتبه بالاتر با تقریب صرف نظر شده است. مثال دیگری از کاهش میزان اعوجاج، بوبینه کردن خطوط انتقال سیگنال تلفنی، به صورت زیر است.



پاسخ یک خط انتقال معمولی تلفن در شکل نشان داده شده می باشد. معمولاً در فواصل مشخصی از خط یک بوبین (سلف) قرار می دهند، که دارای پاسخی به شکل زیر است:

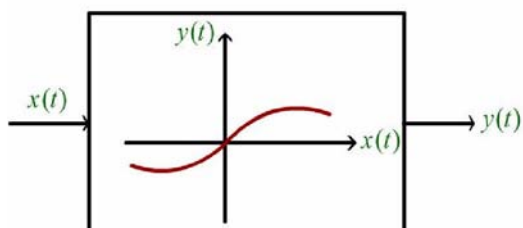


نتیجه حاصل در اثر اضافه کردن یک بوبین به خط انتقال سیگنال تلفنی در شکل نشان داده شده است که از خط غیر بوبینه شده دارای تابع تبدیل یکنواخت تری است. بنا بر این میزان اعوجاج آن کمتر است.



اعوجاج
غیر خطی

برای سیستم هایی با عناصر غیر خطی، تابع تبدیل قابل تعریف نمی باشد. در این نوع سیستم ها جهت توصیف عملکرد سیستم، از مشخصه تبدیل که ارتباط بین مقادیر لحظه ای ورودی و خروجی سیستم را به صورت منحنی یا تابع بیان می کند، استفاده می شود. شکل زیر نمونه ای از مشخصه تبدیل یک مدار غیرخطی را نشان می دهد.



تقریب چند جمله ای منحنی مذکور در حالت کلی به شکل زیر خواهد بود.

$$y(t) = a_1 X(t) + a_2 X^2(t) + a_3 X^3(t) + \dots$$

جملات مرتبه بالای عبارت مذکور، سبب اعوجاج غیرخطی می شوند. منظور جملات بالاتر از درجه یک است با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین رابطه بالا داریم:

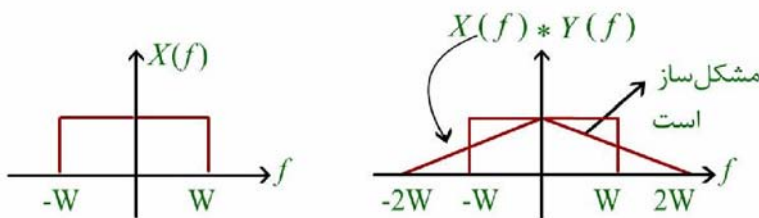
$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X(f) * X(f) + a_3 X(f) * X(f) * X(f) + \dots$$

اگر پهنای باند $X(f)$ برابر با W باشد.

پهنای باند $X(f) * X(f)$ ، $2W$ و پهنای باند

$X(f) * X(f) * X(f)$ ، $3W$ و ... خواهد بود

بنابراین پهنای باند افزایش یافته است. قسمتی از پهنای باند افزایش یافته که در پهنای باند سیگنال اصلی قرار دارد مشکل ساز خواهد بود و با فیلتر کردن قابل حذف نمی باشد.



معمولاً برای بررسی گمی اعوجاج غیر خطی ورودی $x(t) = \cos \omega_0 t$ را به مدار غیر خطی اعمال می کنند. در این صورت خروجی برابر خواهد بود با:

$$y(t) = \left(\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \dots \right) + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots \right) \cos \omega_0 t + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots \right) \cos 2\omega_0 t + \dots$$

با توجه به این عبارت، اعوجاج غیر خطی به صورت هارمونیک های موج ورودی ظاهر می شود.

مقدار اعوجاج هارمونیک دوم، نسبت دامنه این جمله به دامنه جمله اصلی است.

$$\text{اعوجاج هارمونیک دوم} = \left| \frac{\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots}{a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots} \right| \times 100\%$$

بدیهی اعوجاج هارمونیک های مراتب بالاتر به روش مشابه قابل تعریف می باشد.

اگر ورودی مدار غیرخطی مجموع دو موج کسینوسی باشد، $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \dots$ ، خروجی شامل کلیه هارمونیک های f_1 و f_2 بوده و علاوه بر این جملات حاصلضربی، فرکانس های

$f_1, f_2 - f_1, f_2 + f_1, 2f_2$ و ... در حالت کلی $\pm mf_2 \pm nf_1$ نیز در خروجی ظاهر خواهند شد.

فرکانس های مجموع و تفاضل را اعوجاج انتر مدولاسیون می نامند.

اگر چه راه حل کاملی برای مشکل اعوجاج غیرخطی وجود ندارد ولی با طراحی دقیق و خاص آن می توان مقدار آن را به حداقل رساند. هدف اصلی در طراحی مذکور، اطمینان از این امر است که سیگنال از گستره خطی مشخصه تبدیل کانال تجاوز ننماید. شکل زیر سیستمی را که در آن با استفاده از دو پردازشگر غیر خطی سیگنال به نام کمپرسور (compressor) در ورودی و اکسپندر (expander) در خروجی، اعوجاج غیر خطی را به حداقل می رساند نشان می دهد.



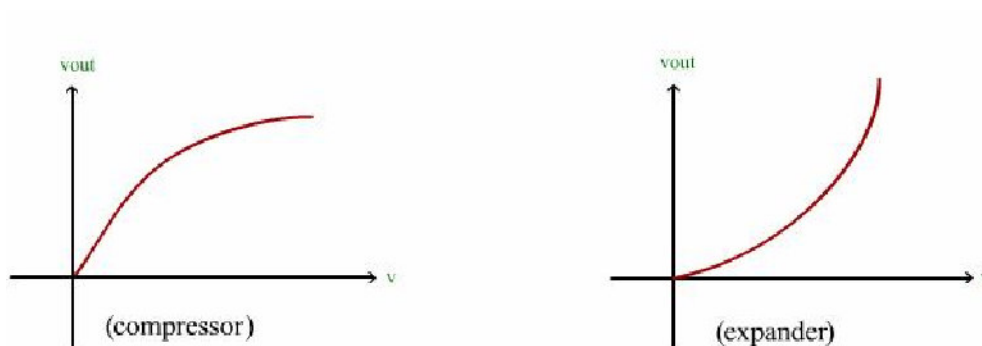
کمپرسور در سطوح پایین سیگنال، ضریب تقویت بیشتری نسبت به سطوح بالای سیگنال داشته و در نتیجه گستره سیگنال ورودی را فشرده می کند.

اگر سیگنال فشرده شده در گستره خطی کانال قرار بگیرد، سیگنال خروجی کانال با $T_{comp}[x(t)]$ متناسب است. این سیگنال تحت تاثیر کانال دچار اعوجاج نشده است، بلکه اعوجاج آن به کمپرسور مربوط است. T_{comp} تابع تبدیل کمپرسور فرض شده بطور ایده آل اکسپندر مشخصه ای دارد که مکمل کمپرسور است و خروجی آن برای سیگنال وارد شونده از کمپرسور، خود سیگنال است، یعنی:

$$T_{exp}[T_{comp}[x(t)]] = x(t)$$

سیستمی که دو پدیده کمپرسور و اکسپندر را با هم بکار می بندد، کمپندر **componder** نامیده می شود، که در شبکه های تلفنی اهمیت زیادی دارد.

کامپندر علاوه بر کاهش اعوجاج غیر خطی، اختلاف سطح سیگنال بین دو صدای بلند و نازک را جبران و ترمیم می نماید. این ویژگی دوم کامپندر سبب ارجحیت عمده آن نسبت به روش ساده ی تضعیف سیگنال در ورودی (به منظور نگه داشتن آن در گستره ی خطی کانال و تقویت خطی آن در خروجی می شود. مشخصه های کمپرسور و اکسپندر در شکل نشان داده شده اند.



سیستم های
میان گذر

در بدست آوردن پاسخ یک سیستم میان گذر به سیگنال میان گذر ورودی، راه کلاسیک استفاده از روش های توضیح داده شده در بدست آوردن پاسخ یک سیستم به سیگنال ورودی با استفاده از تابع تبدیل یا پاسخ ضربه می باشد. اما به علت سنگینی محاسبات در این حالت، می توان با برقراری شباهتی بین سیستم های پایین گذر و میان گذر، سیستم های میان گذر را تا حد زیادی ساده تر و آسان تر تحلیل کرد. اساس این روش استفاده از تبدیل هیلبرت برای نمایش و بیان سیگنال های میان گذر است. در این راستا از مفهوم مؤلفه های هم فاز و تربیعی یک سیگنال و همچنین پوش مختلط آن استفاده می شود. سیگنال ورودی را می توان بر حسب مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن نشان داد.

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_c t - x_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

$x_c(t)$ مؤلفه هم فاز و $x_s(t)$ مؤلفه تربیعی سیگنال $x(t)$ است و با پوش مختلط $\tilde{x}(t)$ به صورت زیر مربوط است.

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

پاسخ ضربه را هم بر حسب مولفه های هم فاز و تربیعی اش یعنی $h_c(t)$ و $h_s(t)$ بیان می کنیم:

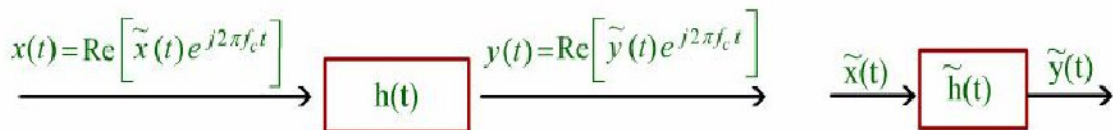
$$h(t) = 2h_c(t) \cos 2\pi f_c t - 2h_s(t) \sin 2\pi f_c t$$

ضریب ۲ باعث سادگی رابطه نهایی بدست آمده می شود.
از طرفی می توانیم هر سیگنال را به صورت قسمت حقیقی پوش مختلط آن ضرب در $e^{j2\pi f_c t}$ بنویسیم:
یعنی:

$$x(t) = \text{Re} \left[\hat{x}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$y(t) = \text{Re} \left[\hat{y}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

با انجام مقداری عملیات ریاضی که از ذکر آن خود داری می شود می توانیم سیستمی با ورودی میان گذر $x(t)$ پاسخ ضربه $h(t)$ و خروجی $y(t)$ را به صورت یک سیستم پایین گذر با ورودی $\tilde{x}(t)$ پاسخ ضربه $\tilde{h}(t)$ و خروجی $\tilde{y}(t)$ تبدیل کرد.



بنابراین برای تحلیل سیستم میان گذر کافی است ابتدا پوش مختلط سیگنال ورودی و پالس ضربه را بدست آوریم. سپس از کانولوشن آنها با هم، پوش مختلط سیگنال خروجی بدست می آید و از روی آن خروجی میان گذر سیستم بدست خواهد آمد. پوش سیگنال مختلط ورودی و پاسخ ضربه با سیگنال ورودی و پاسخ ضربه به صورت زیر مربوطند.

$$x(t) = \text{Re} \left[\tilde{x}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$h(t) = \text{Re} \left[2\tilde{h}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

$$y(t) = \text{Re} \left[\tilde{y}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

برای این که کاربرد روش فوق در تحلیل سیستم میان گذر روشن شود مثال زیر را مورد مطالعه قرار می دهیم.

فیلتر میانگذر ایده آلی را در نظر بگیرید که فرکانس مرکزی آن f_c و باند پاسخ دامنه آن در $f_c - B \leq |f| \leq f_c + B$ قرار داشته باشد. می خواهیم پاسخ این فیلتر را به پالس ورودی RF با پهنای زمانی T و فرکانس f_c تعیین کنیم.

$$x(t) = A\pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos 2\pi f_c t$$

به طوری که $f_c \gg 1$ با توجه به قسمت فرکانس مثبت تابع تبدیل $H(f)$ و جابجا کردن آن به مبدأ، $\tilde{H}(f)$ تابع تبدیل پایین گذرمعادل بدست می آید.

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f_0 t} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

پاسخ ضربه مختلط در این مثال فقط مؤلفه حقیقی داشته و عبارت است از:

$$\tilde{h}(t) = 2B \sin c[2B(t - t_0)]$$

قبلاً پوش مختلط پالس RF را بدست آورده بودیم که عبارت است از:

$$\tilde{x}(t) = A\pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

پوش مختلط خروجی فیلتر از کانولوشن $\tilde{h}(t)$ و $\tilde{x}(t)$ بدست می آید:
 بنابراین برای تحلیل سیستم میانگذر کافی است ابتدا پوش مختلط سیگنال ورودی و پالس ضربه را
 بدست آوریم. سپس از کانولوشن آن ها با هم پوش مختلط سیگنال خروجی بدست می آید و از
 روی آن خروجی میان گذر سیستم بدست خواهد آمد. پوش سیگنال مختلط ورودی و پاسخ ضربه
 با سیگنال ورودی و پاسخ ضربه به صورت زیر رابطه دارند.

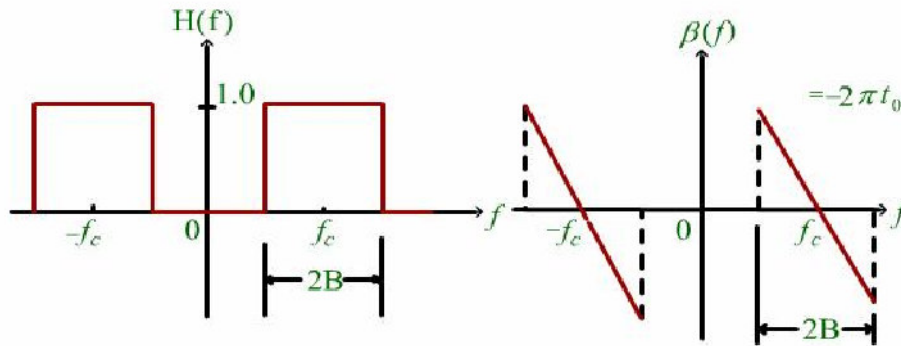
$$x(t) = \text{Re}\left[\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

$$h(t) = \text{Re}\left[2\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

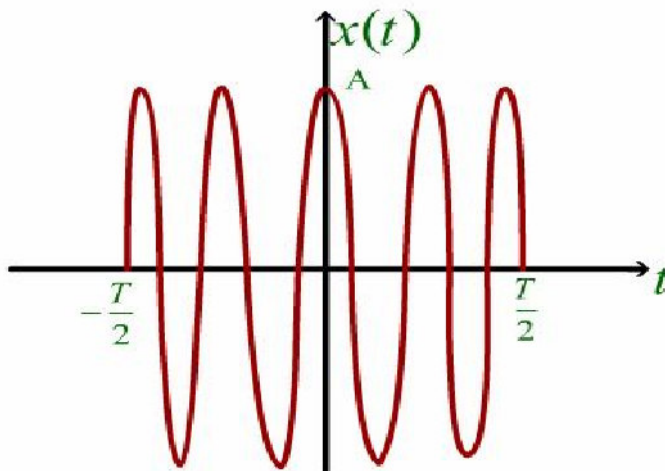
$$y(t) = \text{Re}\left[\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

برای این که کاربرد روش فوق در تحلیل سیستم میان گذر روشن شود مثال زیر را مورد مطالعه قرار می دهیم. فیلتر میان گذر ایده آلی را در نظر بگیرید که فرکانس مرکزی آن f_c و باند پاسخ دامنه آن در $f_c - B \leq |f| \leq f_c + B$ قرار داشته باشد.



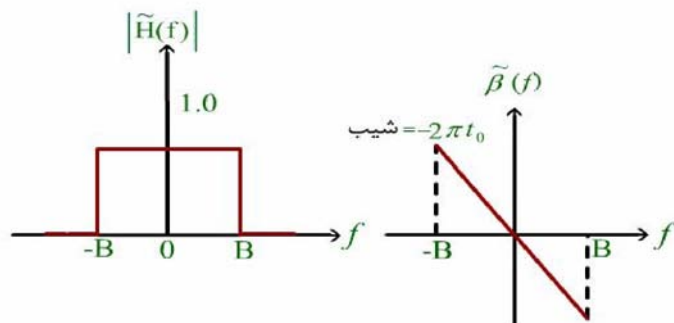
می خواهیم پاسخ این فیلتر را به پالس ورودی RF با پهنای زمانی T و فرکانس f_c تعیین کنیم.

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos 2\pi f_c t$$



به طوری که $f_c T \gg 1$

با توجه به قسمت فرکانس مثبت تابع تبدیل $H(f)$ و جابجا کردن آن به مبدا، تابع تبدیل پایین گذرمعادل بدست می آید.



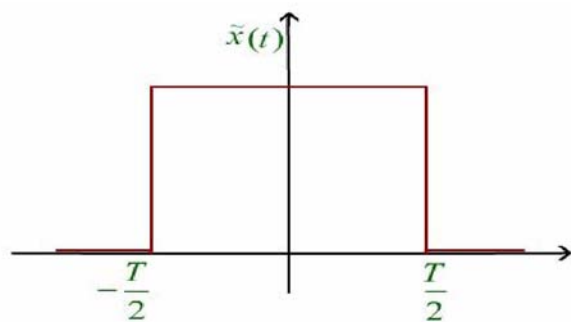
$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f t_0} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

پاسخ ضربه مختلط در این مثال فقط مولفه حقیقی داشته و عبارت است از:

$$\tilde{h}(t) = 2B \sin c[2B(t - t_0)]$$

قبلاً پوش مختلط پالس RF را بدست آورده بودیم که عبارت است از:

$$\tilde{x}(t) = A \pi \left(\frac{t}{T} \right)$$



پوش مختلط خروجی فیلتر از کانولوشن $\tilde{x}(t)$ و $\tilde{h}(t)$ بدست می آید:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t) = 2AB \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin[2\pi B(t - t_0 - \lambda)]}{2\pi B(t - t_0 - \lambda)} \cdot d\lambda$$

با تغییر متغیر $\eta = 2\pi B(t - t_0 - \lambda)$ خواهیم داشت:

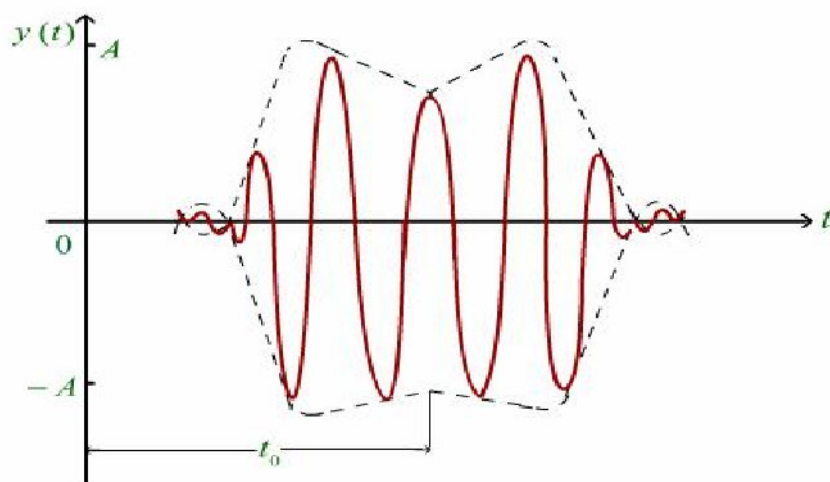
$$\tilde{y}(t) = \frac{A}{\pi} \int_{2\pi B(t - t_0 - \frac{T}{2})}^{2\pi B(t - t_0 + \frac{T}{2})} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta = \frac{A}{\pi} \{ \text{si}[2\pi B(t - t_0 + \frac{T}{2})] - \text{si}[2\pi B(t - t_0 - \frac{T}{2})] \}$$

مشاهده می شود که پیش پوش مختلط خروجی، $\tilde{y}(t)$ ، فقط مؤلفه حقیقی دارد. خروجی

$y(t)$ نیز به صورت زیر بدست می آید:

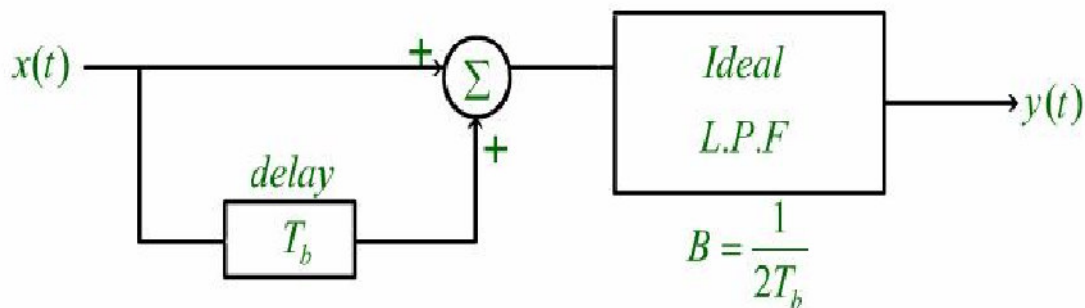
$$y(t) = \tilde{y}(t) \cos 2\pi f_c t$$

این پاسخ به ازای $B = \frac{2}{T}$ در شکل نشان داده شده است.



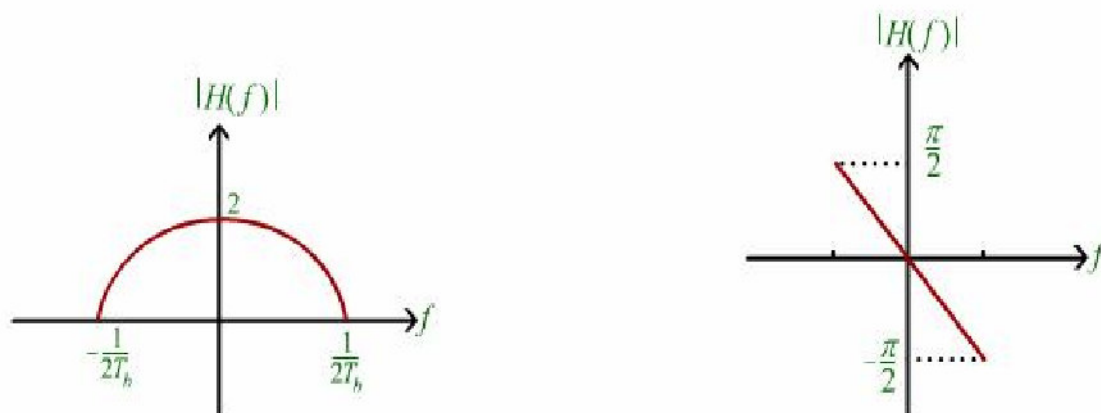
در اینجا برای روشن شدن مطالب فصل به ذکر چند مثال می پردازیم. دو مثال، مربوط به آنالیز دیگرامی و تابع تبدیل، پاسخ ضربه و چگالی طیف توان انرژی می شوند. یک مثال مفهوم نمونه برداری سیگنال باند پایه و مثال دیگر مفهوم نمونه برداری سیگنال میان گذر را شرح می دهد.

۱- پاسخ ضربه و تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورده و رسم کنید.



$$B = \frac{1}{2T_b} \text{ در حوزه ی فرکانس دارای تابع تبدیل } \pi = \frac{f}{1/T_b}$$

می باشد. تأخیر در حوزه فرکانس نیز با $e^{-j\omega T_b}$ نمایش داده می شود.



بنابراین بلوک دیاگرام حوزه فرکانسی به صورت زیر در می آید: بنابراین تابع تبدیل خواهد شد.

$$|f| \leq \frac{1}{2T_b}$$

$$H(f) = \left[1 + e^{-j\omega T_b}\right] \Pi\left(\frac{f}{\frac{1}{T_b}}\right) = e^{-j\frac{\omega T_b}{2}} \left[e^{j\frac{\omega T_b}{2}} + e^{-j\frac{\omega T_b}{2}} \right] \pi(fT_b) =$$

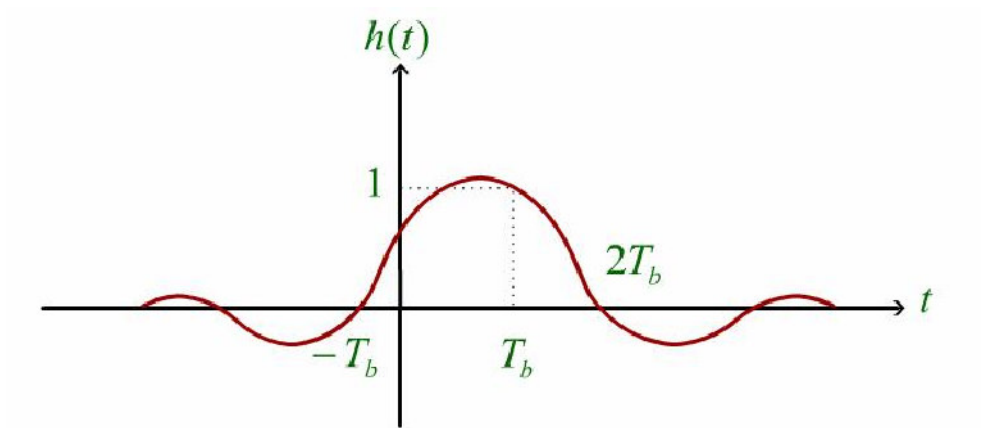
$$H(f) \begin{cases} 2 \cos(\omega \frac{T_b}{2}) e^{j\frac{\omega T_b}{2}} = 2e^{-j\omega T_b} \cos \frac{\omega T_b}{2} \cdot \pi(fT_b) \\ 0 \end{cases}$$

اگر ساده شده این تابع را بنویسیم خواهیم داشت:

چگالی این تابع تبدیل را به صورت دامنه و فاز مشاهده می کنید. اگر از تابع تبدیل، تبدیل فوریه معکوس بگیریم پاسخ ضربه بدست می آید.

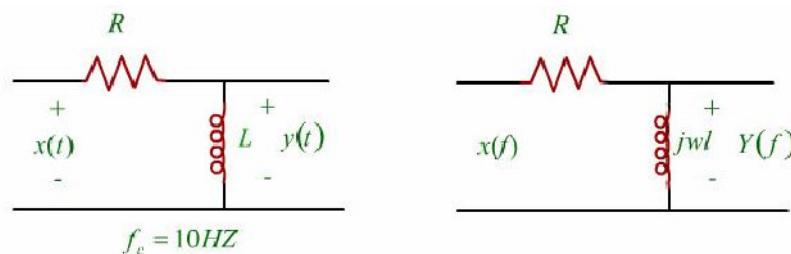
$$h(t) = F^{-1} \left[(1 + e^{-j\omega T_b}) \cdot \pi \left(\frac{f}{\frac{1}{T_b}} \right) \right] = [\delta(t) + \delta(t - T_b)] * \frac{1}{T_b} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T_b} \right)$$

$$= \frac{1}{T_b} \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T_b} \right) + \frac{1}{T_b} \operatorname{sinc} \left(\frac{t - T_b}{T_b} \right)$$



۲: اگر سیگنال ورودی فیلتر بالاگذر نشان داده شده

باشد، $x(t) = 1 + \cos 20\pi t + 0.5 \sin 80\pi t$ ، $R_y(\tau)$ ، $h(f)$ ، $h(t)$ (خود بستگی خروجی) و $S_y(f)$ (چگالی طیفی خروجی) را بدست آورید.



اگر مدار فیلتر بالا گذر نشان داده شده را در حوزه فرکانس، دوباره رسم کنیم تابع تبدیل آن عبارت خواهد بود از

$$H(f) = \frac{jwL}{R + jwL} = \frac{jwL/R}{1 + jwL/R} = \frac{1}{1 - j \frac{R}{wL}} = \frac{1}{1 - j(\frac{f_c}{f})^*}$$

$$f_c = \frac{R}{2\pi L} = 10 \text{ Hz}$$

برای بدست آوردن پاسخ ضربه می توان از پاسخ پله مدار که از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار بدست می آید، مشتق زمانی گرفت.

پاسخ پله مدار فوق عبارت است از $u(t) e^{-\frac{R}{L}t}$. بدین ترتیب پاسخ ضربه آن عبارت خواهد بود از:

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{-\frac{R}{L}t} u(t) \right] = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

وچگالی طیفی سیگنال انرژی ورودی عبارت است از:

$$S_x(f) = \delta(f) + \frac{1}{4} \delta(f \pm 10) + \frac{(0-5)^2}{4} \delta(f \pm 40)$$

چگالی طیف انرژی خروجی نیز از حاصل ضرب $s_x(f)$ در اندازه تابع تبدیل به توان ۲ بدست می آید:

$$S_y(f) = s_x(f) |H(f)|^2 =$$

$$|H(10)|^2 \delta(f) + \frac{1}{4} |H(10)|^2 \delta(f \pm 10) + \frac{1}{16} |H(40)|^2 \delta(f \pm 40)$$

که از ساده کردن این عبارت خواهیم داشت:

$$S_y(f) = \frac{1}{8} \delta(f \pm 10) + \frac{1}{17} \delta(f \pm 40)$$

خودبستگی خروجی نیز عبارت است از:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{4} \cos 20\pi\tau + \frac{2}{17} \cos 80\pi\tau$$

۳: سیگنال $g(t)$ با طیف $G(f)$ را در نظر بگیرید. این سیگنال را با یک قطار پالس نمونه برداری می کنیم. اگر نرخ نمونه برداری 20Hz (سرعت نایکوئیست) باشد طیف خروجی را بدست آورده و رسم کنید. این کار را برای نرخ نمونه برداری 10Hz نیز انجام دهید. سیگنال خروجی این سیستم در حوزه زمان را می توان به صورت زیر نوشت :

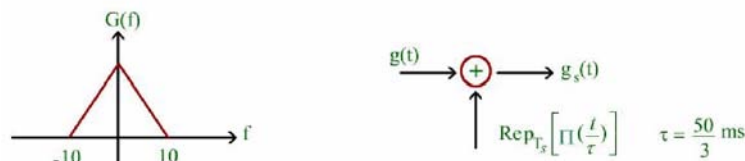
$$g_s(t) = g(t) \text{Re p}_{T_s} \left[\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

اگر از رابطه فوق تبدیل فوریه بگیریم و از خواص تبدیل فوریه استفاده کنیم، طیف خروجی بدست خواهد آمد که عبارت است از:

$$G_s(f) = G(f) * f_s \text{comb}_{f_s} [\tau \sin c(f\tau)]$$

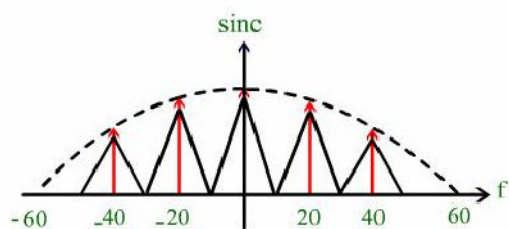
بنابراین از تابع سینک در فاصله های فرکانسی f_s نمونه برداری شده و طیف $G(f)$ به علت

کانوالوشدن با این نمونه های ضربه به حول آنها انتقال می یابد.

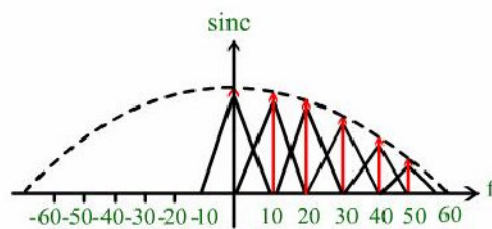


اگر نمونه برداری با فرکانس 20Hz یعنی سرعت نایکوئیست انجام شود، فاصله مراکز طیف از یکدیگر 20 هرتز خواهد بود و چون پهنای باند سیگنال باند پایه 10 هرتز و پهنای باند سیگنال میانگذر آن 20Hz می باشد. تداخلی بین نمونه های ایجاد شده اتفاق نمی افتد. اما اگر نرخ نمونه برداری کمتر از این باشد نمونه ها با یکدیگر همپوشانی خواهند داشت، که نمونه آن برای فرکانس نمونه برداری 10Hz نشان داده شده است. با توجه به این شکل طیف سیگنال اصلی به علت تداخل با نونه کناری با فیلتر کردن قابل استخراج نمی باشد.

اما طیف سیگنال در حالتی که نمونه بردای با فرکانس 20Hz یعنی نرخ نایکوئیست انجام شده باشد، با استفاده از یک فیلتر قابل جداسازی است.

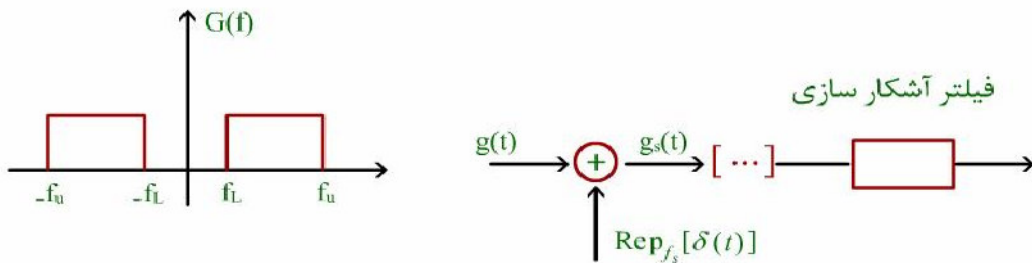


$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{50}{3} \text{ ms}} = 60\text{Hz} \quad f_s = 20\text{Hz}$$



$$f_s = 10\text{Hz}$$

۴: حداقل فرکانس نمونه برداری یک سیگنال میان گذر را بدست آورید.



فرض کنید طیف سیگنال میان گذر $G(f)$ باشد اگر بخواهیم سیگنال زمانی این طیف را نمونه برداری کنیم آن را از سیستم زیر عبور می دهیم فرکانس نمونه برداری f_s است و در نهایت باید از یک فیلتر برای بدست آوردن سیگنال اصلی استفاده کنیم. اگر این فیلتر یک فیلتر پایین گذر باشد فرکانس قطع مورد نیاز f_u خواهد بود. f_u در شکل نشان داده شده است، در نتیجه حداقل فرکانس نمونه برداری نرخ نایکوئیست یعنی دو برابر بالاترین مؤلفه فرکانسی ($2f_u$) خواهد بود. اما اگر از فیلتر میان گذر استفاده شود وضعیت متفاوت می باشد. برای بدست آوردن حداقل فرکانس نمونه برداری در این در حالت طیف $g_s(t)$ را می نویسیم:

$$g_s(t) = g(t) \cdot \text{Rep}_{T_s}[\delta(t)] \xleftrightarrow{F} G_s(f)$$

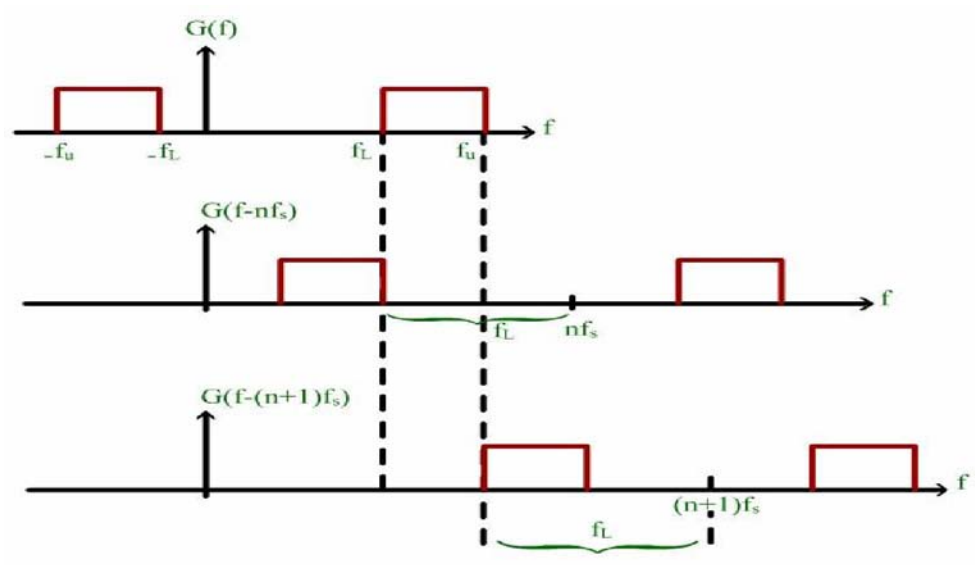
$$= G(f) * \frac{1}{T_s} \text{comb}_{\frac{1}{T_s}}[1] = f_s G(f) * \text{Rep}_{f_s}[\delta(t)]$$

و در نهایت طیف $G_s(f)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

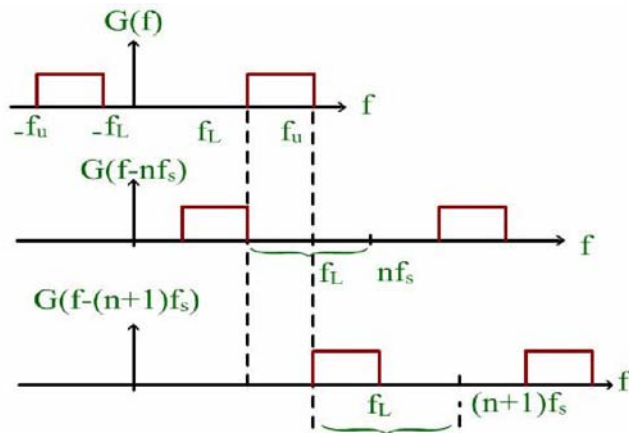
$$G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s)$$

اگر طیف دو مؤلفه ی $G(f - nf_s)$ و $G(f - (n+1)f_s)$ را رسم کنیم .

می توان شرط لازم برای عدم تداخل طیف سیگنال نمونه برداری شده را بدست آورد.



با توجه به شکل $G(f - nf_s)$ ، بالاترین فرکانس قسمت پایین طیف، باید قبل از فرکانس f_L قرار بگیرد.



یعنی $nf_s - f_L \leq f_L$ ، که منجر به شرط $f_s \leq \frac{2f_L}{n}$ برای فرکانس نمونه برداری می شود.

همچنین پایین ترین مؤلفه فرکانسی طیف $G(f - (n+1)f_s)$ باید از f_u بیشتر باشد، تا تداخلی حاصل نشود، یعنی:

$$(n+1)f_s - f_u \geq f_u \Rightarrow f_s \geq \frac{2f_u}{n+1}$$

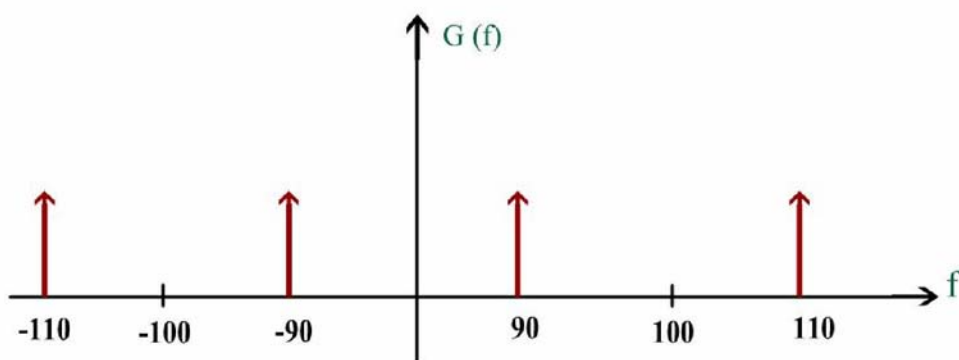
بنابراین بازه ی مورد قبول برای فرکانس نمونه برداری (f_s) بدست می آید:

$$\frac{2f_u}{n+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{n}$$

اگر فرض کنیم سیگنال $g(t) = \cos 20\pi t \cos 200\pi t$ را می خواهیم نمونه برداری کنیم با توجه به طیف این سیگنال که شامل دو ضربه در فرکانس های ۹۰ و ۱۱۰ هرتز است، استفاده از فیلتر پایین گذر حداقل فرکانس نمونه برداری را به $2 * f_u$ یعنی $2 * 110 = 220$ هرتز محدود می کند. اما اگر برای بدست آوردن سیگنال اصلی از روی طیف سیگنال نمونه برداری شده، از فیلتر میان گذر استفاده شود، از رابطه ی f_s برای $n = 4$ خواهیم داشت:

$$\frac{2 * 110}{4 + 1} \leq f_s \leq \frac{2 * 90}{4} \Rightarrow 44 \leq f_s \leq 45$$

برای n های بزرگتر از ۴ ، نامساوی f_s برقرار نخواهد بود . در بازه ی بدست آمده برای f_s در حالت $n=4$ می توان فرکانس نمونه برداری را ۴۴ هرتز انتخاب کرد.
این فرکانس نمونه برداری بسیار کمتر از فرکانس نمونه برداری در حالت پایین گذر یعنی ۲۲۰ هرتز می باشد.



در قسمت های گذشته، تحلیل سیگنال های یقینی و انتقال آنها توسط سیستم ها و فیلترهای خطی بررسی شد. منظور از سیگنال های یقینی، گروه و طبقه ای از سیگنال ها می باشند، که می توان آنها را به صورت توابع زمانی مشخص بیان و توصیف کرد. به هر حال طبقه مهم دیگری از سیگنال ها بنام سیگنال های تصادفی وجود دارند، که در هر سیستم مخابراتی واقعی مطرح می شوند. سیگنالی را تصادفی می نامیم که پیش بینی مقدار دقیق آن، قبل از وقوع و ظهور سیگنال امکان پذیر نباشد.

پیشامدهای تصادفی را می توان به سه دسته تقسیم کرد:

$$P(A) = 1$$

۱- حتمی: که در آن احتمال وقوع پیشامد A ، برابر یک است:

$$P(A) = 0$$

۲- غیر ممکن: دهد که در آن احتمال وقوع پیشامد صفر است.

۳- تصادفی: در این حالت پیشامد گاهی رخ می دهد و گاهی رخ نمی دهد. در این حالت:

$$0 < P(A) < 1$$

فرض کنید n_A ، تعداد دفعاتی باشد که پیشامد A رخ می دهد و n تعداد کل آزمایشات انجام شده باشد.

فرکانس رخ داد پیشامد A را به صورت نسبت $\frac{n_A}{n}$ تعریف می کنیم.

این فرکانس وقتی که تعداد آزمایشات به سمت بی نهایت میل کند ($n \rightarrow \infty$) احتمال A را نشان می دهد.

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

پیشامدهای تصادفی را می توان از یک جنبه دیگر، دسته بندی کرد.

۱- پیشامد مستقل : که در آن $p(B|A) = p(A)$ یا $p(B|A) = p(B)$ می باشد.

۲- پیشامد سازگار: در این حالت $0 < P(AB) < 1$ است.

۳- پیشامد نا سازگار: که در آن $P(AB) = 0$ است.

اگر A ، C و B پیشامدهای تصادفی باشند، روابط زیر را می توان برای احتمال وقوع این پیشامدها نوشت:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

احتمالات
مشروط

$$p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)} \quad \text{یا} \quad p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$$

$$p(AB) = p(B|A).p(A) = p(A|B).p(B)$$

$$p(ABC) = p(A).p(B|A).p(C|AB) \text{ ChianRule}$$

$$p(A|B) = \frac{p(B|A).p(A)}{p(B)}; p(B) \neq 0 \text{ BaysRule}$$

متغیرهای
تصادفی

متغیری را تصادفی گویند، که مقداری که اختیار می کند متغیر باشد.

متغیرهای تصادفی به دو دسته پیوسته و گسسته تقسیم می شوند.

از سه روش برای تحلیل متغیرهای تصادفی استفاده می شود.

۱- تابع توزیع احتمال Cumulative Distribution Function

۲- تابع چگالی احتمال Probability Density Function(PDF)

استفاده از توابع احتمال

۱ - میانگین
 ۲ - واریانس
 ۳ - گشتاور

۲- استفاده از متوسط های آماری

۱- یکنواخت
 ۲- دو جمله ای
 ۳ - پواسن
 ۴- نرمال

۳- استفاده از مدل های احتمال

تابع توزیع
تجمعی (CDF)

تابع توزیع تجمعی (CDF) یک متغیر تصادفی مانند X که به صورت $F_X(x)$ نشان داده می شود، عبارت است از، این که متغیر تصادفی X ، مقدار کوچکتر یا مساوی با X را اختیار کند، یعنی:

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

می توان نشان داد تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ دارای خواص زیر است :

$$1) F_X(x) \geq 0$$

$$2) F_X(\infty) = 1$$

$$3) F_X(-\infty) = 0$$

$$4) F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$$

$$5) F_X(x_2) - F_X(x_1) = p_x(x_1 \leq X \leq x_2)$$

انتقال یک پیام سه رقمی، در یک کانال نویز دار را در نظر بگیرید.

احتمال خطا در هر رقم $p(E) = \frac{2}{5}$ بوده و در نتیجه احتمال دریافت صحیح یک رقم،

$$p(c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ است.}$$

فضای نمونه، در مورد این آزمایش شامل $2^3 = 8$ طرح خطای متمایز یا نقاط نمونه می باشند.

باید توجه داشت که این نقاط نمونه متساوی الاحتمال نمی باشد.

چون $p(ccc) = p(c)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3$ در حالی که طرح خطای $p(EEE) = \left(\frac{2}{5}\right)^3$ خواهد

بود. مشابهاً هر یک از سه طرح خطا، که دارای یک رقم خطا می باشند، احتمال $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2$ داشته

و سه طرح خطایی که دارای دو رقم خطا می باشند، هر یک احتمال $\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)$ را دارا هستند.

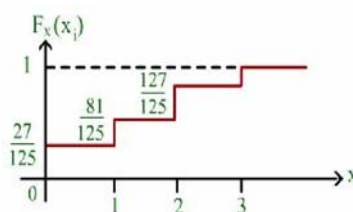
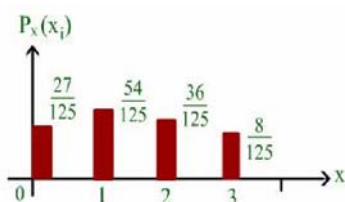
در محاسبات مذکور فرض شده است که خطا در هر رقم از سایر ارقام مستقل است.

اگر ما X را به عنوان تعداد خطاها در پیام دریافتی در نظر بگیریم، در این صورت X متغیر تصادفی

گسسته می باشد که می تواند چهار مقدار ممکن ۰، ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند.

در شکل می توانید مقادیر $p_X(x_i)$ و $F_X(x_i)$ که بر اساس احتمالات طرح های خطا یا نقاط

نمونه محاسبه شده اند، مشاهده نمایید.



توجه کنید که $F_X(0) = p_X(0)$ و $F_X(1) = p_X(0) + p_X(1)$ و و

احتمال بیش از یک خطا در پیام دریافتی عبارت است از:

$$p_X(2) + p_X(3) = \frac{44}{125} \quad \text{یا} \quad 1 - F_X(1) = \frac{44}{125}$$

چگالی احتمال
(PDF)

تابع $P_X(x)$ را تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X می نامند. تابع چگالی احتمال

دارای خواص زیر می باشد.

$$1) P_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$2) F_X(x) = \int_{-\infty}^x P_X(x) dx$$

$$3) P_X(x) \geq 0$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} P_X(x) dx = 1$$

$$5) P_X[x_1 \leq x \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P_X(x) dx$$

تبدیل فوریه تابع چگالی احتمال را تابع مشخصه گویند، و با $\theta_X(f)$ نمایش می دهند.

تابع توزیع تجمعی و
چگالی احتمال توام
دو متغیر تصادفی

در مورد دو متغیر تصادفی X و Y ، تابع توزیع تجمعی $F_{XY}(x, y)$ به صورت زیر

تعریف می شود.

$$F_{XY}(x, y) \triangleq P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y P_{XY}(x, y) dx dy$$

همچنین تابع چگالی احتمال توام $P_{xy}(x, y)$ عبارت است از:

$$P_{XY}(x, y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$$

این تابع، چگالی احتمال توام دارای خواص زیر است:

$$1) P_{XY}(x, y) \geq 0$$

$$2) P_{XY} \{x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} P_{XY}(x, y) dx dy$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

تابع چگالی
احتمال مرزی

در حالت دو متغیر تصادفی X و Y می توان توابع چگالی احتمال $P_X(x)$ و $P_Y(y)$ را از تابع چگالی احتمال توام $P_{XY}(x,y)$ بدست آورد. این توابع را توابع چگالی احتمال مرزی می نامند و به صورت زیر بدست می آیند.

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{XY}(x,y) dy$$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{XY}(x,y) dx$$

$$P_X(x|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)} \quad P_Y(y) \neq 0$$

$$P_Y(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} \quad P_X(x) \neq 0$$

$$P_X(x|Y=y) = P_X(x)$$

$$P_Y(y|X=x) = P_Y(y)$$

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$$

تابع چگالی
احتمال مشروط

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، آنگاه:

بنابراین خواهیم داشت:

مشخصه های عددی
متغیرهای تصادفی
(امید واریانس)

متغیر تصادفی X می تواند مقادیر زیر را به خود بگیرد:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$P_X = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

$$E(X) = \bar{X} \triangleq \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

امید ریاضی X عبارت است از :

در حالت متغیر تصادفی گسسته

$$E(X) = \bar{X} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته

همچنین امید ریاضی تابع تصادفی $g(x)$ عبارت است از:

$$E(g(x)) = \bar{X} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) P_X(x) dx$$

به شرط اینکه λ مقدار ثابتی باشد.

$$1) E(\lambda) = \lambda$$

$$2) E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

اگر X و Y دو متغیر مستقل باشند آنگاه:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

واریانس X نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$Var[X] \triangleq \sigma_x^2 = E(X - \bar{X})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \bar{X})^2 P_X(x) dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$

خواص مربوط به واریانس :

$$1) Var(\lambda) = 0$$

λ مقدار ثابت فرض شده

$$2) Var[\lambda X] = \lambda^2 Var[X]$$

$$3) Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$$

کو واریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$cov(X, Y) \triangleq E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

مثال ۱:

نشان دهید اگر $Y = aX + b$ باشد کواریانس آن از رابطه $\text{cov}(X, Y) = \pm \sigma_x \sigma_y$ بدست می آید.

با جایگذاری Y بر حسب X

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad \xrightarrow{\text{خواهیم داشت:}} E(X(aX + b)) - E(X)E(aX + b)$$

با استفاده از خواص E
می توان نوشت:

$$aE(X^2) + bE(X) - a[E(X)]^2 - bE(X) =$$

$$a(E(X^2) - [E(X)]^2) = a\text{Var}(X) = a\sigma_x^2$$

به طریق مشابه اگر به جای X (بر حسب Y) جایگزین کنیم خواهیم داشت :

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{a} \sigma_y^2$$

از مساوی قرار دادن این دو مقدار خواهیم داشت :

$$a\sigma_x^2 = \frac{1}{a} \sigma_y^2 \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{|a|} \sigma_y$$

بنابراین داریم :

$$\text{cov}(X, Y) = a\sigma_x^2 = a\sigma_x \frac{1}{|a|} \sigma_y = \pm \sigma_x \sigma_y$$

مثال ۲:

سیستم مخابراتی زیر را در نظر بگیرید که ورودی ۰ و ۱ را به صورت باینری با احتمال های $P_X(0) = \frac{3}{4}$ و $P_X(1) = \frac{1}{4}$ دریافت می کند. به علت وجود نویز در تحویل سمبل های ورودی خطا پیش می آید.



اگر داشته باشیم:

$$P(Y=1|X=1) = \frac{3}{4} \quad \text{and} \quad P(Y=0|X=0) = \frac{7}{8}$$

مقادیر $P(Y=1)$ ، $P(Y=0)$ و $P(X=1|Y=1)$ را بدست آورید. این مقادیر در واقع احتمال تحویل ۱ در گیرنده، احتمال تحویل صفر در گیرنده و احتمال تحویل ۱ در صورت ارسال ۱ می باشند. احتمال دریافت ۱ در گیرنده احتمال دریافت ۱ به شرط ارسال ۱ به علاوه احتمال دریافت یک به شرط ارسال صفر است که به صورت ریاضی این گونه بیان می شود.

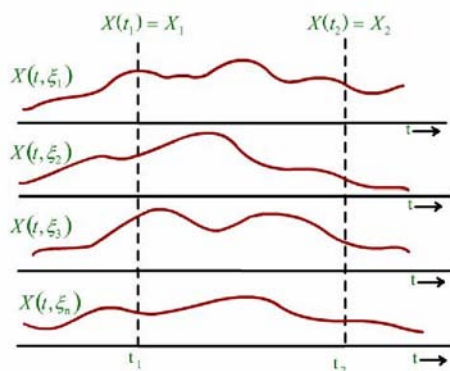
$$P(Y=1) = P(Y=1|X=1)P(X=1) + P(Y=1|X=0)P(X=0) = \frac{3}{4} \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{7}{8}\right) \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

$$P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32}$$

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(Y = 1|X = 1).P(X = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{3}{4} * \frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{2}{3}$$

مفهوم فرآیند تصادفی در واقع ادامه و تعمیم متغیر تصادفی است. به عنوان مثال درجه حرارت شهری را در ساعت ۱۲ ظهر در نظر بگیرید. درجه حرارت (X) یک متغیر تصادفی بوده و هر روز مقدار متفاوتی با سایر روزها دارد. به منظور دسترسی به آمار کامل X ، ما بایستی مقادیر X را در روزهای بسیاری ثبت کرده و با استفاده از این داده ها، تابع چگالی احتمال $p_X(x)$ را تعیین کنیم. ولی درجه حرارت تابعی از زمان نیز هست. مثلاً امکان دارد درجه حرارت در ساعت یک نیمه شب، توزیع کاملاً متفاوتی با توزیع درجه حرارت، در ساعت ۱۲ ظهر داشته باشد. بنابراین متغیر تصادفی X تابعی از زمان بوده و آن را می توان به صورت $X(t)$ نشان داد. متغیر تصادفی را که تابعی از زمان است، فرآیند تصادفی یا (Random process or stochastic process) می نامند.

برای مشخص کردن متغیر تصادفی X ، باید آزمایش را به تعداد دفعات زیاد تکرار کرده و بر اساس نتایج حاصله $p_X(x)$ را تعیین کنیم. مشابهاً برای مشخص کردن فرآیند تصادفی $X(t)$ ، برای هر مقدار t ، همان عمل فوق را انجام می دهیم. در مثال فرآیند تصادفی مربوط به درجه حرارت شهر، باید به ازاء هر مقدار t ، (هر لحظه زمانی از روز) درجه حرارت روزانه را یادداشت کنیم. این امر را می توان با ثبت درجه حرارت برای تمام لحظات روز انجام داد. عمل مذکور منجر به شکل موج $X(t, \xi_i)$ می شود که در آن ξ_i روزی را که در آن اطلاعات درجه حرارت ثبت گردیده است نشان می دهد. بدیهی است که ما باید این روش را هرروز و روزهای بسیار زیادی تکرار کنیم. مجموعه تمام شکل موجهای حاصل شده را خانواده (Ensemble) فرآیند تصادفی $X(t)$ نامیده و یک شکل موج از این مجموعه را تابع نمونه (sample Function) از فرآیند تصادفی می نامند.



دامنه توابع نمونه در لحظه $t = t_1$ مقادیری هستند که متغیر تصادفی $X(t_1)$ در آزمایش های

مختلف اختیار می کند.

از زاویه دیگری نیز می توان به فرآیند تصادفی نگاه کرد. در مورد متغیر تصادفی، نتیجه هر یک بار آزمایش تصادفی یک عدد است.

می توان فرآیند تصادفی را نیز به صورت نتیجه یک آزمایش تصادفی در نظر گرفت که در آن، نتیجه هر یک بار آزمایش تصادفی شکل موج یا تابع نمونه ای است که تابعی از زمان می باشد. تعداد شکل موج ها در یک خانواده می تواند محدود یا نامحدود باشد.

در مورد فرآیند تصادفی $X(t)$ (درجه حرارت شهر)، خانواده دارای بی نهایت شکل موج است. نکته مهمی که باید به آن توجه شود این است که این شکل موجها (توابع نمونه) در خانواده ماهیتاً تصادفی نبوده و یقینی هستند.

در چنین وضعیتی تصادفی بودن به شکل موج ارتباطی ندارد، بلکه نامطمئنی در مورد اینکه در هر بار آزمایش کدامیک از شکل موجها حاصل خواهد شد سبب تصادفی شدن فرآیند می گردد.

این امر کاملاً مشابه متغیر تصادفی است. برای مثال اگر سکه ای را چهار بار به هوا پرتاب کنیم ۱۶ نتیجه کاملاً معلوم و شناخته وجود خواهد داشت.

در چنین موردی تصادفی بودن به نتایج، مربوط نمی شود بلکه عدم اطمینان در مورد اینکه کدامیک از این ۱۶ نتیجه در یک آزمایش رخ خواهد داد ماهیت تصادفی بودن را بیان می کند. سؤال مهم دیگر این است که چگونه می توان یک فرآیند تصادفی را مشخص کرد.

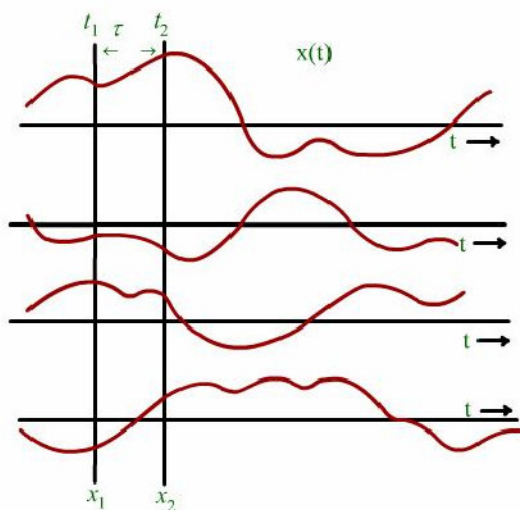
اگر ما همچنان فرآیند تصادفی $X(t)$ را به صورت متغیر تصادفی X ، که تابعی از زمان می باشد در نظر بگیریم، می توان نتیجه گرفت که در صورت مشخص و معلوم بودن تابع چگالی احتمال X ، به ازاء هر مقدار t ، فرآیند تصادفی $X(t)$ بطور کامل تعریف و مشخص می گردد. اما موضوع به این سادگی نمی باشد. فرض کنید می خواهیم متغیر تصادفی X را برای هر مقدار t مشخص سازیم. در مورد فرآیند تصادفی $X(t)$ که بیانگر درجه حرارت یک شهر است باید دامنه توابع نمونه در لحظه ای مانند $t = t_1$ در نظر گرفته شود.

مقدار $X(t_1, \zeta_i)$ نماینده درجه حرارت در لحظه $t = t_1$ و در روز ζ_i ام بوده و نتیجه آزمایش ζ_i ام می باشد. بنابراین کلیه دامنه توابع نمونه در $t = t_1$ نشان دهنده مقادیری هستند که متغیر تصادفی X در $t = t_1$ یعنی $X(t_1)$ می تواند اختیار کند.

با استفاده از داده های فوق و با توجه به مفهوم فرکانس نسبی، می توان PDF متغیر تصادفی $X(t_1)$ را بدست آورد. این عمل را می توان به ازاء هر مقدار t انجام داد. بطور کلی امکان دارد که تابع چگالی احتمال X ، برای مقادیر مختلف t متفاوت باشد. بنابراین باید تابع چگالی احتمال X در لحظه t ، به صورت $p_X(x, t)$ نشان داده شود.

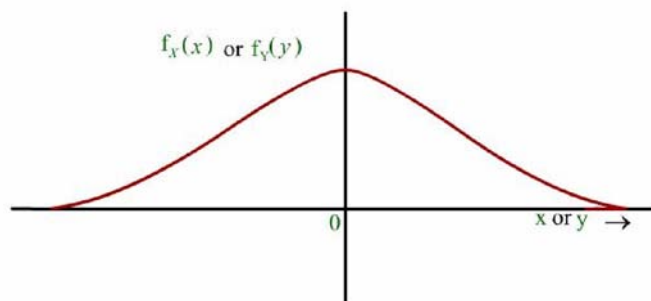
بنابراین برای مشخص کردن فرآیند اتفاقی، به آمار و احتمالات خانواده آن فرآیند نیاز داریم. تابع $p_X(x, t)$ PDF مرتبه اول می نامند و متأسفانه شناسایی و معلوم بودن تابع PDF مرتبه اول برای مشخص کردن فرآیند تصادفی کافی نیست.

برای روشن شدن موضوع، فرآیند تصادفی $X(t)$ که خانواده اش در شکل نشان داده شده است را در نظر بگیرید.

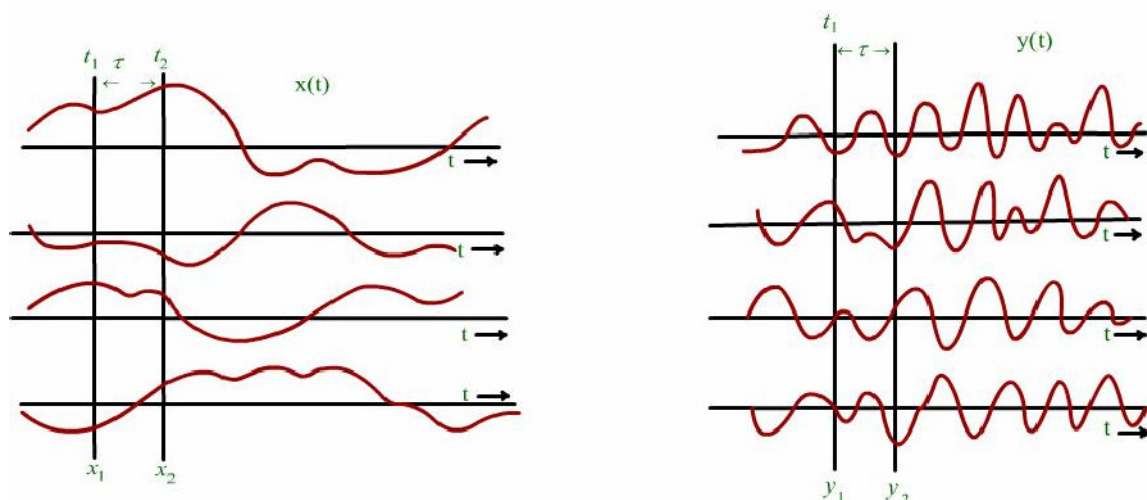


همچنین فرض کنید که توزیع دامنه برای تمام لحظات t ثابت است یعنی $p_X(x, t)$ مستقل از t می باشد یعنی :

$$p_X(x, t) = p_X(x)$$



اکنون اگر فرآیند $X(t)$ را با ضریب $k(k > 1)$ منقبض نمائیم تا فرآیند دیگری مانند $y(t)$ بوجود آید.

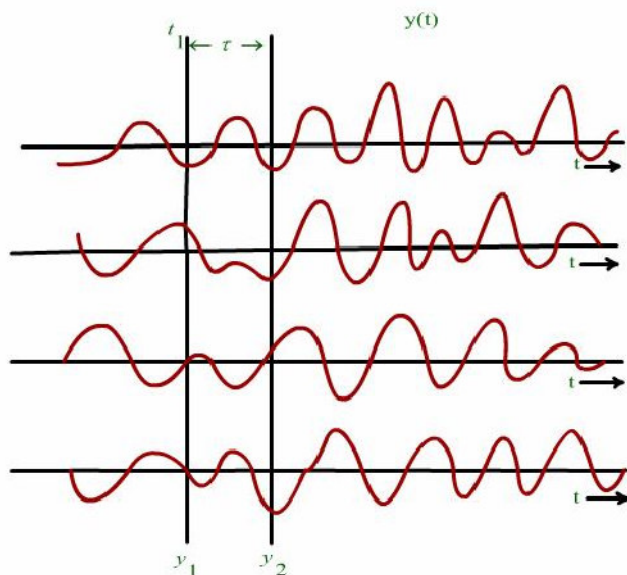


مشاهده می شود که توزیع دامنه $y(t)$ کاملاً با توزیع دامنه $X(t)$ برابر است و در نتیجه PDF مرتبه اول $y(t)$ با PDF مرتبه اول $X(t)$ برابر خواهد بود. بدین ترتیب هر دو فرآیند، PDF مرتبه اول یکسانی دارند ولی ماهیتاً با هم متفاوتند. فرآیند $y(t)$ دارای مؤلفه های فرکانسی بالاتری از مؤلفه های فرکانسی $X(t)$ است.

در واقع طیف $y(t)$ همان طیف $X(t)$ است که با ضریب k منبسط شده است. بدیهی است که برای مشخص کردن کامل یک فرآیند تصادفی، تابع PDF مرتبه اول به تنهایی کافی نیست. محتوای فرکانسی یک فرآیند تصادفی به میزان تغییرات دامنه بر حسب زمان بستگی دارد.

این پارامتر را می توان از همبستگی دامنه ها در لحظه t_1 و لحظه $t_1 + \tau$ به دست آورد. اگر فرآیند به آرامی تغییر کند امکان دارد دامنه ها در t_1 و $t_1 + \tau$ مشابه هم باشند.

از طرف دیگر، اگر فرآیند به سرعت تغییر نماید ممکن است دامنه ها در $t_1 + \tau$ و t_1 شباهتی به یکدیگر نداشته باشند.



می توان از همبستگی به منظور اندازه گیری شباهت دامنه ها در t_1 و $t_2 = t_1 + \tau$ استفاده کرد. اگر متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ را به ترتیب با X_1 و X_2 نشان دهیم، در این صورت برای یک فرآیند تصادفی حقیقی تابع خود بستگی $R_X(t_1, t_2)$ به صورت زیر تعریف می شود.

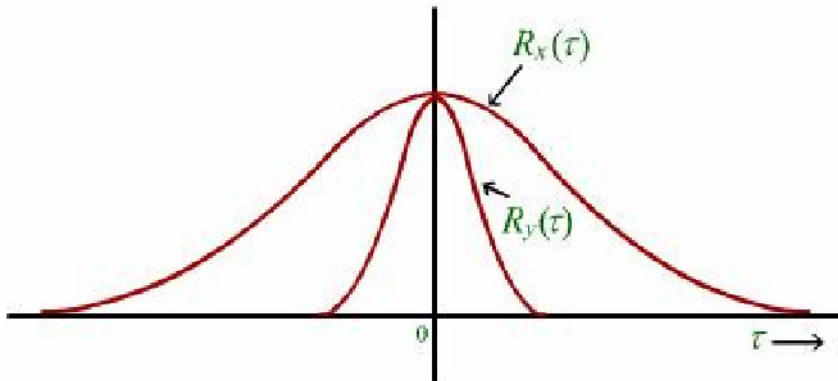
$$R_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)} = \overline{X_1 X_2}$$

در مورد فرآیند تصادفی مختلط

$$R_X(t_1, t_2) = \overline{X^*(t_1)X(t_2)}$$

با استفاده از روابط فوق مشاهده می شود که همبستگی متغیر تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ ، از ضرب دامنه ها در t_1 و t_2 یک تابع نمونه و گرفتن میانگین از این حاصلضرب در خانواده بدست می آید. می توان ملاحظه کرد به ازاء τ کوچک، حاصلضرب $X_1 X_2$ در مورد اغلب توابع نمونه $X(t)$ مثبت بوده ولی حاصلضرب $y_1 y_2$ با احتمال یکسان مثبت یا منفی خواهد بود. پس $\overline{X_1 X_2}$ از $\overline{y_1 y_2}$ بزرگتر خواهد بود.

علاوه بر این X_1 و X_2 به ازاء مقادیر بسیار بزرگی از τ همبستگی خویش را نشان خواهند داد. در حالی که y_1 و y_2 حتی در مقادیر کوچک τ به سرعت همبستگی را از دست می دهند. این موضوع را می توان در شکل مشاهده نمود.



بنابراین $R_X(t_1, t_2)$ یعنی تابع خودبستگی $X(t)$ ، اطلاعات مهمی را در مورد محتوای فرکانسی فرآیند فراهم آورد. در واقع می توان نشان داد که چگالی طیفی توان $X(t)$ ، تبدیل فوری تابع خودبستگی آن است.

با توجه به تعریف تابع خودبستگی $X(t)$ ، به PDF توام X_1 و X_2 نیاز داریم، یعنی به عبارت دیگر:

$$R_X(t_1, t_2) = \overline{X_1 X_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1 X_2 p_{X_1 X_2}(X_1, X_2) dX_1 dX_2$$

تابع PDF توأم فوق را تابع چگالی احتمال مرتبه دوم می نامند.

پس برای مشخص شدن یک فرآیند تصادفی نه تنها به تابع PDF مرتبه اول یعنی $R_X(X, t)$

نیاز است بلکه معلوم بودن تابع PDF مرتبه دوم یعنی $P_{X_1, X_2}(X_1, X_2, t_1, t_2)$ نیز ضروری است.

مقدار متوسط یک فرآیند تصادفی مانند X که با نماد $\overline{X(t)}$ نشان داده می شود را می توان با استفاده

از تابع PDF مرتبه اول حساب کرد.

$$\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} X p_X(X, t) dX$$

اگر فرآیند تصادفی $v(t)$ ، تابعی از متغیر تصادفی X باشد، در مورد این فرآیند تصادفی می توان نوشت:

$$v(t) = g(X, t)$$

$$\bar{v}(t) = E[g(X, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X, t) p_X(X) dX$$

$$R_v(t_1, t_2) = E[g(X, t_1) \cdot g(X, t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X, t_1) \cdot g(X, t_2) p_X(X) dX$$

مشخصات سیگنال

مشخصات یک سیگنال را می توان در سه مورد زیر خلاصه کرد:

۱- توان کل

۲- تابع خودبستگی

۳- چگالی طیفی توان

تعریف مشخصات فوق را برای سیگنال ارادی و تصادفی بیان می کنیم.

سیگنال ارادی

توان کل تابع ارادی $g(t)$ حقیقی از رابطه زیر بدست می آید.

$$P \triangleq \langle g^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int g^2(t) d\tau$$

برای تابع خودبستگی داریم:

$$R_g(\tau) \triangleq \langle g(t)g(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int g(t)g(t-\tau) d\tau$$

چگالی طیفی توان، عبارت است از:

$$S_g(f) = F(R_g(\tau))$$

فرض کنید فرآیند تصادفی $g(t)$ ، با خانواده $[g_1(t), g_2(t), g_3(t), \dots, g_n(t)]$ مفروض است. اگر $g_i(t)$ تابع نمونه این خانواده باشد داریم:

$$P_i = \langle g_i^2(t) \rangle$$

از طرفی

$$P = E[P_i] = E[\langle g_i^2(t) \rangle] = E[\langle g^2(t) \rangle] = \langle E[g^2(t)] \rangle$$

در مورد تابع خودبستگی می توان نوشت :

$$R_{g_i}(\tau) = \langle g_i(t) \cdot g_i(t - \tau) \rangle$$

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= E[R_{g_i}(\tau)] = E[\langle g_i(t) \cdot g_i(t - \tau) \rangle] = E[\langle g(t) \cdot g(t - \tau) \rangle] \\ &= \langle E[g(t) \cdot g(t - \tau)] \rangle \end{aligned}$$

در مورد چگالی طیفی می توان نیز داریم :

$$S_g(f) = F(R_g(\tau))$$

طبقه بندی فرآیندهای
تصادفی

۱- فرآیند تصادفی استیشنری (stationary) یا ایستان

۲- فرآیند تصادفی ارگودیک

فرآیندی را استیشنری یا ایستان گویند که خواص آماری آن به زمان بستگی نداشته باشد. فرآیند ارگودیک نیز، فرآیند استیشنری است که متوسط گیری زمانی و مجموعی آن با هم برابر باشد.

شرایط استیشنری بودن عبارت است از :

$$1) E(X(t)) \text{ مستقل از زمان}$$

$$2) R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] \text{ مستقل از زمان}$$

شرایط ارگودیک بودن عبارتند از :

$$1) E[X(t)] = \langle X(\tau) \rangle$$

به عبارتی میانگین آماری و میانگین زمانی با هم برابر باشند.

$$2) E[X(t) \cdot X(t-\tau)] = \langle X(t)X(t-\tau) \rangle$$

بنابراین توان، تابع خودبستگی و چگالی طیفی یک سیگنال استیشنری عبارتند از :

$$P_x = E[X^2(t)]$$

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)]$$

$$S_x(f) = F\{R_x(\tau)\}$$

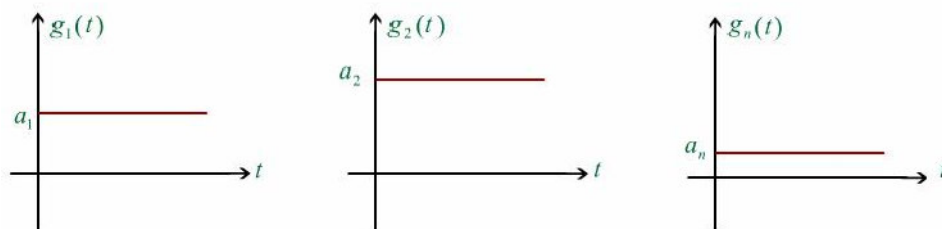
همین پارامترها برای سیگنال ارگودیک به صورت زیر تعریف می شوند.

$$P_x = E[X^2(t)] = \langle X^2(t) \rangle$$

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = \langle X(t)X(t-\tau) \rangle$$

$$S_x(f) = F(R_x(\tau))$$

سیگنال تصادفی DC با فرآیند اتفاقی $g_i(t)$ موجود است. که در آن a_1 تا a_n دامنه رندم سیگنال DC می باشند.



می خواهیم استیشنری و ارگودیک بودن سیگنال را بررسی کنیم.
 می توان فرآیند اتفاقی را به صورت $g(t) = X$ که در آن X متغیری تصادفی است نشان داد.
 بدین ترتیب:

$$E(g(t)) = E(X) = \bar{X}$$

که مستقل از زمان است. همچنین:

$$R_g(\tau) = E(g(t) \cdot g(t-\tau)) = E(X \cdot X) = \bar{X}^2$$

که مستقل از زمان می باشد. بنابراین دو شرط لازم جهت استیشنری بودن سیگنال برقرار است.
 در مورد ارگودیک بودن سیگنال اولین شرط برابر بودن امید و میانگین زمانی است.

در مورد میانگین زمانی این فرآیند داریم:

$$\langle g(t) \rangle = \langle X \rangle = X \neq E(g(t))$$

بنابراین اولین شرط ارگودیک بودن برقرار نبوده و سیگنال رندم DC فوق ارگودیک نیست.

مثال ۲

$g(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ را که در آن θ متغیری تصادفی است در نظر بگیرید.

بعد از محاسبه $R_g(\tau)$ و $S_g(f)$ برای این فرآیند می خواهیم استیشنری و ارگودیک بودن آن را در حالت کلی و در

حالتی که تابع چگالی احتمال آن $P_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ باشد بررسی کنیم.

$$g_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$S_{g_i}(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f \pm f_0)$$

$$S_g(f) = E(S_{g_i}(f))$$

که چون عامل تصادفی یعنی

θ در آن ظاهر نشده

$$S_{g_i}(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f \pm f_0)$$

تابع خودبستگی نیز تبدیل فوری معکوس تابع چگالی طیفی است پس داریم :

$$R_g(\tau) = F^{-1}[S_g(f)] = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

حال استیشنری بودن را بررسی می کنیم. برای این منظور اولین شرط مستقل از زمان بودن امید $g(t)$ است.

$$E[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) P_\theta(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(\omega_0 t + \theta) P_\theta(\theta) d\theta$$

با توجه به اینکه انتگرال گیری روی θ انجام می گیرد، t را در جواب نهایی خواهیم داشت.

بنابراین در حالت کلی $g(t)$ استیشنری نمی باشد.

حال با شرط $P_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ به بررسی این موضوع می پردازیم در این حالت خواهیم داشت:

$$E[g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta = 0$$

که مستقل از زمان است. حال به بررسی شرط دوم استیشنری بودن می پردازیم.

$$E[g(t)g(t-\tau)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [A \cos(\omega_0 t + \theta)][A \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta)] d\theta$$

از محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$E[g(t)g(t-\tau)] = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad \text{که مستقل از زمان است.}$$

بنابراین با شرط $P_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$ سیگنال مورد نظر استیشنری خواهد بود.

برای بررسی ارگودیک بودن تحت این شرط متوسط زمانی $g(t)$ و $g(t-\tau)$ را بدست می آوریم که باید به ترتیب با $E[g(t)g(t-\tau)]$ و $E(g(t))$ برابر باشند.

$$\langle g(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0 = E[g(t)]$$

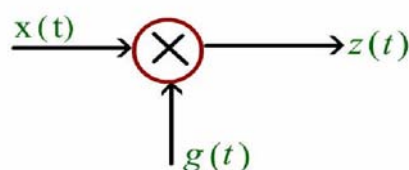
$$\langle g(t)g(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(\omega_0 t + \theta) A \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta) dt = \dots$$

انجام این محاسبات به نتیجه زیر منجرخواهدشد.

$$\langle g(t)g(t-\tau) \rangle = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) = E[g(t)g(t-\tau)]$$

بنابراین سیگنال مورد نظریا تابع P_θ تعریف شده سیگنالی ارگودیک است.

برای بلوک دیاگرام نشان داده شده در دو حالت زیر بدست آورید. $R_z(\tau)$ و $S_z(f)$



الف) $g(t)$ ارادی باشد.

ب) $g(t)$ تصادفی و مستقل از $x(t)$ باشد.

دقت داشته باشید که $x(t)$ رندام واستیشنری فرض شده است.

باتوجه به رندام بودن سیگنال $x(t)$ ، خروجی نیز رندام می باشد و بنابراین از تعریف تابع خود بستگی برای یک سیگنال

رندام استفاده می کنیم.

$$R_z(\tau) = E[< z(t)z(t-\tau) >]$$

اگر به جای $z(t)$ مقدار آن را بر حسب $x(t)$ و $g(t)$ قرار دهیم:

$$R_z(\tau) = E[< x(t)x(t-\tau)g(t)g(t-\tau) >]$$

باجابجایی تقد امید ومتوسط گیری زمانی داریم:

$$R_z(\tau) = \langle E[x(t)x(t-\tau)g(t)g(t-\tau)] \rangle$$

چون $g(t)$ ارادی است به متوسط گیری تجمعی (E) احتیاجی ندارد، بنابراین:

$$R_z(\tau) = \langle g(t)g(t-\tau)E[x(t)x(t-\tau)] \rangle$$

از طرفی چون $x(t)$ استیشنری است $E(x(t)x(t-\tau))$ مستقل از زمان است و به متوسط گیری زمانی احتیاج ندارد، بنابراین:

$$R_z(\tau) = \langle g(t)g(t-\tau) \rangle E[x(t)x(t-\tau)] = R_g(\tau) \times R_x(\tau)$$

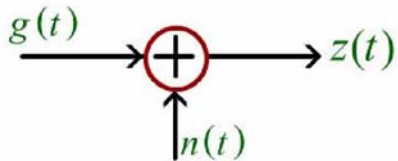
بدین ترتیب $S_z(f)$ نیز عبارت خواهد شد از :

$$S_z(f) = S_g(f) * S_x(f)$$

مثال ۴

اگر سیگنال $g(t)$ با نویز استیشنری $n(t)$ جمع شود، تابع خود بستگی این مجموع را

برای حالت‌های متفاوت محاسبه می‌کنیم:



براساس شکل مشاهده شده می‌توان نوشت:

$$R_z(\tau) = E[\langle z(t)z(t-\tau) \rangle] = E[\langle g(t)g(t-\tau) + n(t)n(t-\tau) + g(t)n(t-\tau) + n(t)g(t-\tau) \rangle]$$

و بدین ترتیب:

$$R_z(\tau) = R_g(\tau) + R_n(\tau) + R_{g_n}(\tau) + R_{n_g}(\tau)$$

اگر دو سیگنال ناهمدوس یا (incoherent) باشند، تابع همبستگی آنها صفر خواهد بود و بنابراین تابع خودبستگی Z برابر خواهد شد با:

$$R_z(\tau) = R_g(\tau) + R_n(\tau)$$

بنابراین چگالی طیفی توان Z را در این حالت می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$S_z(f) = S_g(f) + S_n(f)$$

و بدین ترتیب رابطه توان سیگنال Z نیز عبارت خواهد بود از:

$$P_z = P_g + P_n$$

حال، حالت $R_{g_n}(\tau) \neq 0$ را بررسی می کنیم .

الف) $g(t)$ ارادی باشد در این صورت:

$$R_{g_n}(\tau) = E[\langle g(t) \cdot n(t - \tau) \rangle] = \langle E[g(t) \cdot n(t - \tau)] \rangle$$

از آنجا که $g(t)$ سیگنال ارادی فرض شده است متوسط گیری تجمعی لازم ندارد، بنابراین:

$$R_{g_n}(\tau) = \langle g(t) E[n(t - \tau)] \rangle$$

$$= \langle g(t) E[n(t)] \rangle$$

و از آنجا که سیگنال $n(t)$ استیشنری فرض شده،

$$R_{g_n}(\tau) = \langle g(t) \rangle E[n(t)] = g_{dc} \cdot n_{dc}$$

بنابراین:

$$R_z(\tau) = R_g(\tau) + R_n(\tau) + 2g_{dc}n_{dc}$$

وچگالی طیفی توان عبارت خواهد شد از:

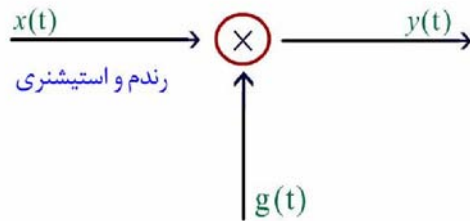
$$S_z(f) = S_g(f) + S_n(f) + 2g_{dc}n_{dc}\delta(f)$$

ب) فرض کنید $g(t)$ رندم و مستقل از $n(t)$ باشد، در این صورت:

$$R_{g_n}(\tau) = \langle E[g(t) \cdot n(t - \tau)] \rangle = \langle E[g(t)] \cdot E[n(t - \tau)] \rangle = \langle E[g(t)] \rangle \cdot \langle E[n(t - \tau)] \rangle = g_{dc} \cdot n_{dc}$$

پس نتایج حالت الف برای $R_z(\tau)$ و $S_z(f)$ مجدداً حاصل می شود.

در سیستم نشان داده شده، ثابت کنید که $y(t)$ استیشنری است.



$$g(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

θ متغیر تصادفی

$$P_\theta = \frac{1}{2\pi} \Pi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

مستقل از زمان است.

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E[x(t)A \cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= E[x(t)] \cdot E[A \cos(\omega_0 t + \theta)] = \bar{X} \cdot 0 = 0 \\ E[y(t) \cdot y(t - \tau)] &= \\ E[x(t)x(t - \tau)A \cos(\omega_0 t + \theta)A \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta)] &= \\ = E[x(t) \cdot x(t - \tau)] \cdot E\left[\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau + 2\theta)\right] \end{aligned}$$

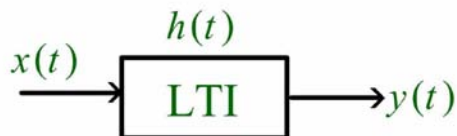
$$= R_x(\tau) \cdot \left[\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + 0 \right] = \frac{A^2}{2} R_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau)$$

مستقل از زمان است، بنابراین سیگنال $y(t)$ استیشنری می باشد.

عبور سیگنال رندم
از یک سیستم
LTI

فرض کنید که $x(t)$ از یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ عبور کرده و به سیگنال $y(t)$

تبدیل می شود.



اگر $x(t)$ سیگنال ارادی باشد نشان دادیم که :

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

در صورتی که $x_i(t)$ سیگنالی تصادفی باشد داریم:

$$S_{yi}(f) = S_{xi}(f) \cdot |H(f)|^2$$

اگر از طرفین این رابطه، امید بگیریم چون $|H(f)|^2$ تصادفی نیست، بیرون می آید. پس داریم:

$$E[S_{yi}(f)] = E[S_{xi}(f)] \cdot |H(f)|^2$$

که در نهایت به رابطه ای مشابه سیگنال ارادی می رسیم یعنی:

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

حال در ادامه نشان می دهیم که اگر ورودی یک سیستم LTI (یعنی $x(t)$) استیشنری باشد، خروجی آن نیز $y(t)$ استیشنری خواهد بود.

$$E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E\left[\int h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda\right] =$$

با جابجا کردن \int و E این عبارت مساوی خواهد شد با:

$$\int E[h(\lambda)x(t - \lambda)]d\lambda$$

$h(\lambda)$ سیگنالی ارادی است و احتیاج به متوسط گیری تجمعی ندارد. پس از زیر E بیرون می آید.

$$E[y(t)] = \int h(\lambda) E[x(t - \lambda)] d\lambda = \int h(\lambda) \bar{X} d\lambda = \bar{X} \cdot H(0)$$

بدین ترتیب:

در اینجا از خواص تبدیل فوریه استفاده شده است.

\bar{X} و $H(0)$ هر دو مستقل از زمان هستند. پس $E[y(t)]$ مستقل از زمان است.

$$E[y(t) \cdot y(t - \tau)] = E\left[y(t - \tau) \int x(t - \lambda) h(\lambda) d\lambda\right]$$

با تغییر متغیر $t - \tau = u$ داریم:

$$\begin{aligned} &= E\left[y(u) \int x(u + \tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda\right] = \int E[y(u) x(\tau + u - \lambda) h(\lambda)] d\lambda \\ &= \int h(\lambda) E(y(u) x(u + \tau - \lambda)) d\lambda = \int h(\lambda) R_{yx}(\lambda - \tau) d\lambda \\ &= \int h(\lambda) R_{yx}(-(\tau - \lambda)) d\lambda = R_{yx}(-\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

بدست می آید که مستقل از زمان است.

بنابراین ثابت شد که خروجی یک سیستم LTI در صورتی که ورودی استیشنری $stationary$ داشته باشد خود استیشنری خواهد بود.

عبارت نویز معمولاً به سیگنال ها و امواج نامطلوبی اطلاق می شود که باعث اختلال در انتقال و پردازش سیگنال های مورد نظر در سیستم های مخابراتی می گردند و در اغلب موارد نمی توان سیگنال های نامطلوب مذکور را به طور کامل کنترل کرد.

از نظر سیستم مخابراتی نویز را می توان به دو گروه خارجی و داخلی تقسیم بندی نمود. نویز خارجی یا نویز خارج از سیستم شامل نویز اتمسفر، نویز خورشیدی، نویز کیهانی، و نویز ساخت بشر می باشد. نویز داخلی که در هر سیستم مخابراتی وجود داشته و محدودیت اساسی در انتقال یا آشکارسازی سیگنال ها می باشد انواع مختلفی دارد که از مهمترین آنها می توان به نویز حرارتی و نویز ضربه ای یا **shot noise** اشاره کرد.

نویز حرارتی

نویز حرارتی در اثر حرکت تصادفی ذرات باردار (الکترونها) در یک محیط هادی بوجود می آید. بر اساس نظریه سینتیک، انرژی متوسط یک ذره در درجه حرارت مطلق T با kT متناسب است (k ثابت بولتزمن) می باشد. بنابراین مقادیر نویز حرارتی با درجه حرارت ارتباط دارد. از نظر تاریخی جانسون و نایکوئیست در سال ۱۹۲۸ برای اولین بار نویز حرارتی را در مقاومتهای فلزی مطرح و بررسی کردند و بدین علت به این نویز، نویز حرارتی جانسون نیز گفته می شود.

اگر مقاومت فلزی R در درجه حرارت T قرار گیرد، حرکت تصادفی الکترونها، ولتاژ نویز $n(t)$ را در دو ترمینال مدار باز مقاومت ایجاد می کند.

$n(t)$ سیگنال تصادفی و استیشنری است که دارای توزیع نرمال می باشد.

$$P_X(X) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

میانگین این توزیع نرمال صفر و واریانس آن عبارت است از:

$$\sigma_n^2 = \frac{2(\pi kT)^2}{3h} \cdot R$$

که در آن:

$$K = 1/381 \times 10^{-23} [J/e_k] \quad \text{ثابت بولتزمن}$$

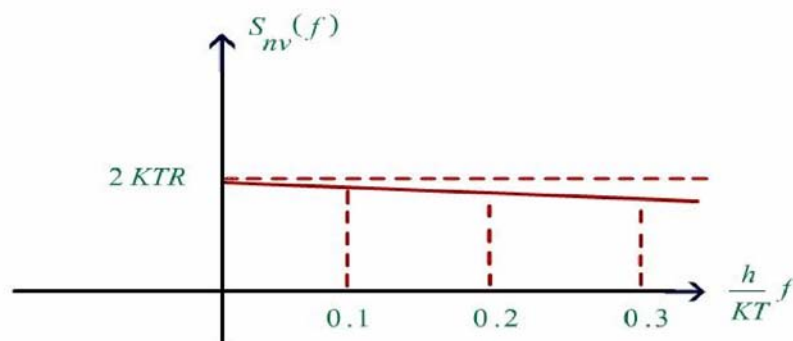
$$h = 6/626 \times 10^{-23} [J.sec] \quad \text{ثابت پلانک}$$

$$R[\Omega] \quad \text{مقاومت} \quad T[^\circ K] \quad \text{درجه حرارت}$$

چگالی طیفی
توان و نویز

از مکانیک کوانتوم چگالی طیفی توان نویز به صورت زیر معرفی می شود.

$$S_{nv}(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\left[\frac{h|f|}{kT}-1\right]}} \quad \left[V^2/Hz\right]$$



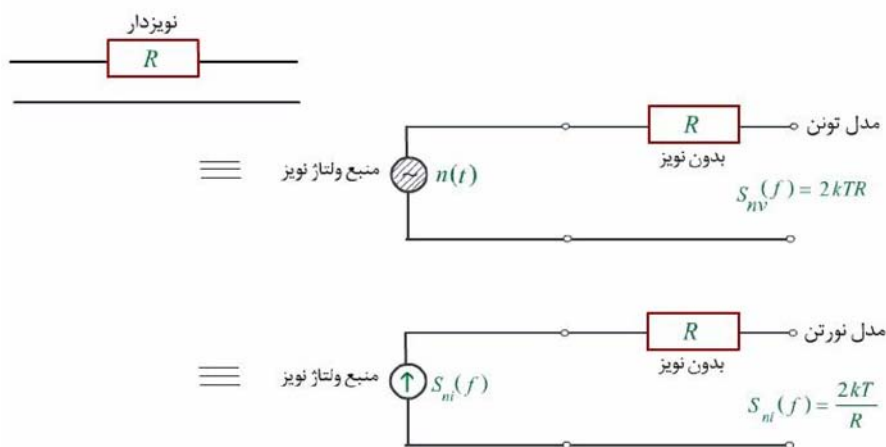
چگالی طیفی نویز حرارتی برای فرکانس های مثبت در شکل رسم شده است. مشاهده می گردد.

که در فرکانس های کوچکتر از $0.1 \frac{KT}{h}$ که در محدوده تراهرتز قرار می گیرد چگالی طیفی نویز حرارتی تقریباً ثابت و برابر با $2kTR$ می باشد. بنابراین در این محدوده ی فرکانسی ($f < 1000GHZ$)، چگالی طیفی نویز حرارتی را می توان به صورت زیر تقریب زد.

$$S_{nv}(f) = 2KTR \quad [V^2/Hz]$$

اگر چه استفاده از این نتیجه باعث مشکل $p_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nv}(f) df = \infty$ می گردد ولی باید توجه داشت که نویز حرارتی

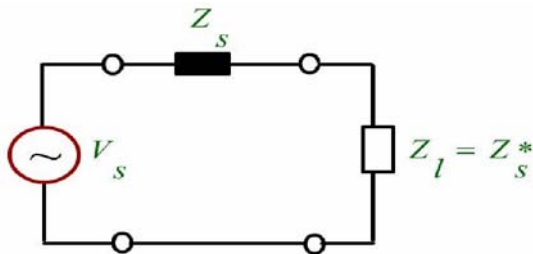
همیشه تحت شرایط فیلتری بوده و باند محدود خواهد گردید. در واقع اگر بخواهیم نویز حرارتی مقاومتی را در رابطه با سایر عناصر و مدارها بررسی نمائیم با مساله انتقال توان روبه رو خواهیم بود. بنابراین یک مقاومت نویز R را می توان با یک مقاومت بدون نویز R و یک منبع توتن ولتاژ یا جریانی نویز جایگزین کرد.



بدیهی است که چگالی طیفی نویز حرارتی جریان برابر است با:

$$S_{ni}(f) = S_{nv}(f) / R^2 = \frac{2KT}{R} [A^2 / Hz]$$

برای بدست آوردن حداکثر توانی که یک مقاومت نویزی می تواند به بار تحویل دهد از قضیه انتقال توان حداکثر استفاده می کنیم، که بیان می دارد انتقال توان حداکثر فقط هنگامی رخ می دهد که امپدانس بار مزدوج مختلط امپدانس منبع باشد. در چنین حالتی گفته می شود که بار با منبع تطبیق شده است. اگر منبع سینوسی نشان داده شده در شکل دارای امپدانس $Z_s = R_s + jX_s$ و ولتاژ مدار باز منبع V_s باشد در این صورت تحت شرایط تطبیق امپدانس $Z_l = Z_s^* = R_s - jX_s$ بوده و ولتاژ ترمینال V_s می گردد.



در این حالت حداکثر توان در دسترس به بار Z_l رسیده که عبارت خواهد بود از :

$$p_a = \frac{\left\langle \left[\frac{V_s(t)}{2} \right]^2 \right\rangle}{R_s} = \frac{\langle V_s^2(t) \rangle}{4R_s}$$

با استفاده از مدل تونن مفهوم فوق را به مقاومت حرارتی اعمال کرده و با مقایسه می توان نتیجه گرفت که چگالی طیفی توان در دسترس نویز حرارتی در مقاومت بار برابر است با:

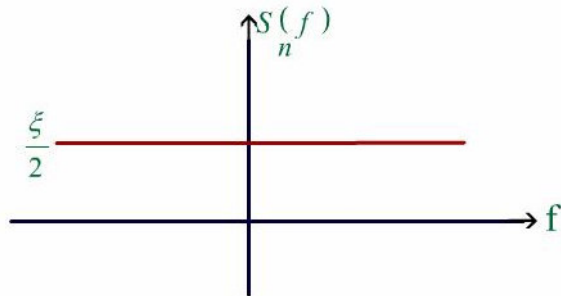
$$S_a(f) = \frac{S_{nv}(f)}{4R} = \frac{1}{2} KT [W / Hz]$$

از این رابطه دیده می شود که مقاومت حرارتی حداکثر $\frac{KT}{2}$ وات بر هرتز به بار تطبیق شده تحویل می دهد و این توان مستقل از مقدار مقاومت R است.

در ادامه برای سادگی محاسبات $S_n(f) = \eta / 2$ رادر نظر می گیریم که η برای منبع ولتاژ $4KTR$ و برای منبع جریان $\frac{4KT}{R}$ می باشد. در محاسبه $S_a(f)$ ، $\eta = KT$ می باشد.

به نویزی که تمام مؤلفه های فرکانسی اش هم اندازه می باشند اصطلاحاً نویز سفید گفته می شود.

نویز سفید بوده برای $S_n(f) = \frac{\eta}{2}$



تابع خود بستگی نویز سفید بدین ترتیب عبارت خواهد بود از:

$$R_n(\tau) = F^{-1}[S_n(f)] = \frac{\eta}{2} \delta(\tau) = \begin{cases} \frac{\eta}{2}, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

از طرفی چون نویز سفید استیشنری است پس می توان نوشت:

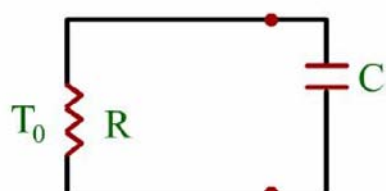
$$R_n(\tau) = E[n(t)n(t - \tau)]$$

باتوجه به مقدار بدست آمده برای $R_n(\tau)$ می توان گفت، اگر از نویز سفید نمونه برداری شود، نمونه ها از یکدیگر مستقل خواهند بود، چون همبستگی آنها صفر است.

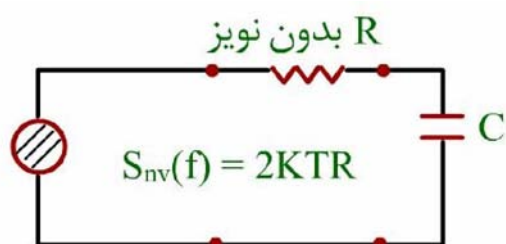
مثال:

توان خروجی نویز را موقعی که یک مقاومت دارای نویز به یک خازن وصل می شود بدست

آورید.



در ابتدا از معادل تونن مقاومت نویزی استفاده می کنیم و مدار معادل به شکل نشان داده شده در می آید.

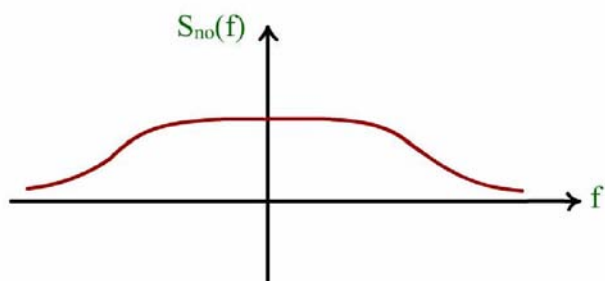


حال چگالی طیفی توان خروجی را می نویسیم.

$$S_{no}(f) = S_{ni}(f) |H(f)|^2 = 2kTR \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

$$B = \frac{1}{2\pi R C}$$

که اگر آن را رسم کنیم خواهیم دید در فرکانس های بالا، دامنه آن افت می کند که این در واقع مفهوم رنگی شدن نویز می باشد.



تابع خود بستگی نویز خروجی عبارت است از:

$$R_{no}(\tau) = F^{-1}[S_{no}(f)] = 2kTR \cdot \pi B e^{-2\pi B|\tau|} = \frac{KT}{c} \cdot e^{\frac{-|\tau|}{Rc}}$$

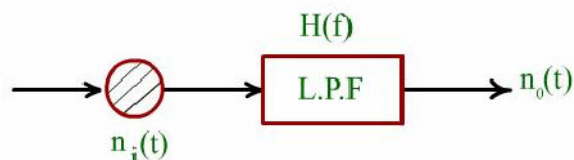
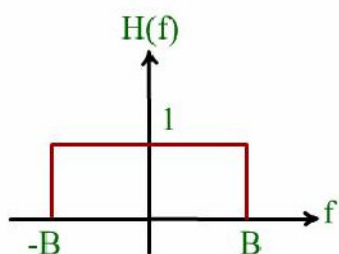
بدین ترتیب توان خروجی برابر خواهد شد با:

$$P_{no} = R_{no}(\tau = 0) = \frac{KT}{c}$$

مشاهده می‌شود که افزایش مقدار خازن C باعث کاهش مقدار توان نویز در خروجی می‌شود.

نویز فیلتر شده
(رنگی)

می خواهیم توان خروجی نویز را موقعی که از یک فیلترپایین گذار ایده ال با پهنای B عبور می کند، بدست آوریم.



$$S_{no}(f) = S_{ni}(f) |H(f)|^2 = \frac{\eta}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

بدین ترتیب تابع خود بستگی خروجی عبارت است از:

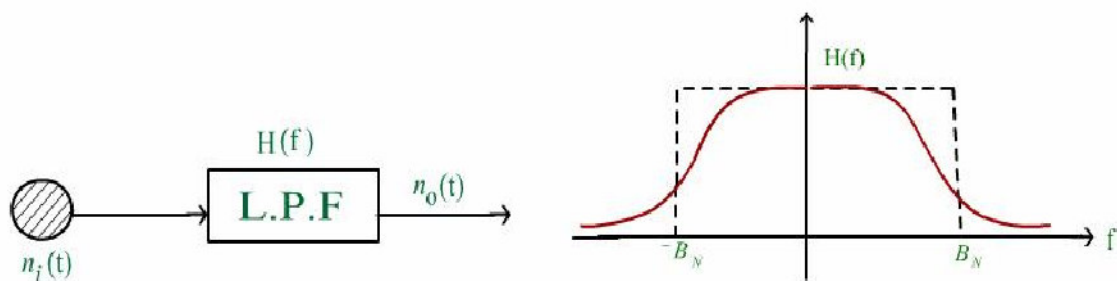
$$R_{no}(\tau) = F^{-1}\{S_{no}(f)\} = \frac{\eta}{2} \times 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) = \eta B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

از طرفی توان خروجی برابر مقدار تابع خودبستگی خروجی در مبدأ خواهد بود، یعنی:

$$P_{no} = R_{no}(\tau = 0) = \eta B$$

پهنای باند معادل
نویز

در اینجا فیلتر پایین گذر را یک فیلتر واقعی و عملی در نظر می گیریم.



در این صورت چگالی طیفی توان خروجی عبارت است از:

$$S_{no}(f) = S_{ni}(f) |H(f)|^2 = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

توان خروجی از انتگرال گیری این عبارت بدست می آید.

$$P_{no} = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \eta \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

حال فرض کنید می خواهیم توان نویز خروجی را در صورت استفاده نمودن از یک فیلتر ایده آل با پهنای باند B_N بدست آوریم.

در این حالت:

$$S_{n0}(f) = S_{ni}(f) |H(f)|^2 = \frac{\eta}{2} |H(0)|^2 \Pi\left(\frac{f}{2B_N}\right)$$

که در آن $|H(o)|$ مقدار حداکثر تابع تبدیل $H(f)$ می باشد. در این صورت:

$$R_{n0}(\tau) = F^{-1}(S_{n0}(f)) = \eta B_N |H(0)|^2 \sin c(2 B_N \tau)$$

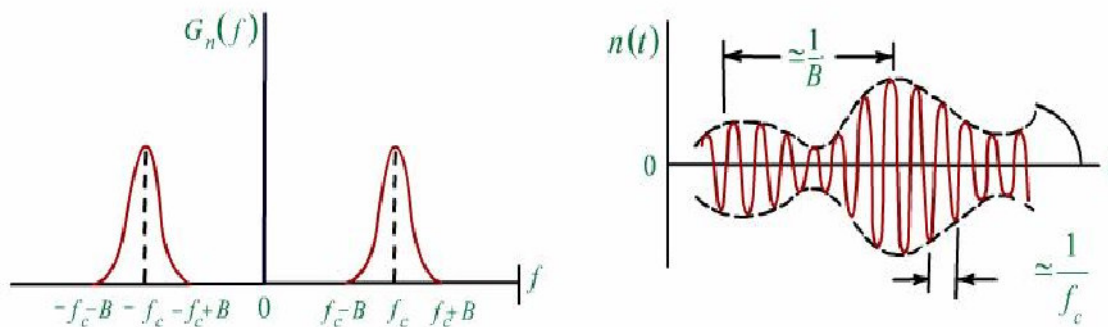
$$P_{n0} = R_{n0}(\tau = 0) = \eta B_N |H(0)|^2$$

با مقایسه ی توان نویز خروجی در دو حالت مورد نظر پهنای باند معادل نویز بصورت زیر بدست می آید.

$$B_N = \frac{1}{|H(0)|^2} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

نویز میانگذر

معمولاً در سیستمهای گیرنده جهت جلوگیری از ورود نویز اضافی به سیستم از فیلترهای باند باریک که در آنها فرکانس مرکزی از پهنای باند خیلی بزرگتر است استفاده می شود. فرایند نویزی که در خروجی چنین فیلترهایی ظاهر می شود، نویز میانگذر باند باریک نامیده می شود.



باتوجه به شکل، مؤلفه های طیفی نویز باند باریک حول فرکانس مرکزی $\pm f_c$ متمرکز شده و تابع نمونه چنین فرآیندی مشابه یک موج سینوسی با فرکانس f_c است که دامنه و فاز آن بطور آهسته مطابق شکل تغییر می نماید. اکنون اگر نویز سفید گاوسی با متوسط صفر و چگالی طیفی توان دوطرفه $\frac{\eta}{2}$ به فیلتری میانگذر با تابع تبدیل $H(f)$ اعمال شود چگالی طیفی توان نویز میانگذر باند باریک ظاهر شده در خروجی فیلتر عبارت است از:

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

در واقع هر نویز باند باریکی را که در عمل مطرح می شود می توان به صورت نویز خروجی فیلتر میانگذری که ورودی آن نویز سفید است در نظر گرفت. در ادامه نویز باند باریک را بر حسب مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن بیان می کنیم.

اگر $n_+(t), \tilde{n}(t)$ به ترتیب پیش پوش و پوش مختلط نویزبند باریک $n(t)$ باشند وبا فرض اینکه طیف توان $n(t)$ حول فرکانس f_c متمرکز است، می توان نوشت:

$$n_+(t) = n(t) + j\hat{n}(t)$$

$$\tilde{n}(t) = n_+(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

که در آن $\hat{n}(t)$ تبدیل هیلبرت $n(t)$ است و پوش مختلط $\tilde{n}(t)$ را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\tilde{n}(t) = n_c(t) + jn_s(t)$$

با ترکیب روابط فوق می توان مؤلفه همفاز و تربیعی نویز را برحسب $n(t)$ و تبدیل هیلبرت آن یعنی $\hat{n}(t)$ نوشت:

$$n_c(t) = n(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{n}(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$n_s(t) = \hat{n}(t)\cos(2\pi f_c t) - n(t)\sin(2\pi f_c t)$$

از ترکیب روابط فوق و حذف $\hat{n}(t)$ ، می توان نویز میان گذر باند باریک را برحسب مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن بیان کرد.

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

از روابط فوق می توان خواص مؤلفه های هم فاز و تربیعی نویز را بیان کرد که بدون اثبات آنها را ذکر می کنیم.

خاصیت ۱: اگر متوسط نویز باند باریک $n(t)$ صفر باشد در این صورت مؤلفه های همفاز و تربیعی آن نیز دارای متوسط صفر خواهند بود.

خاصیت ۲: اگر نویز باند باریک $n(t)$ گاوسی باشد در این صورت مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن نیز گاوسی خواهند بود.

خاصیت ۳: اگر نویز باند باریک $n(t)$ ایستاد باشد، مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن نیز ایستاد خواهند بود.

خاصیت ۴: هر دو مؤلفه هم فاز $n_c(t)$ و تربیعی $n_s(t)$ دارای چگالی طیفی توانی می باشند که با چگالی طیفی توان $S_n(f)$ نویز باند باریک اصلی $n(t)$ ، بصورت زیر مرتبط هستند:

$$S_{nc}(f) = S_{ns}(f) = \begin{cases} S_n(f - f_c) + S_n(f + f_c) & -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

خاصیت ۵: اگر متوسط نویز میانگذر باند باریک $n(t)$ صفر باشد، واریانس مؤلفه های متعامد $n_c(t)$ ، $n_s(t)$ با واریانس $n(t)$ برابر هستند.

خاصیت ۶: اگر نویز باند باریک $n(t)$ گاوسی با متوسط صفر بوده و چگالی طیفی توان آن $S_n(f)$ حول فرکانس مرکزی $\pm f_c$ متقارن باشد، در این صورت نویز همفاز $n_c(t)$ و نویز تربیعی $n_s(t)$ بطور آماری مستقل هستند.

فصل پنجم:

فرآیندهای تصادفی و نویز

درجه حرارت مؤثر نویز

درجه حرارت
مؤثر نویز

فرض کنید سیستمی مطابق شکل دارای بهره در دسترس g_a پهنای باند معادل نویز B_N باشد. این سیستم خودش به اندازه ΔN به نویز ورودی اش اضافه می کند. در واقع این نویز، نویز تولید شده توسط عناصر سیستم می باشد. این سیستم به وسیله یک منبع تطبیق شده تحریک می شود و خروجی اش به یک بار تطبیق متصل است.



توان سیگنال خروجی از این سیستم از حاصل ضرب سیگنال در دسترس ورودی در گین در دسترس شبکه بدست می آید:

$$S_o = S_i g_a$$

همچنین نویز خروجی عبارت است از:

$$N_o = g_a N_i + \Delta N$$

جایی که N_i عبارت است از:

$$N_i = \xi_a B_N = K T_i B_N$$

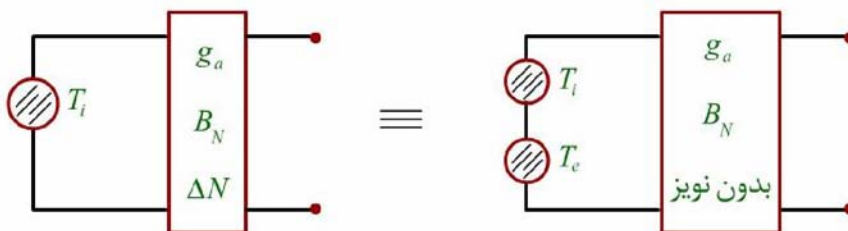
در این رابطه T_i ، درجه حرارت نویز معادل می باشد. بدین ترتیب نویز خروجی را با ترکیب روابط فوق می توان بدین صورت نوشت:

$$N_o = KT_i B_N g_a + \Delta N = g_a KB_N \left(T_i + \frac{\Delta N}{g_a KB_N} \right) = g_a KB_N (T_i + T_e)$$

که در آن T_e از رابطه‌ی:

$$T_e = \frac{\Delta N}{g_a KB_N}$$

بدست می آید و درجه حرارت مؤثر نویز نامیده می شود .



بنابراین نویز خروجی از یک منبع حرارتی نویزی که درجه حرارت آن T_i و مقدار ΔN به نویز ورودی اضافه می کند معادل است با منبع بدون نویزی که درجه حرارت نویز آن $T_i + T_e$ می باشد .
با استفاده از روابط فوق می توان نسبت سیگنال به نویز خروجی را بر حسب سیگنال به نویز ورودی نوشت :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{S_o}{N_o} = \frac{g_a S_i}{KB_N g_a T_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)} = \frac{S_i}{KB_N T_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)} = \left(\frac{S_i}{N_i}\right) \frac{1}{1 + \frac{T_e}{T_i}}$$

$$= \left(\frac{S}{N}\right)_i \frac{1}{1 + \frac{T_e}{T_i}}$$

با میل کردن $\frac{T_e}{T_i} \rightarrow 0$ ، کیفیت سیگنال خروجی به کیفیت سیگنال ورودی نزدیک تر و شبیه تر شده و در نتیجه می توان گفت که T_e معیاری برای نویز داخلی مدار دو سر می باشد. در یک دو پورته بدون نویز $T_e = 0$ است. در غیر این صورت نویزی به اندازه $g_a KB_N T_a$ به خروجی مدار اضافه می شود.

معیار دیگری که می توان برای بیان نویز داخلی اضافی یک مدار دو سر به کاربرد عدد نویز است که با F نشان داده می شود.

عدد نویز بنا بر تعریف نسبت کل توان نویز در خروجی سیستم به توان نویز در خروجی سیستم مشروط بر آن که سیستم بدون نویز بوده و منبع نویز ورودی مدار در درجهی محیط یا $T_0 (290^\circ K)$ یا $17^\circ C$ قرار داشته باشد .

$$F = \frac{N_0}{k B_N g_a T_0} ; \quad N_0 = k B_N g_a T_0 \left(1 + \frac{T_e}{T_0} \right)$$

بنابراین طبق روابط فوق می توان عدد نویز را بر حسب درجهی حرارت محیط (T_0) و درجهی حرارت مؤثر نویز (T_e) نوشت .

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

از این رابطه پیداست که در حالت کلی $F \geq 1$ است و در یک مدار بدون نویز $F = 1$ می باشد .
با توجه به رابطه بدست آمده برای عدد نویز و رابطه ای که در قسمت قبل برای سیگنال به نویز خروجی بر حسب سیگنال به نویز ورودی بدست آوردیم ، عدد نویز را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد .

$$F = \frac{\left(\frac{S}{N} \right)_i}{\left(\frac{S}{N} \right)_0} \bigg|_{T_i = T_0}$$

مفهوم عدد نویز را می توان به وسایلی مانند تضعیف کننده ها که بجای بهره ی توان دارای اتلاف هستند نیز اعمال نمود .
اگر چنین وسایلی منحصراً از عناصر مقاومتی که در تعادل حرارتی با درجه حرارت T_0 هستند تشکیل یافته باشند، در این صورت توان نویز در دسترس خروجی برابر است با:

$$N_0 = kT_0 B_N$$

از طرف دیگر با توجه به این که درجه‌ی حرارت ورودی این گونه وسایل T_0 است می توان نوشت $(T_i = T_0)$

$$N_0 = kB_N T_0 \left(1 + \frac{T_e}{T_0} \right) \frac{1}{L}$$

در این رابطه $g = \frac{1}{L}$ و L اتلاف توان تضعیف کننده است . با مساوی قرار دادن دو عبارت فوق برای N_0 نتیجه می گیریم :

$$F = L$$

فصل پنجم: فرآیندهای تصادفی و نویز

عدد نویز کلی دو ماژول کسکید
(Cascade) – قسمت ۱

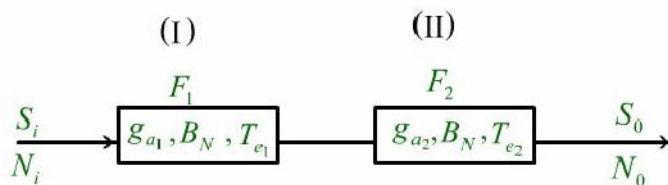
عدد نویز کلی دو
ماژول کسکید
(Cascade)

فرض کنید دو ماژول با مشخصات ذکر شده مطابق شکل به هم متصل شده باشند.

می خواهیم عدد نویز کلی این مجموعه را محاسبه کنیم .

نویز خروجی ماژول (I) عبارت است از:

$$N_{0_1} = KB_N g_{a_1} T_0 \left(1 + \frac{T_{e_1}}{T_0} \right) = KB_N g_{a_1} T_0 F_1$$



همچنین نویز اضافه ماژول (II) عبارت است از :

$$\Delta N_2 = KB_N g_{a_2} T_{e_2} = kB_N g_{a_2} (F_2 - 1) T_0$$

بدین ترتیب نویز خروجی کل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} N_0 &= g_{a_2} N_{0_1} + \Delta N_2 = g_{a_2} g_{a_1} KB_N T_0 F_1 + KB_N g_{a_2} T_0 (F_2 - 1) \\ &= g_{a_1} g_{a_2} KB_N T_0 \left(F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_{a_1}} \right) \end{aligned}$$

از تقسیم عبارت فوق بر $g_{a_1} g_2 KB_N T_0$ ، که در واقع نویز خروجی این سیستم است به شرطی که هردو ماژول بدون نویز باشند، عدد نویز دو سیستم متوالی یا کسکید به دست می آید.

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_{a_1}}$$

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_{a_1}}$$

نتیجه فوق را می توان به n طبقه که به صورت متوالی قرار گرفته اند تعمیم داد :

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_{a_1}} + \frac{F_3 - 1}{g_{a_1} g_{a_2}} + \dots + \frac{F_n - 1}{g_{a_1} g_{a_2} \dots g_{a_{n-1}}}$$

در میزان عدد نویز مؤثر خواهد بود.

رابطه فوق که به فرمول فری (Friis Formula) معروف است نشان می دهد که عدد نویز کل شدیداً به عدد نویز طبقه اول وابسته است. بنابراین طبقه اول هر گیرنده باید دارای عدد نویز پایین و بهره ی توان بالا باشد تا حتی الامکان عدد نویز کلی سیستم را خراب نکند. رابطه فوق را می توان بر حسب درجه حرارت مؤثر نویز نیز طبقات متوالی نوشت.

$$T_e = T_{e_1} + \frac{T_{e_2}}{g_1} + \frac{T_{e_3}}{g_1 g_2} + \dots + \frac{T_{e_n}}{g_1 g_2 \dots g_{n-1}}$$

توجه داشته باشید که گین در عبارات فوق همگی به صورت عددی می باشند و اگر بخواهیم گین را با واحد dB (دسیبل) بیان کنیم باید از آن لگاریتم مبنای ۱۰ گرفته و حاصل را در ۱۰ ضرب کنیم. مثلاً گین ۱۰، برابر است با $10 \log 10 = 10 \text{ dB}$ و گین ۱۰۰ برابر $10 \log 100 = 20 \text{ dB}$ همچنین توان را علاوه بر واحد وات می توان به صورت dBw یا با واحد معروف dBm بیان کرد.

$$A[\text{dBw}] = 10 \log \left[\frac{A_w}{1^w} \right]$$

$$A[\text{dB}_m] = 10 \log \left[\frac{A(\text{mw})}{1 \text{mw}} \right]$$

به عنوان مثال یک وات، عبارت است از $10 \log \frac{1^w}{1^w} = 0 \text{ dBw}$ و یا $10 \log \frac{1000 \text{mw}}{1 \text{mw}} = 30 \text{ dBm}$

فصل پنجم:

فرآیندهای تصادفی و نویز

مثال قسمت ۱

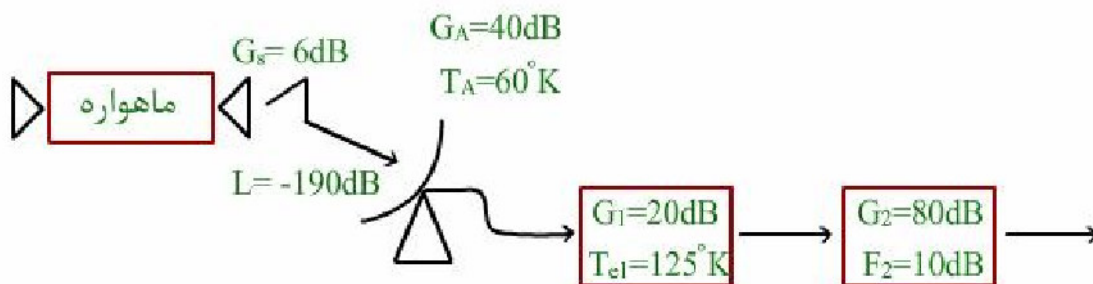
مثال :

یک ایستگاه زمینی که سیگنال های ماهواره ای را دریافت می کند دارای آنتن با بهره ی ۴۰dB و درجه ی حرارت نویز $60^\circ K$ است (یعنی مانند یک مقاومت دارای نویز در درجه ی حرارت فیزیکی $60^\circ K$ تولید نویز می کند) است. آنتن مذکور پیش تقویت کننده ای را با درجه ی حرارت مؤثر نویز ورودی $125^\circ K$ و بهره 20dB تغذیه می نماید. پیش تقویت کننده به تقویت کننده ای با عدد نویز 10dB و بهره 80dB متصل است. پهنای باند انتقال 1MHz بوده و آنتن ماهواره دارای بهره 6dB می باشد. اگر افت سیگنال در طول مسیر 19dB باشد، میزان توان نویز خروجی را در آخرین طبقه ی گیرنده بدست آورید. با فرض این که گیرنده برای آشکار سازی سیگنال به حداقل 20dB، $\frac{S}{N}$ احتیاج دارد، توان لازم فرستنده ماهواره ای را حساب کنید.

توان نویز خروجی از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$N_o = k B_N g_a (T_a + T_e)$$

g_a که در آن بهره ی توان کلی دو سیستم می باشد و برابر است با: $80dB + 20dB = 100dB$ و T_e درجه ی حرارت مؤثر نویز دو سیستم کسکید شده یا متوالی می باشد. (توجه داریم که گین دو واحد کسکید شده به صورت dB با هم جمع می شوند و به صورت عددی در هم ضرب می شوند.)



برای بدست آوردن نویز خروجی پارامتر مجهول T_e است، که باید محاسبه شود.

$$T_e = T_{e_1} + \frac{T_{e_2}}{g_1}$$

$$T_{e_1} = 125^\circ K; T_{e_2} = (F_2 - 1)T_0 = \left(10^{\frac{10}{10}} - 1\right) \times 290 = 2610^\circ K \square$$

$$g_1 = 10^{\frac{20}{10}} = 100$$

بدین ترتیب:

$$T_e = 125 + \frac{2610}{100} = 151.1^\circ K$$

و نهایتاً:

$$N_o = KB_N g_a (T_A + T_e) = 1.381 \times 10^{-23} \times 10^6 \times 10^{\frac{100}{10}} (60 + 151.1) \\ = 29.1 \mu W$$

بدین ترتیب توان نویز خروجی بدست آمد، که اگر آن را بر حسب dB_m بنویسیم خواهیم داشت:

$$N_o = 10 \log \left[\frac{29.1 \times 10^{-3} \text{ mw}}{1 \text{ mw}} \right] = -15.36 \text{ dB}_m$$

با توجه به اینکه $\left(\frac{S}{N} \right)_o = 20 \text{ dB}$ مورد قبول است.

$$S_o = -15.36 \text{ dB}_m + 20 \text{ dB} = 4.64 \text{ dB}_m$$

رابطه زیر را می توان بین سیگنال ارسالی و دریافتی نوشت:

$$[p_t]_{\text{dB}_m} + G_S + L + G_A + G_1 + G_2 = S_o$$

$$[p_t]_{\text{dB}_m} + 6^{\text{dB}_m} - 190^{\text{dB}_m} + 40^{\text{dB}_m} + 20^{\text{dB}_m} + 80^{\text{dB}_m} = 4.64^{\text{dB}_m}$$

$$\Rightarrow [p_t] = 48.64 \text{ dB}_m = 73.11 \text{ watt}$$

انتقال
سیگنال
باند پایه

دیاگرام بلوکی ساده یک سیستم انتقال باند پایه آنالوگ در شکل نشان داده شده است.

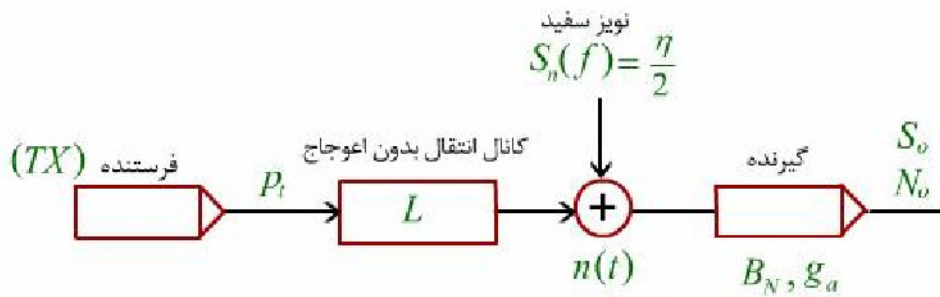
فرستنده توان p_t را ارسال می کند این سیگنال به کانال بدون اعوجاج وارد شده و با ضریب $\frac{1}{L}$ تضعیف می شود . هم چنین تمام نویز سیستم را به صورت یک نویز جمع شونده در ورودی گیرنده در نظر می گیریم . گیرنده دارای گین g_a و پهنای باند معادل نویز B_N می باشد. سیگنال و نویز خروجی را با فرض های فوق می توان بدین صورت نوشت:

$$S_o = p_t \frac{g_a}{L} \quad \text{و} \quad N_o = \eta B_N g_a = K T_e B_N g_a$$

پس سیگنال به نویز خروجی عبارت است از:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{p_t g_a / L}{\eta B_N g_a} = \frac{p_t}{\eta B_N L}$$

رابطه فوق نشان می دهد که برای افزایش سیگنال به نویز علاوه بر افزایش p_t یا توان فرستنده و کاهش B_N یا پهنای باند معادل نویز، می توان افت کانال انتقال را نیز کاهش داد. بنابراین برای کم کردن L ، در طول مسیر، تکرار کننده یا Repeater قرار می دهیم ، که بلوک دیاگرام آن در شکل زیر آورده شده است.

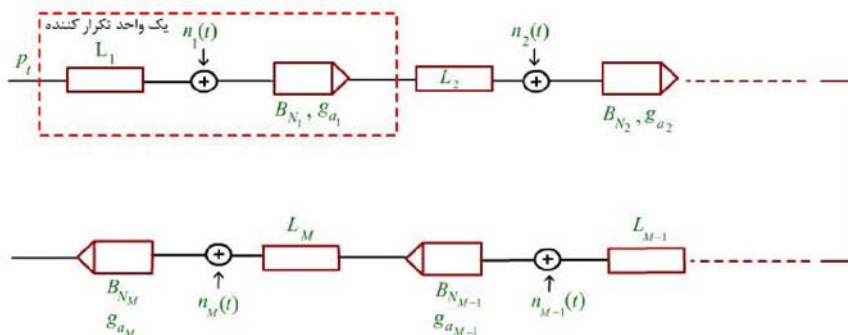


این مجموعه از M واحد تکرار کننده تشکیل شده است. توان سیگنال خروجی در این سیستم را می توان از رابطه زیر حساب کرد.

$$S_o = p_t \left(\frac{g_1}{L_1} \right) \left(\frac{g_2}{L_2} \right) \left(\frac{g_3}{L_3} \right) \dots \left(\frac{g_M}{L_M} \right)$$

همچنین توان نویز خروجی عبارت است از :

$$N_o = \eta_M B_{N_M} g_M + \eta_{M-1} B_{N_{M-1}} g_{M-1} \frac{g_M}{L_M} + \dots + \eta_1 B_{N_1} g_1 \frac{g_2}{L_2} \frac{g_3}{L_3} \times \dots \times \frac{g_M}{L_M}$$



اگر شرایط زیر را برقرار نمائیم یعنی :

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = \dots = L_M = L \\ g_1 = g_2 = \dots = g_M = g \\ \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_M = \eta \\ B_{N_1} = B_{N_2} = \dots = B_{N_M} = B_N \end{cases}$$

در واقع کلیه ی تکرار کننده ها را یکسان فرض کرده ایم.

حال اگر نسبت های $\frac{g}{L}$ را x بنامیم، یعنی:

$$x = \frac{g_1}{L_1} = \frac{g_2}{L_2} = \dots = \frac{g_M}{L_M}$$

توان سیگنال خروجی و نویز خروجی به ترتیب از روابط زیر بدست می آیند:

$$S_o = P_t x^M$$

$$N_o = \eta B_N g [1 + x + x^2 + \dots + x^{M-1}] = \eta B_N g \frac{x^M - 1}{x - 1}$$

بنابراین سیگنال به نویز خروجی عبارت است از:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{P_t}{\eta B_N g} \frac{x^M (x - 1)}{x^M - 1}$$

در سیستم های عملی معمولاً میزان تقویت را در هر بخش به گونه ای تنظیم می کنند که افت کانال را جبران کند. یعنی $x = 1$ فرض شود.

$$S_o = P_t$$

در این حالت خواهیم داشت :

$$N_o = \eta B_N g.M = \eta B_N L.M$$

بنابراین سیگنال به نویز خروجی عبارت خواهد شد :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_t}{\eta B_N L M}$$

اگر افت کل مسیر را L_T بنامیم از رابطه زیر بدست می آید :

$$L_T = L_1 L_2 \dots L_M = L_1^M = L^M \Rightarrow L = \sqrt[M]{L_T}$$

پس سیگنال به نویز خروجی خواهد شد :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{p_t}{\eta B_N \cdot M \cdot \sqrt[M]{L_T}}$$

برای بدست آوردن تعداد بهینه تکرار کننده ها از رابطه ی $\frac{d}{dM} \left(\left(\frac{S}{N} \right)_o \right) = 0$ استفاده می کنیم. که در این

صورت خواهیم داشت :

$$M_{opt} = \ln(L_T) = 0.23 L_T (dB)$$

مثال

می خواهیم بین دو شهر ارتباط *base-band* کابلی برقرار کنیم . فرض کنید،

فاصله بین دو شهر ۱۰۰ کیلومتر و افت کابل $\alpha = 3 \text{ dB/Km}$ باشد . همچنین طیف چگالی قدرت نویز را

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} = -170 \text{ dB}_m/\text{Hz}$$

باشد ، M_{opt} و سیگنال به نویز ماکزیمم را بدست آورید. همچنین اگر $\frac{S}{N}$ مورد نیاز ۵۰ dB باشد، تعداد تکرار

کننده ها را بدست آورید. با توجه به اینکه افت کل کابل 300 dB که در واقع 10^{30} می باشد، M_{opt} برابر است با:

$$M_{opt} = L n 10^{30} = 0.23 \times 300 = 69$$

بنابراین سیگنال به نویز خروجی در این حالت برابر است با :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = 30 - \left[-167 + 10 \log(5 \times 10^3) + 10 \log 69 + \frac{1}{69} 10 \log 10^3 \right]$$

$$= 137 \text{ dB}$$

اما اگر سیگنال به نویز خروجی مورد نیاز 50 dB باشد M را می توانیم از رابطه ی زیر بدست آوریم:

$$30 - \left[-167 + 10 \log(5 \times 10^3) + 10 \log M + \frac{300}{M} \right] \geq 50$$

که در این صورت $M=3$ بدست خواهد آمد.

مدولاسیون تغییر سیستماتیک یک شکل موج بنام حامل بر طبق مشخصه های موج دیگری بنام سیگنال مدوله گر یا پیام می باشد.

در مدولاسیون یکی از پارامترهای سیگنال پیام تغییر می کند.

در این میان مشخصات کانال مخابراتی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. هدف اصلی ، ایجاد یک موج مدوله شده حاوی اطلاعات است بطوری که خواص و مشخصه های آن برای سیستم مخابراتی مورد نظر بهتر و مناسب تر از سایر موجها باشد.

در این میان مشخصات کانال مخابراتی از اهمیت ویژه ای برخوردار است . در سیستم هایی با مدولاسیون خطی، حامل موج سینوسی است که بوسیله سیگنال آنالوگ مدوله می شود.

راديوهای AM و FM بهترین نمونه عملی این نوع مدولاسیون می باشند.

مدولاسیون های خطی پیوسته را می توان به انواع زیر تقسیم کرد.

۱-مدولاسیون دامنه (A.M) Amplitude Modulation

۲- مدولاسیون باند جانبی دوگانه (D.S.B) Double-Side-Band

۳- مدولاسیون تک باند جانبی (SSB) Single-Side-Band

۴- مدولاسیون باند جانبی اثری (VSB) Vestigial-Side- Band

در ادامه به بررسی یک یک انواع فوق در حوزه زمان و فرکانس و مقایسه مشخصات آنها خواهیم پرداخت.

مدولاسیون دامنه
(A.M)

چند فرض اولیه:

سیگنال پیام $x(t)$ دارای پهنای باند W باشد بنابراین چگالی طیف انرژی یا توان در خارج باند W مقدار صفر است.

$$S_x(f) = 0 \quad \text{for} \quad |f| < w$$

سیگنال نرمالیزه باشد.

$$S_x = \overline{x^2(t)} \leq 1$$

و بنابر این متوسط سیگنال پیام نیز محدود خواهد بود.

منبع پیام را ارگودیک فرض می کنیم (یعنی متوسط آماری و مجموعی سیگنال با هم برابرند)

رابطه موج مدوله
شده دامنه در حوزه
زمان

سیگنال حامل را می توان به شکل زیر نوشت:

$$C(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + F) = A_c \cos \omega_c t$$

فاز پیام فرکانس پیام دامنه پیام

در مدولاسیون های موج پیوسته خطی اغلب حامل یک سیگنال سینوسی با پایداری فرکانسی خوب است.

یک حامل سینوسی با سه مشخصه دامنه، فرکانس و فاز بطور کامل تعریف می شود.

در مدولاسیون دامنه (AM) دامنه موج حامل (A_c)، حول یک مقدار میانگین، بر حسب سیگنال پیام تغییر می‌کند.
و بدین ترتیب سیگنال مدوله شده دامنه در حوزه زمان به شکل زیر نوشته می‌شود.

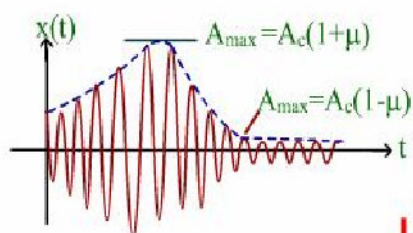
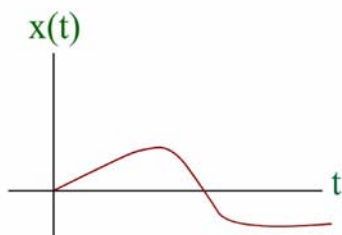
$$x_c(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \cos \omega_c t$$

$$= A_c \cos \omega_c t + A_c \mu x(t) \cos \omega_c t$$

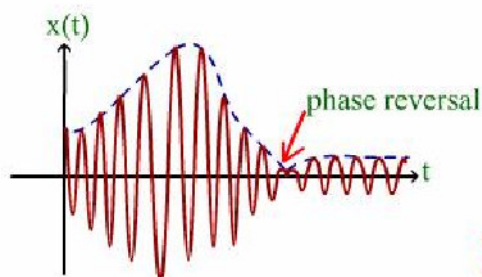
در این رابطه μ را اندیس مدولاسیون یا شاخص مدولاسیون یا درصد مدولاسیون می‌گویند.
این اندیس بیانگر بزرگی بخش حاوی اطلاعات رابطه فوق در مقایسه با خود حامل می‌باشد.

شکل موج زمانی
سیگنال AM

اگر شکل موج پیام را بدین صورت فرض کنیم با توجه به رابطه قبل شکل موج حوزه زمانی سیگنال AM در دو حالت $\mu < 1$ و $\mu > 1$ به صورت نشان داده شده درمی‌آید.



$\mu < 1$



$\mu > 1$

ملاحظه می‌شود که پوش سیگنال مدوله شده دارای شکل پیام است مشروط بر آنکه

$$۱) f_c \gg w$$

که در آن f_c فرکانس حامل و w عرض باند سیگنال پیام است.

$$۲) \mu \leq 1$$

در این حالت آشکار سازی سیگنال مدوله شده به راحتی و توسط مدار ساده آشکار ساز پوش که معرفی خواهد شد صورت می‌پذیرد.

در صورتیکه $f_c \gg w$ نباشد، نمی‌توان سیگنال پیام را در پوش سیگنال مدوله شده مشاهده نمود. در شرایط $\mu = 1$ که به مدولاسیون صد در صد موسوم است، حداکثر دامنه سیگنال AM به دو برابر دامنه حامل $A_{max} = 2A_c$ و حداقل آن به صفر خواهد رسید.

شرایط $\mu > 1$ که به مدولاسیون اضافی موسوم است، در پوش سیگنال AM اعوجاج رخ داده و در محل نشان داده شده (محل عبور از صفر سیگنال پیام) فاز سیگنال حامل معکوس می‌شود. در این حالت آشکار سازی سیگنال پیام از سیگنال مدوله شده AM به سادگی امکان پذیر نیست.



$$\begin{aligned} x_c &= A_c [1 + \mu x(t)] \cos \omega_c t \\ &= A_c \cos \omega_c t + A_c \mu x(t) \cos \omega_c t \end{aligned}$$

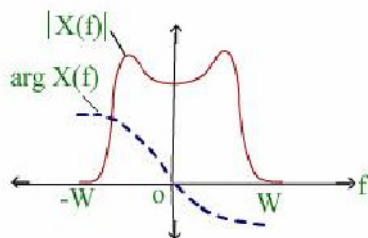
با تبدیل فوریه گرفتن از سیگنال حوزه زمانی موج مدوله AM و مرتب کردن آن برای فرکانسهای مثبت و منفی خواهیم داشت.

$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c (f + f_c) + \frac{\mu}{2} A_c X(f + f_c) \quad f < 0$$

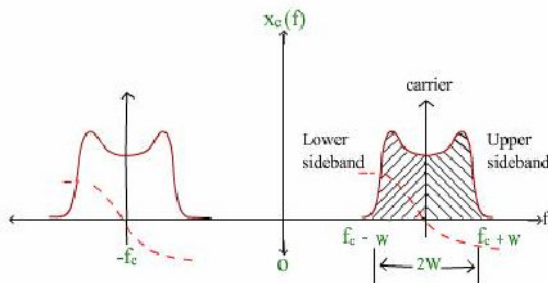
$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c \delta(f - f_c) + \frac{\mu}{2} A_c X(f - f_c) \quad f > 0$$

نمایش طیف
سیگنال AM

در صورتی که طیف سیگنال باند پایه پیام به شکل روبرو باشد.



طیف سیگنال مدوله شده دامنه به قرار زیر خواهد بود.



طیف سیگنال مدوله شده AM متشکل از دو ایمپالس در فرکانس حامل و باندهای جانبی متقارن حول $\pm f_c$ بوده و بدین علت این سیگنال را مدوله دامنه با باند جانبی دو گانه یا دو طرفه می نامند. دو باند جانبی فوقانی (بالایی) و تحتانی (پایینی) در شکل مشخص شده اند. همانطوریکه مشاهده می شود پهنای باند لازم برای انتقال این سیگنال دو برابر پهنای باند پیام است. $B_T = 2W$ در ضمن توجه داریم که شرط $f_c > W$ جهت عدم تداخل و روی هم افتادگی باندهای جانبی تحتانی در طیف سیگنال مدوله شده AM ضروری است. می باشد توان متوسط ارسالی سیگنال AM ی از پارامترهای مهمی است که در محاسبه راندمان به آن احتیاج داریم.

با توجه به تعریف توان متوسط به صورت

$$S_T \triangleq \langle x_c^2(t) \rangle$$

می توان توان متوسط سیگنال مدوله AM را به شکل زیر نوشت.

$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + 2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t) \rangle + \frac{1}{2} A_c^2 \langle [1 + \mu x(t)]^2 \cos 2\omega_c t \rangle$$

فرض می شود متوسط آماری سیگنال پیام یا مؤلفه DC سیگنال پیام که ارگودیک است صفر باشد این فرض در عمل نیز رعایت می شود. در واقع مدوله سازی AM برای ارسال سیگنالهایی با محتوای فرکانس پایین قابل توجه عملاً مورد استفاده قرار نمی گیرد. پس اگر داشته باشیم

$$\langle x(t) \rangle = 0 \text{ and } \langle x^2(t) \rangle = S_x$$

آنگاه

$$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x)$$

توجه داریم که جمله دوم که حاوی $\cos 2\omega_c t$ است به دلیل صفر

بودن میانگین این سیگنال حذف می شود.

$$S_T = P_c + 2P_{sb}$$

$$P_c = \frac{1}{2} A_c^2$$

$$P_{sb} = \frac{1}{4} A_c^2 \mu^2 S_x = \frac{1}{2} \mu^2 S_x P_c$$

راندمان یا کارایی سیستم مدوله سازی دامنه را می توان به صورت درصد توان مفید به توان ارسالی بیان کرد.

$$\eta = \frac{2 P_{sb}}{S_T} \times \%100 = \frac{\mu^2 S_x P_c}{P_c + \mu^2 S_x P_c} \times \%100 = \frac{\mu^2 P_x}{1 + \mu^2 P_x} \times \%100$$

حداکثر راندمان به ازای $\mu = 1$ و $P_x = 1$ بوده و برابر ۵۰ درصد است. در این حالت فقط نیمی از توان ارسالی حاوی اطلاعات است.

با توجه به رابطه توان متوسط سیگنال مدوله شده و تابع خودبستگی این سیگنال، می توان توان متوسط را به گونه ای دیگر نیز محاسبه کرد.

$$S_T = P_o = R_o(\tau)|_{\tau=0}$$

با توجه به رابطه زمانی سیگنال مدوله شده AM یعنی:

$$x_o(t) = x_c(t) + \mu x_c(t)x(t)$$

تابع خودبستگی و توان خروجی عبارت است از:

$$R_o(\tau) = R_c(\tau) + \mu^2 R_c(\tau)R_x(\tau) \text{ و } P_o = P_c + \mu^2 P_c P_x$$

اگر حامل کسینوسی باشد $x_c(t) = A_c \cos \omega_c t$ خواهیم داشت:

$$R_o(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \cos \omega_c \tau + \mu^2 \frac{A_c^2}{2} \cos \omega_c \tau R_x(\tau)$$

و توان خروجی عبارت خواهد شد از :

$$P_o = S_T = R_o(\tau = 0) = \frac{A_c^2}{2} + \mu^2 \frac{A_c^2}{2} P_x$$

که جمله اول توان کریر ارسال شده و جمله دوم توان سیگنال در دو باند جانبی فوقانی و تحتانی می باشد، که همان رابطه قسمت قبل است.

Single Tone Modulation

مدولاسیون
تک نوا (تن)

تعریف مدولاسیون تک نوا (تن) اگر سیگنال پیام تک فرکانس باشد ، یعنی:

$$x(t) = Am \cos(2\pi f_m t)$$

راندمان مدولاسیون تک نوا (تن) مدولاسیون را (Tone) می گویند.

دراین حالت و داریم:

$$Am = 1 \Rightarrow P_x = \frac{1}{2} \text{ if } \mu = 1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{3} = \% 33$$

مدولاسیون باند
جانبی دو گانه
(DSB)

در مدولاسیون AM توان کریر ارسال شده باعث کاهش راندمان می شود جهت حذف این عامل و افزایش راندمان از مدولاسیون باند جانبی دو گانه (DSB) استفاده می شود با حذف حامل از سیگنال مدوله شده دامنه AM به سیگنال DSB خواهیم رسید. بدین ترتیب رابطه زمانی این نوع مدولاسیون را می توان به شکل زیر نوشت.

$$x_c(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$$

روابط ریاضی
طیف سیگنال
DSB

$$x_c(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$$

با تبدیل فوریه گرفتن از رابطه‌ی زمانی طیف سیگنال DSB بصورت زیر بدست می آید.

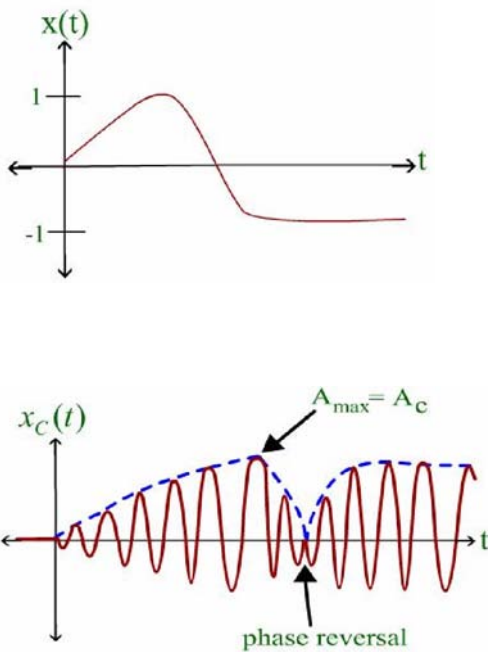
$$X_c(f) = \frac{1}{2} A_c X(f - f_c) \quad f > 0$$

ملاحظه می گردد که همان طیف AM است بدون ایمپالس های مربوط به حامل مدوله نشده. با توجه به رابطه زمانی سیگنال DSB پوش و فاز آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A(t) = A_c |x(t)| \quad \phi(t) \begin{cases} 0, & x(t) > 0 \\ \pm 180^\circ & x(t) < 0 \end{cases}$$

همانطور ی که در شکل نمونه زیر مشاهده می شود، پوش سیگنال مدوله شده به جای $x(t)$ به شکل $|x(t)|$ در می آید .

در ضمن در محل عبور از صفر سیگنال $x(t)$ فاز سیگنال مدوله شده **DSB** معکوس می شود . دانستن این عبور از صفر برای آشکار سازی مجدد سیگنال پیام از سیگنال مدوله شده لازم است . توجه داریم که سیگنال مدوله شده **DSB** توسط آشکار ساز دامنه قابل آشکار سازی نمی باشد .



جهت مقایسه و توضیح بیشتر دو نوع مدولاسیون AM و DSB، مثال ساده

مدولاسیون نوا (تن) را در نظر می گیریم. عبارت مربوط به شکل موج DSB در مدولاسیون تن به

شکل زیر خواهد بود.

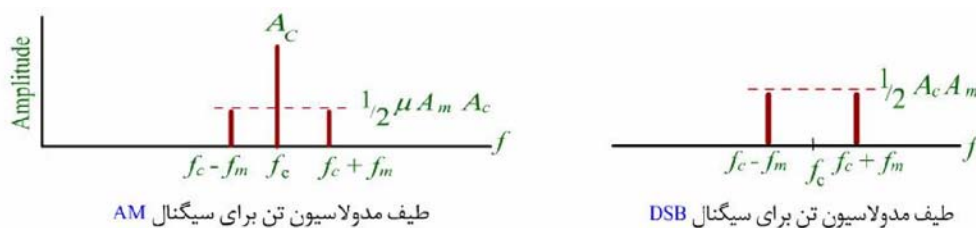
$$x_c(t) = A_c A_m \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

$$= \frac{A_c A_m}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c A_m}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t$$

حال آنکه عبارت مربوط به شکل موج AM در مدولاسیون تن دارای جمله‌ی اضافی حامل (جمله اول) و به قرار زیر در می آید.

$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c \mu A_m}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c \mu A_m}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t$$

با تبدیل فوریه گرفتن از دو سیگنال زمانی و رسم طیف آنها اشکال زیر حاصل می‌شوند.



همان طوری که مشاهده می شود، طیف سیگنال DSB فقط شامل دو باند جانبی حاوی اطلاعات

است و بنابراین توان ارسالی در این نوع مدولاسیون عبارت خواهد بود از

$$S_T = 2 P_{sb} = \frac{1}{2} A_c^2 S_x$$

و به عبارتی دارای راندمان صد در صد است.

نکته قابل ذکر دیگر اینکه فرستنده‌ها از نظر پیک توان ارسالی محدودیت می‌باشند. توجه داریم

که حداکثر دامنه در مدولاسیون AM $A_{\max} = 2 A_c$ می‌باشد در حالیکه در مدولاسیون

DSB این تعداد به $A_{\max} = A_c$ تقلیل می‌یابد. جهت بررسی و مقایسه این موضوع اغلب

نسبت توان باند جانبی به A_{\max} را به عنوان معیار محاسبه می‌کنند.

$$\frac{P_{sb}}{A_{\max}^2} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{4} \mu^2 A_c^2 S_x}{4 A_c^2} = \frac{1}{16} \mu^2 S_x, \mu = 1 \Rightarrow \frac{1}{16} S_x \\ \frac{\frac{1}{4} A_c^2 S_x}{A_c^2} = \frac{1}{4} S_x \end{cases}$$

برای حالت AM

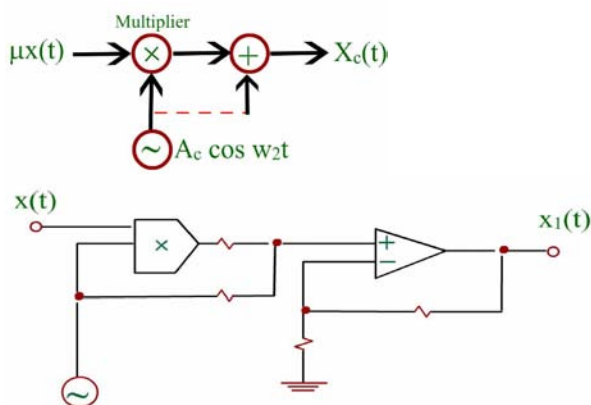
برای مدولاسیون DSB

مدولاتورهای
DSB و AM

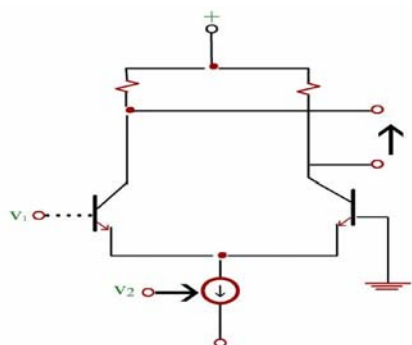
- ۱- Product Modulator مدولاتورهای حاصل ضربی
- ۲- square law modulator مدولاتور قانون مربع
- ۳- switching modulator مدوله کننده های سوئیچینگ
- ۴- Balanced Modulator مدولاتور متعادل
- ۵- Ring Modulator مدولاتور حلقوی

مدولاتور
حاصل ضربی

یکی از روش های معمول، ساده و موفق در فرکانس های پایین برای مدولاتور AM استفاده از ضرب کننده های خطی است. بلوک دیاگرام لازم برای تولید سیگنال مدوله AM طبق رابطه زمانی سیگنال مزبور به قرار زیر است. این مدار حاوی یک ضرب کننده و یک جمع کننده است.



مدارهای نمونه برای ضرب کننده و کل مدولاتور ملاحظه می گردد.



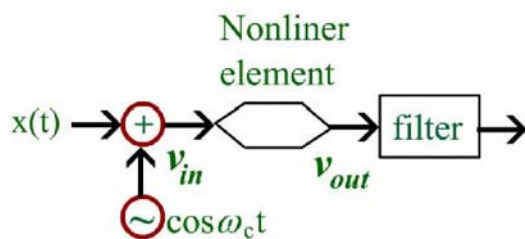
مدولاتور
قانون مربع

استفاده از عناصر غیر خطی برای ضرب دو سیگنال یکی دیگر از راه حل هایی است که در مدولاتورهای AM و DSB مورد استفاده دارد . همان طور که در شکل ملاحظه می شود ،(ابتدا دو سیگنال با هم به سادگی جمع شده) و (سپس وارد عنصر غیر خطی می شوند.) برای انجام عمل ضرب لازم است که عنصر غیر خطی جمله درجه دوم داشته باشد .روابط زیر تولید جمله ضرب شده را توسط یک عنصر غیر خطی با مشخصه درجه ۲ نشان می دهد.همانطور که ملاحظه می شود جملات متعدد دیگری علاوه بر جمله مطلوب ضرب دو سیگنال در خروجی عنصر غیر خطی پدید می آید که لازم است توسط فیلتر حذف شوند.

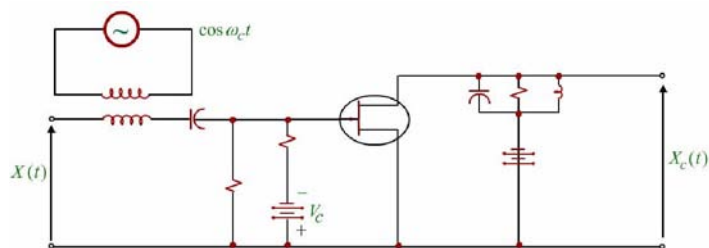
بخشهای تشکیل دهنده

۱- جمع کننده (ترانس)

۲-عنصر غیر خطی (FET)



۳-فیلتر (RLC)



اگر:

$$v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2$$

$$v_{in}(t) = X(t) = X(t) + \cos \omega_c t,$$

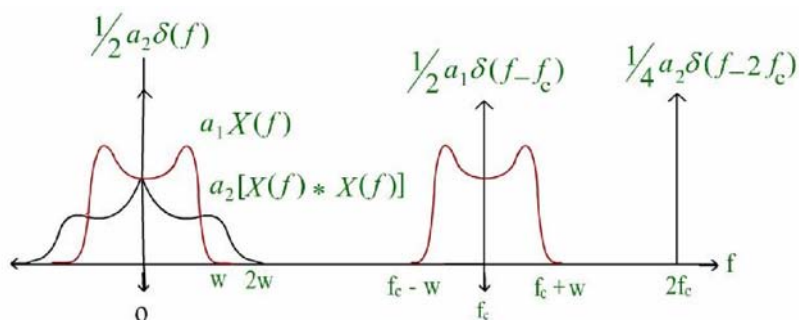
$$v_{out}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2 \omega_c t + a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t) \right] \cos \omega_c t$$

طیف فرکانسی خروجی عنصر غیر خطی به شکل زیر است. طیف سیگنال مدوله AM حول فرکانس حامل، f_c ، به وضوح مشاهده می شود. دقت داریم که طیف سیگنال $x^2(t)$ دارای عرض باند زیادتر و برابر $2w$ است. و بنابراین شرط زیر برای عدم تداخل طیفها لازم می باشد.

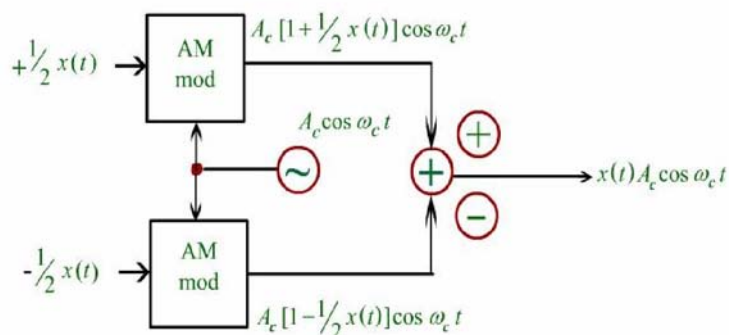
$$v_{out}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2 \omega_c t + a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t) \right] \cos \omega_c t$$

$$f_c - w > 2w \Rightarrow f_c > 3w$$

که با توجه به شرایط اولیه $f_c \gg w$ به طور حتم برآورده شده است.

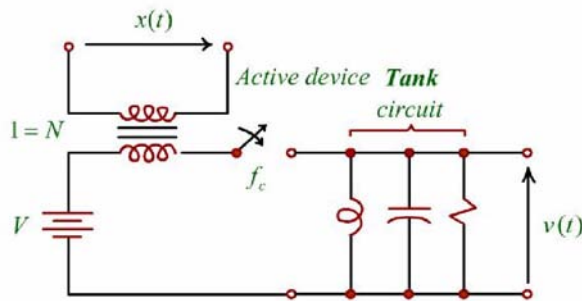


اگر عنصر غیر خطی حاوی جمله خطی نباشد و فقط از یک جمله درجه ۲ تشکیل شده باشد، می توان از آن مستقیماً برای تولید سیگنال مدوله شده DSB نیز سود برد ولی از آنجا که در عمل قانون مربع کامل وجود ندارد و برای ساختن سیگنال DSB به صورت زیر عمل می کنند در اینجا از دو مدولاسیون AM که سیگنال پیام برای آنها اختلاف فاز 180° دارد استفاده شده است. این نوع مدولاتور به مدولاتور Balanced Modulator مرسوم است.



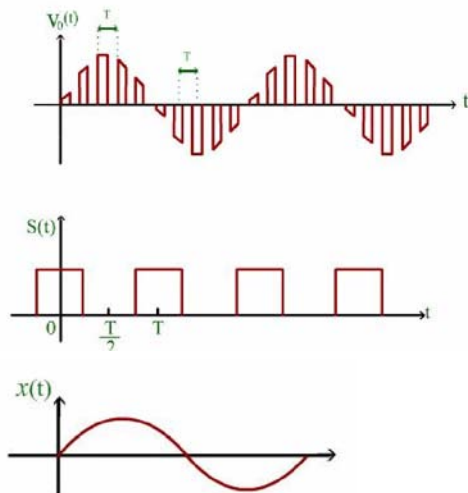
مدوله کننده
های سوئیچینگ

سوئیچ کردن یا قطع و وصل کردن سیگنال نیز می تواند برای انجام عمل ضرب و تولید سیگنال مدوله شده AM یا DSB استفاده بکار رود. در شکل زیر یک مدار ساده شامل جمع کننده (ترانس)، سوئیچ (که می تواند یک عنصر فعال مثل یک FET باشد و یک فیلتر مشاهده می شود).



شکل موج سیگنال بعد از سوئیچ به فرض سینوسی بودن پیام $x(t)$ و ولتاژ DC مساوی صفر به صورت زیر خواهد بود.

توجه داریم که درست مثل این است که سیگنال $X(t)$ در شکل موج $s(t)$ که به شکل موج سوئیچ معروف است ضرب شده باشد.



یعنی:

$$v_o(t) = NX(t).s(t)$$

$$v_o(t) = (V + Nx_c(t)).s(t)$$

و یا اگر $V \neq 0$ باشد.

حال اگر سری فوری $s(t)$ استفاده کنیم داریم:

$$v_o(t) = (V + Nx_c(t)) \left\{ \frac{1}{2} + \sum \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_c t \right\}$$

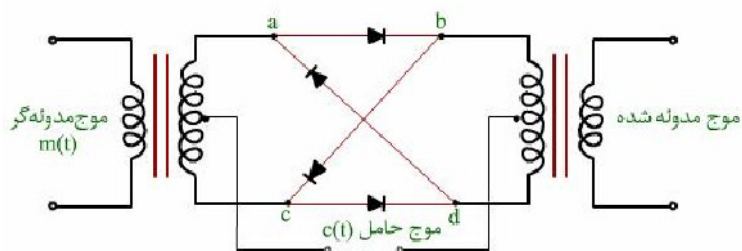
مشاهده می شود که تعداد زیادی مدوله شده AM با فرکانسهای حامل $n f_c$ بدست می آید. حال لازم است توسط فیلتر خروجی جمله مورد نظر، که AM با فرکانس حامل f_c است جدا شود.

$$v(t) = (V + Nx_c(t)) \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cos \omega_c t$$

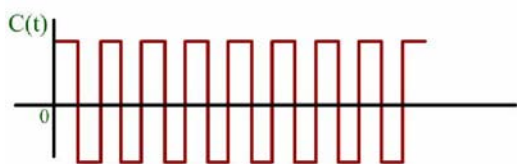
$$v(t) = \frac{2}{\pi} V \left(1 + \frac{N}{V} x(t) \right) \cos \omega_c t$$

مدوله کننده
حلقوی

این نوع مدولاتور که شکل آن را مشاهده می کنید از انواع مدولاتورهای حاصل ضربی است که از چهار دیود تشکیل شده است.

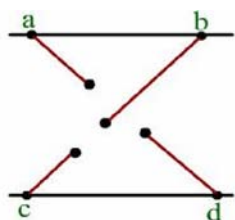


دیودها به نحوی اتصال یافته اند که در یک جهت تشکیل حلقه داده و بدین علت مدوله کننده را حلقوی می نامند. دیودها بوسیله حامل موج مربعی $c(t)$ با فرکانس f_c از طریق دو ترانسفورماتور با انشعاب مرکزی کنترل می شوند.

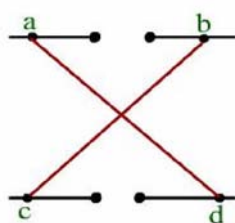


اگر دیودها را ایده آل و ترانسفورماتورها را متعادل فرض کنیم طرز کار مدار به صورت زیر است: هنگامی که شکل موج حامل مثبت است دیویدهای خارجی در حالت وصل بوده و امپدانس صفر دارند در حالیکه دیویدهای داخلی در حالت قطع قرار داشته و امپدانس بی نهایت از خود نشان می دهند و برعکس.

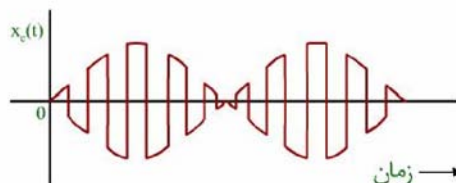
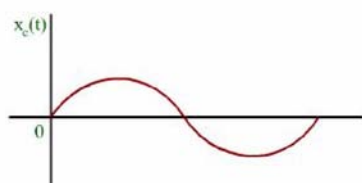
بنابراین می توان گفت هنگامی که حامل $c(t)$ مثبت است مدوله کننده سیگنال پیام $x(t)$ را در $+1$ ضرب می کند.



در حالتی که سیگنال حامل $c(t)$ منفی است، مدوله کننده سیگنال پیام را در -1 ضرب می کند.



پس مدوله کننده حلقوی سیگنال پیام $x(t)$ و سیگنال مربعی $c(t)$ را در یکدیگر ضرب می نماید. شکل خروجی مدوله کننده را برای سیگنال پیام سینوسی می توانید مشاهده کنید.

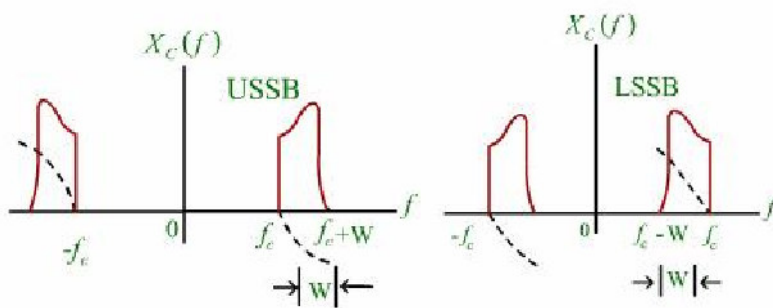
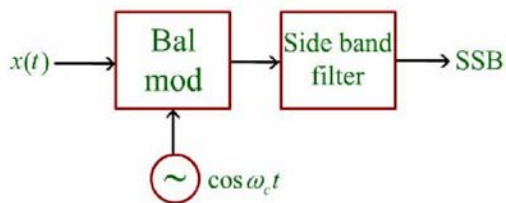


از این پس بقیه کار مانند مدولاتور سوئیچینگ است. بسط سری فوریه موج حامل مربعی را نوشته و در پیام که یک موج سینوسی است ضرب می کنیم. با توجه به اینکه، کریر مؤلفه DC ندارد، خروجی مدوله کننده مؤلفه ای در فرکانس حامل نخواهد داشت و فقط از حاصل ضرب مدوله سازی تشکیل یافته است. اگر سیگنال $x(t)$ دارای پهنای باند w باشد، طیف خروجی مدوله کننده، متشکل از مجموعه طیف های سیگنال $x(t)$ حول هارمونیک های فرد موج حامل مربعی بوده و می توان موج DSB موردنظر را با استفاده از یک فیلتر میانگذر با فرکانس مرکزی f_c و پهنای باند $2w$ بدست آورد.

دقت کنید که به منظور عدم تداخل باندهای جانبی باید شرط $f_c > w$ برقرار باشد.

مدولاسیون تک
باند جانبی (SSB)

ملاحظه شد که هر دو نوع مدولاسیون AM و DSB به پهنای باند انتقال معادل دو برابر پهنای باند سیگنال پیام نیاز داشته و از این نظر تا حدی پهنای باند در دسترس را به هدر می دهند . حال آنکه نیمی از این طیف نیز حاوی اطلاعات کافی می باشد. همانطور که در شکل زیر مشاهده می شود نیمی از پهنای باند توسط باند جانبی فوقانی و نیمی از آن توسط باند جانبی تحتانی اشغال شده است. با توجه به شکل پیداست که این دو طیف به نحو منحصر به فردی با یکدیگر ارتباط دارند و با داشتن طیف دامنه و فاز هر یک از این دو می توان طی دامنه، فاز باند جانبی دیگر را به نحو منحصر به فردی تعیین کرد .



بنابراین می توان یکی از این دو باند را حذف کرد ، بدون اینکه هیچ اطلاعاتی از بین برود .سیگنال مدوله شده حاصل یک سیگنال مدوله تک باند جانبی یا **SSB** خواهد بود .پهنای باند این سیگنال مدوله شده برابر پهنای باند سیگنال پیام و بنابراین نصف پهنای باند لازم برای سیگنال های مدوله شده **AM** و **DSB** است.

دذ صورت ارسال باند جانبی تحتانی، مدولاسیون را تک باند جانبی تحتانی (**LSSB**) و در صورت ارسال باند جانبی فوقانی مدولاسیون را تک باند جانبی فوقانی (**USSB**) می نامند.

بررسی طیف سیگنال
SSB و رابطه زمانی آن

توصیف موج SSB در حوزه فرکانس به نوع باند جانبی ارسالی بستگی دارد. با توجه به تعریفی که در مورد سیگنال پیش پوش در قسمت های قبلی ذکر شد می توان رابطه طیف فرکانسی سیگنال تک باند جانبی فوقانی را به صورت زیر نوشت.

$$X_{cussB}(f) = \frac{A_c}{2} \left[\frac{1}{2} X_+(f - f_c) + \frac{1}{2} X_-(f + f_c) \right]$$

که در آن $X_+(f)$ تبدیل فوریه $x_+(t)$ است.

$$X_+(f) = F[x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)] = X(f) + j\hat{X}(f)$$

در رابطه فوق $\hat{x}(t)$ تبدیل هیلبرت $x(t)$ است و $\hat{X}(f)$ تبدیل فوریه $\hat{x}(t)$ می باشد. به طور مشابه می توان نوشت:

$$X_-(f) = X(f) - j\hat{X}(f)$$

که در واقع طیف فوریه سیگنال تک باند جانبی تحتانی است.

با استفاده از تبدیل فوریه معکوس سیگنال تک باند جانبی فوقانی می توان آن را در حوزه زمان توصیف کرد.

$$\begin{aligned} X_{cussB}(t) &= \frac{A_c}{2} \left[\frac{1}{2} (x(t) + j\hat{x}(t)) e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} (x(t) - j\hat{x}(t)) e^{-j2\pi f_c t} \right] \\ &= \frac{A_c}{2} [x(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)] \end{aligned}$$

با روش مشابه می‌توان رابطه سیگنال مدوله شده تک باند جانبی تحتانی را در حوزه زمان بدست آورد که برابر می‌شود با:

$$X_{cLssB}(t) = \frac{A_c}{2} [x(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t)]$$

با بررسی روابط زمانی بدست آمده، می‌توان مشاهده کرد که مؤلفه‌های همفاز و تربیعی سیگنال میان‌گذر تک‌باند جانبی عبارتند از:

$$x_{cc}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t)$$

$$x_{cs}(t) = \pm \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t)$$

و

و در نهایت پوشش طبیعی $\alpha(t)$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\alpha(t) = \frac{A_c}{2} [x^2(t) + \hat{x}^2(t)]^{1/2}$$

مدولاسیون باند
جانبی اثری

جهت انتقال مکالمه انسان، مدوله سازی تک باند جانبی تا حد زیادی انتخاب و راه حل

مناسب و خوبی است. زیرا در طیف سیگنال مکالمه در فاصله صفر تا چند صد هرتز هیچ توانی یا

مولفه فرکانسی وجود ندارد. در شرایطی که سیگنال باند پایه مؤلفه های فرکانس بسیار پایین عمده

دارد (مانند سیگنال های تلویزیونی و تلگرافی) باندهای جانبی فوقانی و تحتانی در فرکانس حامل،

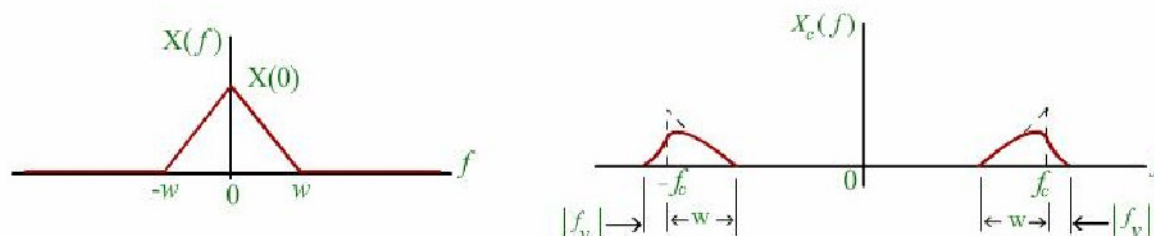
کاملاً به یکدیگر اتصال یافته اند و به علت محدودیت های عملی در تکنولوژی فیلترها یا تغییر فاز

دهنده ها، جدا کردن یک باند جانبی از باند جانبی دیگر امری کاری دشوار است این مشکل را با

استفاده از مدولاسیون باند جانبی اثری (VSB) می توان حل کرد. در این طرح مدوله سازی که

مصالحه ای بین مدولاسیون های DSB و SSB است، یک باند جانبی تقریباً به صورت کامل

باقی مانده و از باند جانبی دیگر فقط اثر یا رگه ای باقی می ماند و بقیه آن حذف می شود.



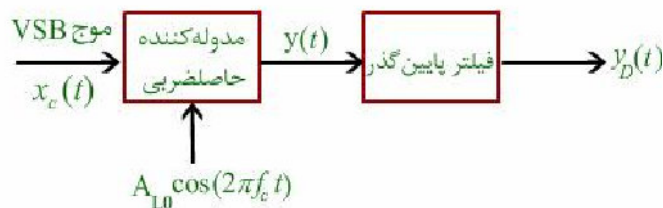
در شکل $X(f)$ طیف سیگنال باند پایه مفروض و $X_c(f)$ طیف سیگنال مدوله شده VSB است.

ذکر این نکته ضروری است که در مدولاسیون VSB، قسمت باقیمانده باند جانبی نامطلوب (که در طیف نشان داده شده منظور باند جانبی فوقانی است) باید قسمتی از طیف باند جانبی مطلوب را که حذف شده است جبران نماید. در شکل باند جانبی تحتانی مد نظر است.

پهنای باند مورد نیاز برای انتقال سیگنال VSB، عبارت است از:

$$B_T = w + f_v$$

که در آن w پهنای باند سیگنال $x(t)$ و f_v پهنای باند جانبی اثری است. مدولاسیون VSB را می‌توان با عبور دادن سیگنال DSB از فیلتری با تابع تبدیل $H(f)$ مناسب تحقق بخشید.



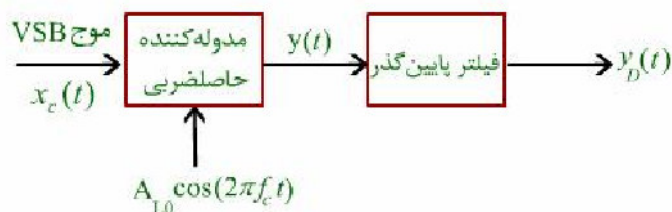
در این صورت طیف سیگنال حاصله VSB را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)] H(f)$$

مدولاسیون باند
جانبی اثری

جهت ایجاد سیگنال VSB مورد نظر باید مشخصات تابع تبدیل فیلتر را تعیین نماییم. این مشخصات وقتی برای ما مفید است که سیگنال دمدوله شده VSB، همان سیگنال باند پایه اولیه باشد بدون آنکه در آن اعوجاجی رخ داده باشد. بنابراین این شرایط را جهت تعیین $H(f)$ در نظر می‌گیریم. با ضرب کردن $x_c(t)$ در سیگنال نوسان‌ساز محلی $A_L \cos \omega_c t$ که با سیگنال کریر $A_c \cos \omega_c t$ همزمان یا سنکرون است رابطه سیگنال خروجی بصورت زیر درمی‌آید:

$$y(t) = A_{L0} \cos \omega_c t \cdot x_c(t)$$



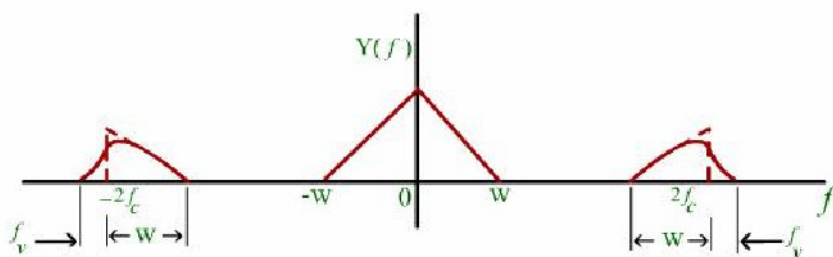
تبدیل فوریه رابطه فوق عبارت است از:

$$Y(f) = \frac{A_L}{2} [X_c(f - f_c) + X_c(f + f_c)]$$

با جایگزینی $X_c(f + f_c)$ و $X_c(f - f_c)$ بر حسب $X(f)$ و $H(f)$ در رابطه فوق و ساده سازی خواهیم داشت.

$$Y(f) = \frac{A_c A_{L0}}{4} X(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)] + \frac{A_c A_{L0}}{4} [X(f - f_2)H(f + f_c) + X(f + 2f_c)H(f + f_c)]$$

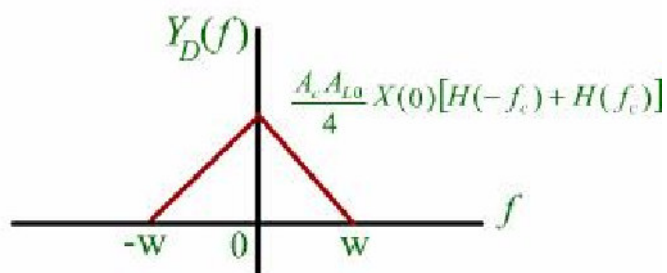
طیف $Y(f)$ بدست آمده را می‌توان در شکل مشاهده نمود.



عبارت دوم سیگنال $Y(f)$ بیانگر سیگنال VSB با فرکانس حامل $2f_c$ می‌باشد. این قسمت از طیف سیگنال $Y(f)$ را می‌توان با استفاده از یک فیلتر پایین گذر حذف نمود تا خروجی $Y_D(f)$ با رابطه طیفی زیر حاصل شود.

$$Y_D(f) = \frac{A_c A_{L0}}{4} X(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)]$$

این طیف را می‌توان در شکل مشاهده کرد.



مدولاسیون باند
جانبی اثری

با توجه به رابطه طیفی $Y_D(f)$ و هدفمان که بازسازی المثنای دقیق و بدون اعوجاج سیگنال باند پایه در خروجی آشکارساز است باید شرط زیر برای تابع تبدیل $H(f)$ برقرار باشد.

$$H(f - f_c) + H(f + f_c) - 2H(f_c)$$

که در آن $H(f_c)$ مقداری ثابت است.

اگر طیف سیگنال باند پایه $X(f)$ در خارج از فاصله $-w < f < w$ صفر باشد کافی است که شرط فوق در بازی فرکانسی $w < f < w$ برقرار باشد. اگر از فیلتری با پاسخ دامنه نشان داده شده در شکل استفاده کنیم مشاهده می شود که $H(f - f_c) + H(f + f_c)$ مقداری ثابت خواهد داشت.

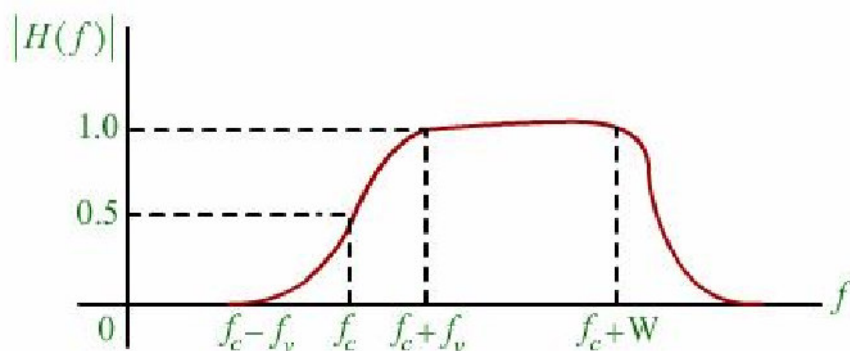
این پاسخ به نحوی نرمالیزه شده است که دامنه $|H(f)|$ در فرکانس حامل f برابر $\frac{1}{2}$ است.

ناحیه قطع این مشخصه دارای تقارن فرد حول f_c بوده و در باند تغییر حالت یعنی $f_c - f_v < f < f_c + f_v$ مجموع $|H(f)|$ در دو فرکانس بالا و پایین f_c و هم فاصله از آن برابر واحد می باشد. طراحی و ساخت چنین فیلتری از تحقق فیلتری برای حذف کامل یک باند جانبی بسیار آسانتر است.

دقت کنید که جهت حفظ طیف باند پایه، پاسخ فاز فیلتر VSB باید حول f_c تقارن فرد داشته باشد. همچنین پاسخ فاز مذکور باید در فاصله فرکانسی $f_c - w \leq |f| \leq f_c + w$ خطی بوده و در فرکانس f_c صفر یا مضرب صحیحی از 2π رادیان باشد.

خطی بودن مشخصه فاز باعث می‌شود که در بازسازی سیگنال باند پایه در خروجی گیرنده، فقط تأخیر زمانی ثابتی بوجود بیاید.

توجه کنید که پاسخ نشان داده شده برای فیلتر، باعث ایجاد سیگنال VSB با اثری از باند تحتانی می‌گردد.



سیگنال VSB
حوزه زمان:

برای توصیف سیگنال VSB در حوزه زمان از روش مؤلفه‌های همفاز و تربیعی استفاده می‌کنیم.

در حوزه فرکانس، مؤلفه‌های همفاز سیگنال VSB و مؤلفه تربیعی آن با سیگنال مذکور روابط زیر را دارند:

$$X_{cc}(f) = \begin{cases} X_c(f - f_c) + X_c(f + f_c) & -w \leq f \leq w \\ 0 & \text{سایر فرکانس‌ها} \end{cases}$$

به همین ترتیب:

$$X_{cs}(f) = \begin{cases} j[X_c(f - f_c) - X_c(f + f_c)] & -w \leq f \leq w \\ 0 & \text{سایر فرکانس‌ها} \end{cases}$$

با توجه به رابطه طیفی $X_c(f)$ که قبلاً ذکر شد، تبدیل فوریه مؤلفه همفاز سیگنال VSB عبارت است از:

$$X_{cc}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f) [H(f - f_c) + H(f + f_c)]$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل $H(f)$ فیلتر VSB در فرکانس f_c دارای مقدار $\frac{1}{2}$ است

می‌توان نتیجه گرفت:

$$X_{cc}(f) = \frac{1}{2} A_c X(f)$$

بنابراین مؤلفه همفاز سیگنال VSB در حوزه زمان برابر است با:

$$x_{cc}(t) = \frac{1}{2} A_c x(t)$$

که به استثنای ضرایب مقیاسی و ثابت، مؤلفه مذکور همان خروجی آشکارساز همزمان یعنی $y_D(t)$ می‌باشد:

همچنین تبدیل فوریه مؤلفه تربیعی سیگنال VSB عبارت است از:

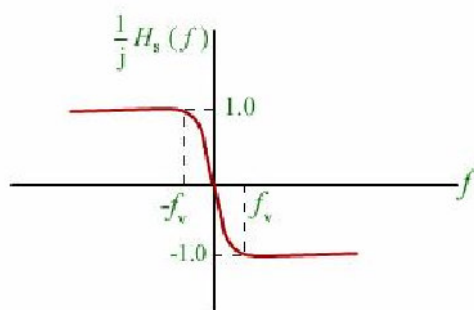
$$X_{cs}(f) = \frac{j}{2} A_c X(f) [H(f - f_c) - H(f + f_c)]$$

این رابطه نشان می‌دهد، که بدون در نظر گرفتن ضرایب، سیگنال $x_{cs}(t)$ را می‌توان با عبور دادن سیگنال باند پایه $x(t)$ از فیلتری با تابع تبدیل زیر بدست آورد:

$$H_s(f) = j[H(f - f_c) - H(f + f_c)]$$

سیگنال VSB در
حوزه زمان:

با $H(f)$ مشخص شده در قسمت قبل، پاسخ فرکانسی فیلتر $H_s(f)$ به صورت شکل نشان داده شده می‌باشد.



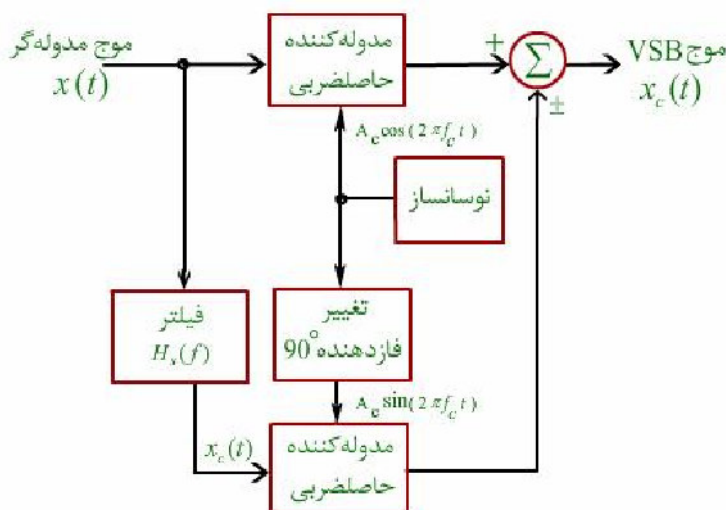
اگر $x_s(t)$ خروجی این فیلتر به ازاء ورودی $x(t)$ باشد، مؤلفه تریبیعی موج VSB عبارت است از:

$$x_{cs}(t) = \frac{1}{2} A_c x_s(t)$$

بنابراین سیگنال باند اثری جانبی در حوزه زمان برحسب مؤلفه‌های پایین‌گذر آن به صورت زیر قابل نگارش است.

$$x_c(t) = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos \omega_c t - x_s(t) \sin \omega_c t]$$

اهمیت فیزیکی رابطه بدست آمده در این است که برای تولید سیگنال VSB می‌توان به جای استفاده از فیلتر پایین‌گذر $H(f)$ بعد از خروجی یک مودلاتور DSB، می‌توان از بلوک‌دیگرام نشان داده شده در شکل استفاده کرد.



علامت منفی برای تولید سیگنال VSB با اثری از باند جانبی تحتانی و علامت مثبت برای تولید سیگنال VSB با اثری از باند جانبی فوقانی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

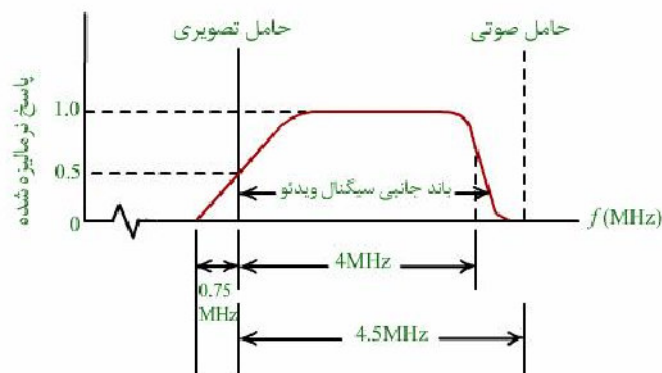
رابطه زمانی سیگنال VSB نشان می‌دهد که امواج DSB و SSB را می‌توان، حالات خاصی از موج مدوله شده VSB دانست.

اگر باند جانبی اثری به حدی افزایش یابد که تمام پهنای باند جانبی را اشغال نماید در این صورت مؤلفه $x_s(t)$ ناپدید شده و موج DSB به وجود می‌آید. از طرف دیگر اگر پهنای باند جانبی اثری به صفر کاهش یابد موج حاصله در واقع موج SSB می‌باشد و در آن $x_s(t)$ همان تبدیل هیلبرت $x(t)$ یعنی $\hat{x}(t)$ خواهد بود.

مدوله‌سازی باند جانبی اثری علاوه بر اینکه مانند مدوله‌سازی تک‌باند جانبی در مصرف پهنای باند صرفه‌جویی می‌نماید، ویژگی مهم مدوله‌سازی باند جانبی دوگانه را که حفظ مؤلفه‌های فرکانسی پایین سیگنال باند پایه است را دارا می‌باشد. بدین علت مدوله‌سازی VSB به عنوان مدوله‌سازی استاندارد برای انتقال سیگنال تلویزیونی و سیگنال‌های مشابه که در مورد آنها مشخصه‌های فاز خوب و انتقال مؤلفه‌های فرکانس پایین اهمیت داشته، ولی اختصاص پهنای باند اضافی مورد لزوم در DSB امکان‌پذیر نیست و یا غیراقتصادی می‌باشد، انتخاب و مورد استفاده قرار می‌گیرد.

سیگنال VSB در
حوزه زمان

در عمل و در انتقال تجاری سیگنالهای تلویزیونی، سیگنال ارسالی، موج مدوله VSB کامل نیست و علت آن عدم امکان کنترل دقیق شکل ناحیه تغییر حالت مشخصه فیلتر می باشد. در مقابل، در هر گیرنده از یک فیلتر VSB استفاده شده و در نتیجه عملکرد کلی به استثنای مقداری توان و پهنای باند تلف شده مانند مدوله سازی باند جانبی اثری است. در شکل، پاسخ فرکانسی ایده آل فیلتر VSB را که برای گیرنده های تلویزیونی طراحی شده است ملاحظه می نمائید.



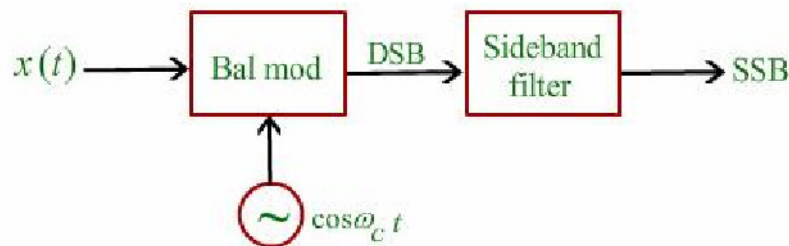
در سیستم تلویزیون تجاری معمولاً حاملی به همراه موج مدوله شده VSB ارسال می شود و آن را موج $VSB+C$ می نامند. این امر سبب می شود که دمدوله سازی موج مدوله دریافتی با استفاده از آشکارساز پوش درگیرنده امکان پذیر باشد. برای کاهش ناشی از اعوجاج حاصل از آشکارساز پوش می توان از طریق کاهش درصد مدوله سازی و افزایش پهنای باند جانبی اثری و در نتیجه کاهش $x_s(t)$ اقدام کرد. در سیستم تلویزیون تجاری، باند جانبی اثری پهنای باندی در حدود 0.75 مگاهرتز یعنی تقریباً یک ششم پهنای باند جانبی کامل را دارد. این پهنای باند به نحوی انتخاب و تعیین شده است، که اعوجاج حاصل از $x_s(t)$ در محدوده قابل تحملی قرار گرفته و در عین حال درصد مدوله سازی تقریباً صد درصد باشد.

مدوله‌کننده‌های
SSB

- ۱- مدوله‌کننده‌های SSB با استفاده از روش تمایز فرکانس.
- ۲- مدوله‌کننده‌های SSB با استفاده از روش تمایز فاز.
- ۳- مدوله‌کننده‌های SSB با استفاده از روش weaver.

روش تمایز
فرکانسی

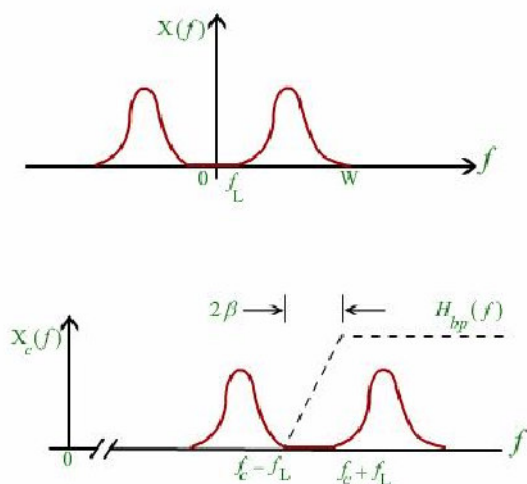
با توجه به توصیف سیگنال مدوله شده تک باند جانبی در حوزه فرکانس، می‌توان مدوله‌کننده SSB را متشکل از یک مدوله‌کننده متعادل و یک فیلتر میان‌گذر دانست، که خروجی DSB مدولاتور متعادل را بسته به نیاز به LSSB یا USSB تبدیل می‌نماید.



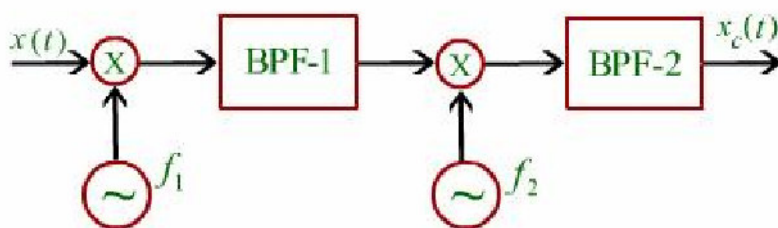
یکی از محدودیت‌های اصلی این روش مدولاسیون، احتیاج به فیلتر ایده‌آل و صفر بودن باند تغییر حالت این فیلتر، می‌باشد. تحقق چنین فیلتر ایده‌آلی غیرممکن است. در طراحی فیلتر باند جانبی این روش مدولاسیون دو شرط زیر باید برآورده شود:

- ۱- باند عبور فیلتر در همان محدوده فرکانسی طیف موج SSB مورد نظر قرار داشته باشد.
 - ۲- پهنای باند تغییر حالت فیلتر حداکثر دو برابر پایین‌ترین مؤلفه فرکانسی سیگنال پیام باشد.
- در چنین شرایطی باند جانبی نامطلوب در محدوده فرکانسی باند توقف فیلتر میان‌گذر قرار خواهد گرفت.

بنابر این اگر سیگنال پیام مؤلفه فرکانس پایین قابل توجهی داشته باشد، این روش مناسب نمی‌باشد. اما از آنجایی که بسیاری از سیگنال‌های مدوله‌گر دارای حفره‌ای حول فرکانس صفر در طیف فرکانسی خود می‌باشند، این روش مناسب به نظر می‌رسد. به عنوان مثال می‌توان به سیگنال صوتی اشاره کرد. بدین ترتیب طیف سیگنال مدوله‌گر پس از انتقال به حول فرکانس حامل بوسیله مدوله کننده متعادل، دارای فضای خالی حول f_c بوده و باند تغییر حالت فیلتر را می‌توان در این فضای خالی قرار داد.



از آنجا که نسبت فرکانس مرکزی به 2β نمی‌تواند خیلی زیاد باشد و تحقق فیلتر را غیرممکن می‌سازد، در صورت نیاز به فرکانس‌های بالاتری برای کریر، باید از دو مرحله مدولاسیون برای تولید سیگنال SSB استفاده کرد.



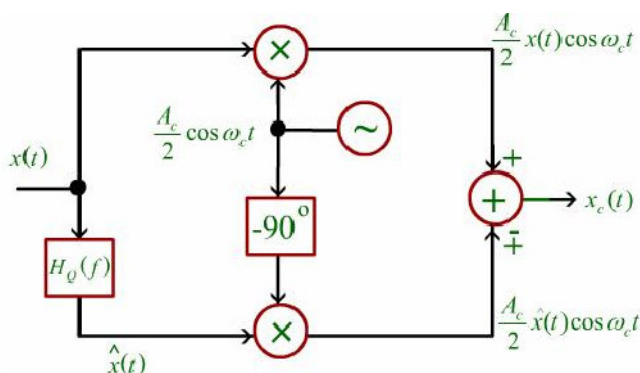
روش تمایز
فازی

روش تمایز فازی برای تولید سیگنالهای SSB از روابط حوزه زمانی این سیگنال ها که قبلاً به آن اشاره شد استفاده می کند.

$$x_{CUSSB}(t) = \frac{A_c}{2} \left[x(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

$$x_{CLSSB}(t) = \frac{A_c}{2} \left[x(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi f_c t) \right]$$

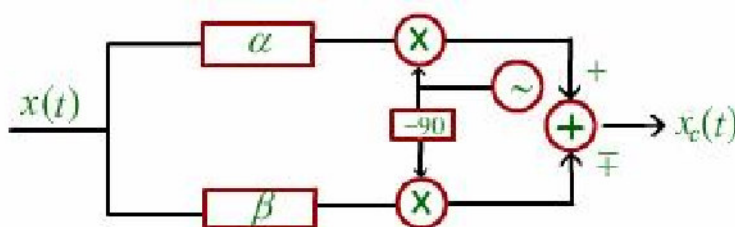
بلوک دیاگرام تولید سیگنال SSB را با استفاده از این روش مشاهده می کنید.



این روش تولید سیگنال SSB، شامل دو فرآیند مدوله سازی همزمان ولی جداگانه و سپس ترکیب خروجی های مدوله شده حاصله می باشد. مشاهده می شود، که این روش از دو مدوله کننده حاصلضربی که بوسیله حاملهای متعامد بر یکدیگر تغذیه می شوند، استفاده می کند. با توجه به بلوک دیاگرام نشان داده شده سیگنال پیام $x(t)$ به مدوله کننده فوقانی اعمال شده و سیگنال DSB با فاز مبنا که شامل باندهای جانبی و طیف فرکانسی متقارن حول فرکانس حامل می باشد، بوجود می آید.

تبدیل هیلبرت پیام یعنی $\hat{x}(t)$ به مدوله کننده تحتانی اعمال شده و سیگنال DSB ای تولید می کند که شامل باندهای جانبی با طیف فرکانسی دامنه مشابه طیف فرکانسی خروجی مدوله کننده فوقانی بوده و چنان اختلاف فازی با خروجی این مدوله کننده دارد که مجموع یا تفاضل خروجیهای دومتدوله کننده سبب حذف مجموعه ای از باندهای جانبی (فوقانی و تحتانی) و تقویت مجموعه دیگری از باندهای جانبی می شود. در بلوک نشان داده شده، علامت جمع سبب تولید SSB با باند جانبی تحتانی و علامت تفریق باندجانبی فوقانی را تولید می کند. این مدار به مدوله کننده هارتلی معروف است

برای تولید تبدیل هیلبرت سیگنال پیام $x(t)$ ، مداری که زاویه فاز هر مؤلفه فرکانسی $x(t)$ را 90° درجه تغییر داده ولی دامنه آن را تغییر ندهد مورد نیاز است. در عمل طراحی چنین مداری که بتواند در محدوده فرکانسی وسیع سیگنال پیام $x(t)$ چنین کاری را انجام دهد امری مشکل است. به هر حال اگر در مسیر هر یک از دو مدوله سازی، یک مدار تغییر فاز قرار داده شود می توان اختلاف فاز ثابت مورد نظرا با هر تلورانسی در گستره فرکانسی مشخص بوجود آورد. در این طرح از مدارهای تغییر فاز دهنده α و β استفاده شده است که شرط $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ را ا قناع می کنند.



از آنجاکه مدوله کننده مذکور به فیلترهایی با شیب تند قطع نیاز ندارد ، بدون توجه به اینکه فرکانس حامل تا چه حدی بالا است می توان باند جانبی مورد نظر را در یک مرحله انتقال فرکانسی بوجود آورد. در این روش میزان حذف باند جانبی نامطلوب به عوامل زیر بستگی دارد :

- ۱-دقت در متعادل سازی در مدوله کننده های متعادل
- ۲-کنترل دقیق رابطه فازی متعامد بین دو موج حامل سینوسی وکسینوسی

۳-خطا در تقریب 90° درجه اختلاف فاز بین $x(t)$ و $\hat{x}(t)$

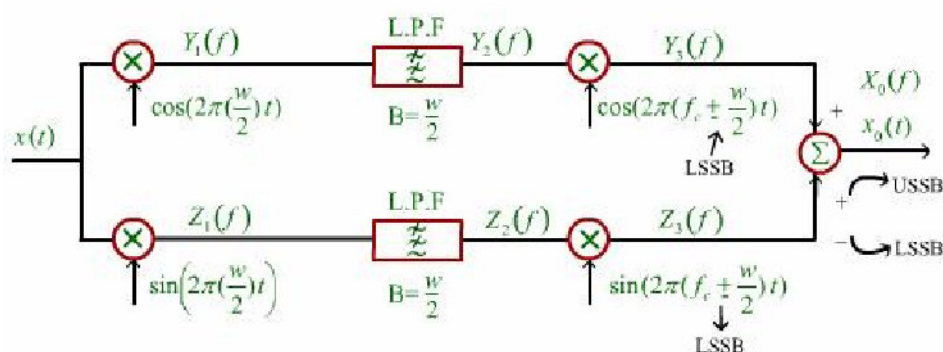
فصل ششم: مدولاسیون خطی موج پیوسته

مدوله کننده SSB

قسمت ۴

روش weaver

در این روش برای تولید سیگنال SSB از یک جفت فیلتر پایین گذر و دو جفت مدولاتور حاصلضربی استفاده می شود که بر طبق بلوک دیاگرام زیر قرار گرفته اند.

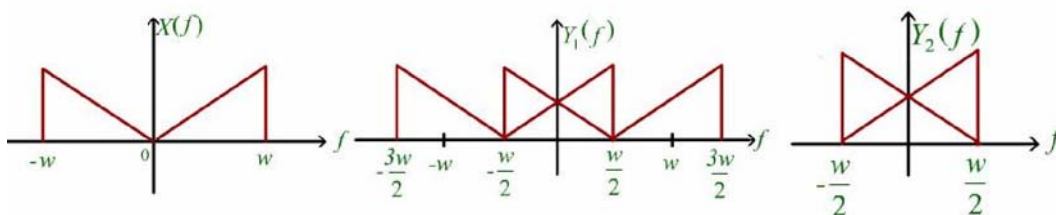


در انتخاب فرکانس های L_0 فرض بر این است که پهنای باند سیگنال باند پایه w باشد.

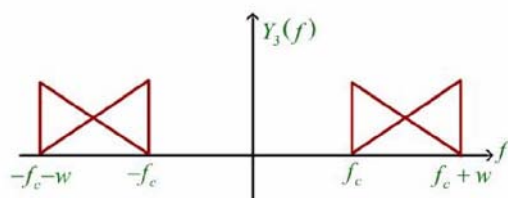
فرض کنید طیف سیگنال پیام به صورت نشان داده شده باشد.

اگر این سیگنال را توسط حامل $\cos(2\pi(\frac{w}{2})t)$ مدوله کنیم، به شکل $Y_1(f)$ خواهیم رسید.

بعد از فیلتر شدن، شکل $Y_2(f)$ ایجاد می شود.



و مدوله کردن این طیف توسط حامل $\cos(2\pi(f_c + \frac{w}{2})t)$ به طیف $Y_3(f)$ منجر می شود.



در شاخه پایین $Z_1(t)$ عبارت است از :

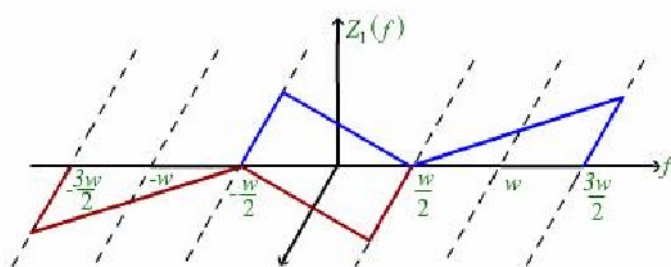
$$z_1(t) = x(t) \sin\left(2\pi\left(\frac{w}{2}\right)t\right)$$

که طیف آن عبارت است از:

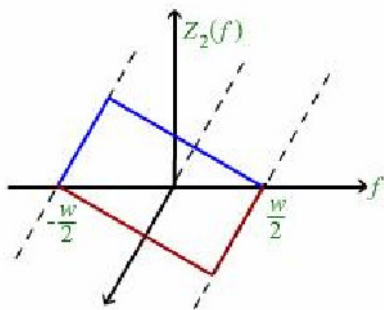
$$Z_1(f) = \frac{j}{2} \left(-X\left(f - \frac{w}{2}\right) + X\left(f + \frac{w}{2}\right) \right)$$

این طیف بر روی محور موهومی قرار گرفته است که در فرکانس های مثبت $X\left(f - \frac{w}{2}\right)$ دامنه منفی و برای

فرکانس های منفی $X\left(f + \frac{w}{2}\right)$ دامنه مثبت دارد.



بعد از عبور از فیلتر پایین گذر، طیف $Z_2(f)$ حاصل می شود.



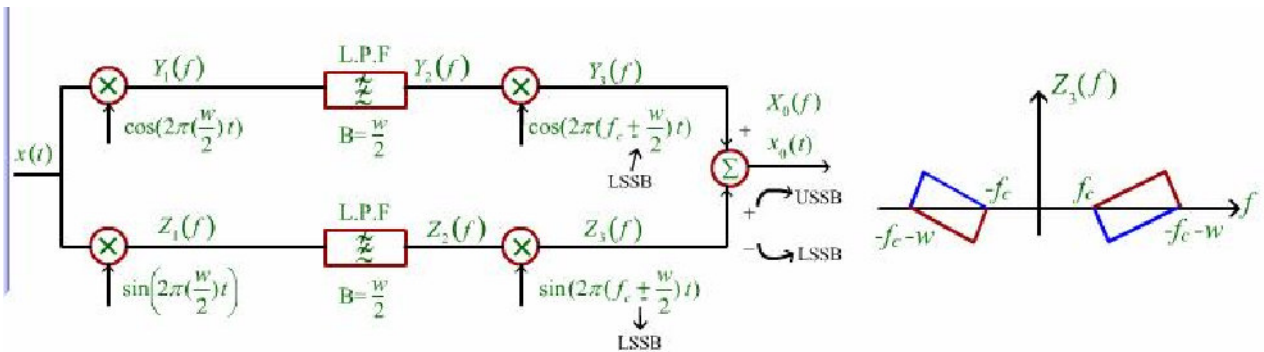
در مرحله بعد سیگنال کریر $\sin(2\pi(f_c + \frac{w}{2})t)$ را مدوله می کند و اگر سیگنال حاصل را $Z_3(t)$ بنامیم داریم:

$$z_3(t) = z_2(t) \sin(2\pi(f_c + \frac{w}{2})t)$$

طیف آن عبارت است از:

$$Z_3(f) = \frac{j}{2} \left[-Z_2(f - (f_c + \frac{w}{2})) + Z_2(f + f_c + \frac{w}{2}) \right]$$

با توجه به اینکه طیف $Z_2(f)$ بر روی محور موهومی قرار داشت، طبق رابطه $Z_3(f)$ ، طیف آن روی محور حقیقی می افتد که در شکل نشان داده شده است.



حاصل جمع طیف های $Y_3(f), Z_3(f)$ منجر به تشکیل سیگنال USSB می شود. اگر در مرحله تولید Y_3, Z_3 از علامت منفی برای فرکانس های کریر استفاده شود یعنی:

$\cos(2\pi(f_c - \frac{w}{2})t), \sin(2\pi(f_c - \frac{w}{2})t)$ و طیف های $Y_3(f), Z_3(f)$ از هم کم شوند طیف حاصله سیگنال LSSB خواهد شد.

دمدوله کننده ها

در فرآیند دمدوله سازی می توان سیگنال پیام را از سیگنال مدوله شده استخراج و بازسازی نمود. در واقع دمدوله سازی فرآیند معکوس مدوله سازی است. مداری که عمل دمدوله سازی را انجام می دهد، دمدوله کننده یا آشکارساز نامیده می شود.

دمدوله کننده های
AM

که شامل سه نوع زیر می باشند:

- ۱- آشکارساز قانون مربع
- ۲- آشکارساز پوش
- ۳- آشکارساز سنکرون

آشکار ساز قانون

مربع:

آشکار ساز قانون مربع، همان مدولاتور قانون مربع است که به منظور آشکار سازی بکار می رود. اگر به یک مدولاتور قانون مربع که رابطه خروجی بر حسب ورودی اش، به صورت:

$$V_{out} = a_1 V_{in} + a_2 V_{in}^2$$

است موج ارسالی AM را که بصورت $V_{in} = A_c (1 + \mu x(t)) \cos \omega_c t$ است اعمال نماییم، سیگنال خروجی عبارت خواهد شد از:

$$\begin{aligned} V_{out} &= a_1 A_c (1 + \mu x(t)) \cos \omega_c t + a_2 A_c^2 (1 + \mu x(t))^2 \cos^2 \omega_c t \\ V_{out} &= a_1 A_c (1 + \mu x(t)) \cos \omega_c t \\ &+ a_2 A_c^2 / 2 (1 + 2 \mu x(t) + \mu^2 x^2(t)) (1 + \cos 2 \omega_c t) \end{aligned}$$

سیگنال پیامی که باید آشکار سازی شود عبارت $a_2 A_c^2 \mu x(t)$ می باشد که با استفاده از یک فیلتر پایین گذر

مناسب قابل استخراج است. اما باید توجه کرد که طیف عبارت $\frac{a_2 A_c^2 \mu^2}{2} x^2(t)$ ، بر روی طیف سیگنال پیام

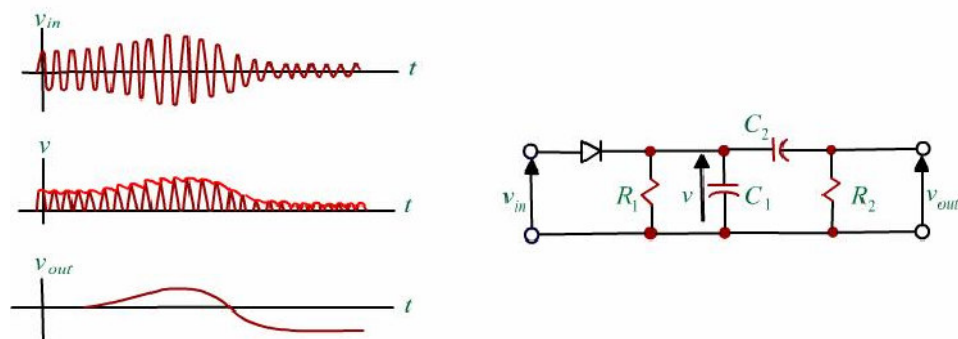
افتاده و ایجاد تداخل می کند و آن را با فیلتر کردن نیز نمی توان بطور کامل حذف کرد. بنابراین سیگنال مذکور نامطلوب بوده و سبب اعوجاج در سیگنال خروجی فیلتر پایین گذر خواهد شد.

نسبت سیگنال مطلوب به اعوجاج برابر با $\frac{2}{\mu x(t)}$ بوده و برای هر چه بزرگتر کردن این نسبت باید تا حد

امکان $\mu x(t)$ به ازای تمام مقادیر زمانی t از یک خیلی کوچکتر باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که بازیابی نسبتاً بدون اعوجاج سیگنال پیام هنگامی امکان پذیر است که موج AM اعمال شده به آشکارساز قانون مربع ضعیف بوده و شاخص مدوله سازی خیلی کوچک باشد.

آشکار ساز پوش

با توجه به اینکه پوش موج AM به شکل سیگنال پیام بوده و مستقل از فرکانس و فاز حامل است، می توان با استفاده از پوش مذکور سیگنال پیام را استخراج کرد. مدار ساده یک آشکار ساز پوش و شکل موجهای مربوطه را در شکل مشاهده می نمائید.



در این مدار ولتاژ v واقع یکسوشده ی نیم موج ورودی V_{in} است ولی $R_1 C_1$ بصورت فیلتر پایین گذر عمل کرده و فقط به تغییرات در پیک های V_{in} پاسخ می دهد مشروط بر اینکه:

$$W \ll \frac{1}{R_1 C_1} \ll f_c$$

برای اینکه پوش پیام بطور واضح در سیگنال دمدوله شده ظاهر شود شرط $f_c \geq W$ لازم است. تحت شرایط فوق C_1 به

آرامی بین پیک های حامل دشارژ شده و v تقریباً بصورت پوش V_{in} در می آید. با فیلترکردن پیچیده ترمی توان آشکارسازی سیگنال پیام را بهبود بخشید. در این مدار $R_2 C_2$ نیز به عنوان مدار بلوک کننده DC عمل می نماید. با توجه به اینکه مداربلوک کننده DC مؤلفه های فرکانس پایین پیام را دچار اعوجاج می سازد و آشکارسازهای پوش معمولی برای سیگنالهای با محتوی فرکانس پایین قابل توجه، مناسب نیستند. ولتاژ v رامی توان جهت حذف تغییرات پوش فیلتر نموده و ولتاژی متناظر با دامنه حامل بدست آورد.

فصل ششم: مدولاسیون خطی موج پیوسته

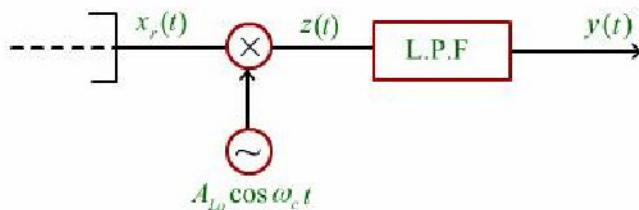
دمدوله کننده ها

قسمت ۴

آشکارساز سنکرون

در بلوک دیاگرام، این آشکارساز را مشاهده می نمائید.

این آشکارساز را بدین علت سنکرون می گویند که برای درست عمل کردن باید فرکانس و فاز سیگنال کریر در دمدوله کننده، با فرکانس و فاز کریر در مدولاتور یکسان باشد.



اگر $x_r(t)$ سیگنال دمدوله شده AM دریافتی باشد :

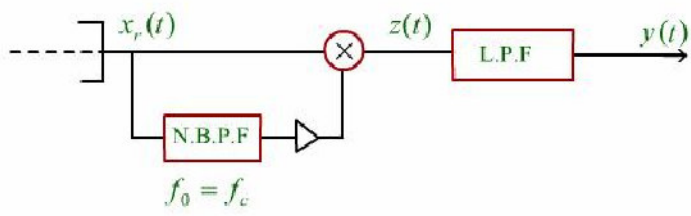
$$x_r(t) = A_c [1 + \mu x(t)] \cos \omega_c t$$

خروجی مدولاتور را می توان به صورت زیر نوشت:

$$z(t) = \frac{A_c A_{Lo}}{2} [1 + \mu x(t)] (1 + \cos 2\omega_c t)$$

که با استفاده از یک فیلتر پایین گذر، پیام، یعنی $\frac{A_c A_{Lo} \mu}{2} x(t)$ قابل استخراج است.

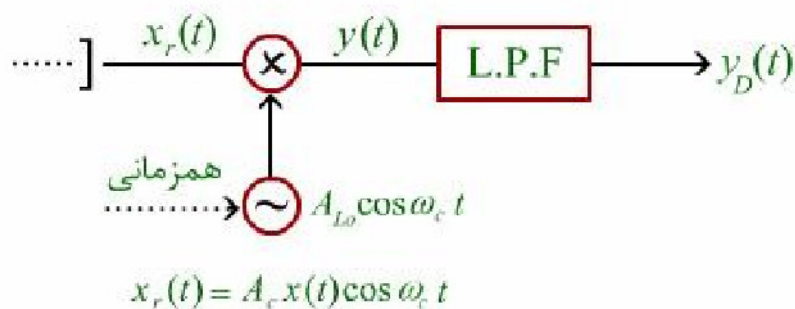
باتوجه به اینکه در سیگنال AM، کریر نیز ارسال می شود می توان با استفاده از یک فیلتر میانگذر باند باریک این کریر را آشکارسازی نموده و پس از تقویت از آن برای دمدوله سازی استفاده کرد.



دمدوله کننده های

DSB

دمدوله کننده DSB بر اساس آشکارسازی همزمان (synchronous) یا هماهنگ (coherent) عمل نموده و از سیگنال یا موج DSB سیگنال پیام را استخراج می نماید.



بلوک دیاگرام دمدوله کننده مذکور از یک نوسانساز محلی، یک ضرب کننده و یک فیلتر پایین گذر تشکیل یافته است که سیگنال DSB دریافتی یعنی $x_r(t)$ به آن اعمال می شود. خروجی این ضرب کننده را می توان بصورت زیر نوشت:

$$y(t) = x_r(t) [A_{Lo} \cos \omega_c t] = A_c A_{Lo} x(t) \cos^2 \omega_c t$$

$$= \frac{A_c A_{Lo} x(t)}{2} [1 + \cos 2\omega_c t]$$

فیلتر پایین گذر با پهنای باند $B=W$ (پهنای باند پیام) باعث می شود خروجی دمدوله کننده با سیگنال پیام مستقیماً متناسب باشد یعنی:

$$y_D(t) = \frac{KA_c A_{Lo}}{2} x(t)$$

که K ضریب فیلتر پایین گذراست.

دمدوله سازی همزمان که در اینجا ذکر شد، در آشکار سازی سیگنال تک باند جانبی و دمدوله سازی باند جانبی کناری نیز بکار می رود.

نکته مهم در این نوع آشکارسازی که به کلیه انواع دمدوله سازی خطی قابل اعمال است، همزمان بودن سیگنال نوسان ساز محلی از نظر فرکانس و فاز با موج حامل مورد استفاده در دمدوله کننده (فرستنده)، برای ایجاد موج DSB می باشد.

عدم همزمانی
در دمدوله کننده
DSB

فرض کنید که سیگنال نوسان ساز محلی، دارای یک خطای فرکانس $\Delta\omega$ و یک خطای

فاز $\Delta\phi$ نسبت به موج کریر در فرستنده باشد یعنی:

$$A_{Lo} \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi]$$

در این صورت خروجی ضرب کننده دمدولاتور، عبارت است از :

$$\begin{aligned} y(t) &= x_c(t) A_{Lo} \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi] = A_c A_{Lo} x(t) \cos \omega_c t \\ \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi] &= \frac{A_c A_{Lo}}{2} x(t) \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi] \\ &+ \frac{A_c A_{Lo}}{2} x(t) \cos[(\Delta\omega)t + \Delta\phi] \end{aligned}$$

جمله اول عبارت فوق که طیف آن حول $(2\omega_c + \Delta\omega)$ قرار دارد، بوسیله فیلتر پایین گذر مدوله کننده حذف شده و خروجی دمدوله کننده بصورت زیر خواهد بود:

$$y_D(t) = \frac{A_c A_{Lo} K}{2} x(t) \cos[\Delta\omega t + \Delta\phi]$$

جهت بررسی این پدیده دو حالت را در نظر می گیریم:

$$۱) \Delta\omega = 0, \Delta\phi \neq 0$$

در این حالت فقط خطای فاز وجود دارد و خروجی دمدوله کننده عبارت خواهد بود از:

$$y_D(t) = \frac{A_c A_{Lo} k}{2} x(t) \cos(\Delta\phi)$$

اگر $\Delta\phi$ ثابت باشد می توان گفت که خروجی دمدوله کننده با سیگنال پیام متناسب است. این خروجی به ازای $\Delta\phi = 0$ حداکثر و به ازای $\Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ صفر می شود. بنابراین خطای فاز نوسانساز محلی در صورتی که برحسب زمان ثابت باشد باعث تضعیف سیگنال خروجی دمدوله کننده شده و اعوجاجی در خروجی ایجاد نمی کند. اما متأسفانه به علت تغییرات کانال یا مسیر انتشار و انتقال، امکان دارد خطای فاز $\Delta\phi$ برحسب زمان بصورت تصادفی تغییر نموده و در چنین شرایطی ضریب $\cos \Delta\phi$ به صورت یک ضریب بهره متغیر تصادفی برحسب زمان عمل نموده که پدیده ای کاملاً نامطلوب است.

$$۲) \Delta\omega \neq 0, \Delta\phi = 0$$

در این حالت فقط خطای فرکانس وجود دارد و خروجی دمدولاتور عبارت است از:

$$y_D(t) = \frac{A_c A_{Lo} K}{2} x(t) \cos(\Delta\omega t)$$

بنابراین خروجی دمدوله کننده همان سیگنال پیام است که دچار تضعیف و اعوجاج شده است. از آنجا که معمولاً $\Delta\omega$ کوچک است، خروجی حاصل ضرب سیگنال پیام $x(t)$ و موج سینوسی، سیگنالی با تغییرات آرام دامنه می باشد، و این پدیده را beating یا اثر ضربانی می نامند و یکی از انواع نامطلوب اعوجاج محسوب می شود.

بنابراین همزمان بودن فرکانس و فاز کریر در دمدوله کننده همزمان DSB ، با کریر در مدوله کننده DSB کاملاً اهمیت داشته و بنابراین از روش ها و مدارهای خاصی جهت ایجاد این همزمانی در گیرنده های DSB و سایر دمدوله کننده های همزمان استفاده می شود که به ذکر آنها خواهیم پرداخت.

دمدوله کننده های

SSB

دمدوله کننده SSB مانند دمدوله کننده DSB با استفاده از آشکارسازی همزمان یا هماهنگ، سیگنال پیام را از سیگنال SSB استخراج می نماید. با توجه به روابط زمانی موجود برای سیگنال SSB ونحوه آشکارسازی همزمان که برای سیگنال DSB توضیح داده شد، می توان روند مشابهی را جهت استخراج سیگنال پیام از سیگنال SSB پیمود، که به دلیل تشابه انجام آن را به شما واگذار می کنیم. درضمن می توان اثرات ناشی از برابر نبودن فرکانس وفاز نوسانساز محلی را بر روی سیگنال آشکار شده، مشابه قسمت قبل بررسی کرد.

همزمانی حامل یا
بازیابی کریر در
گیرنده

در قسمت های قبل مشاهده کردیم که جهت آشکارسازی سیگنال های مدوله شده DSB و SSB به نوسانسازی که فاز و فرکانس خروجی آن با فاز و فرکانس حامل مدوله کننده فرستنده، همزمان و هماهنگ باشد نیاز است. همچنین عدم همزمانی مذکور از نظر فرکانس و فاز مورد بررسی قرار گرفت. برای تأمین همزمانی مذکور راههای متفاوتی وجود دارد که عبارتند از:

۱- ارسال پایلوت (راهنما)

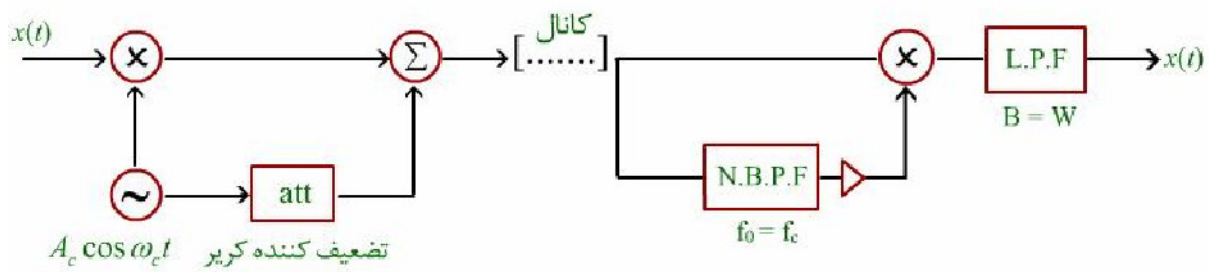
۲- استفاده از مدار مربع کننده

۳- استفاده از حلقه های قفل فاز

در ادامه به توضیح دو مورد اول پرداخته و بررسی مورد سوم را به دلیل نیاز به دانستن نحوه عملکرد PLL یا حلقه قفل شده فاز به علاقمندان واگذار می کنیم.

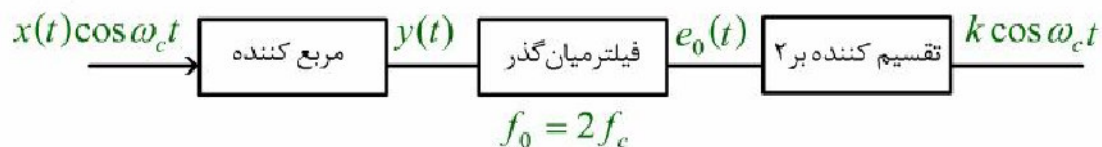
۱- ارسال پایلوت:

پایلوت یک موج سینوسی با دامنه تضعیف شده است که فرکانس آن، با فرکانس حامل برابر و یا با آن ارتباط معینی دارد. این سیگنال معمولاً همراه باندهای جانبی ارسال می شود. درگیرنده این سیگنال توسط یک فیلتر بسیار باند باریک که با فرکانس پایلوت هماهنگ شده است جدا گردیده و پس از تقویت برای همزمانی نوسانساز محلی در گیرنده بکار می رود.



۲-مدار مربع
کننده

مدارمربع کننده در بازیابی کریر که بلوک دیاگرام آن را مشاهده می کنید، بعد از به توان دو رساندن سیگنال دریافتی و عبور آن از یک فیلتر میان گذر باند باریک، سیگنالی همفاز با سیگنال کریر فرستنده و فرکانس دو برابر آن ایجاد می کند. با تقسیم بردو کردن این سیگنال از لحاظ فرکانسی به کریر همفاز و هم فرکانس با کریر مدوله کننده می رسیم.



روابط ریاضی این فرآیند را در ادامه می بینیم.
خروجی مدارمربع کننده عبارت است از :

$$y(t) = [A_c \cos \omega_c t x(t)]^2 = \frac{1}{2} A_c^2 x^2(t) + \frac{1}{2} (A_c^2 x^2(t) \cos 2\omega_c t)$$

$$y(t) = [A_c \cos \omega_c t x(t)]^2 = \frac{1}{2} A_c^2 x^2(t) + \frac{1}{2} (A_c^2 x^2(t) \cos 2\omega_c t)$$

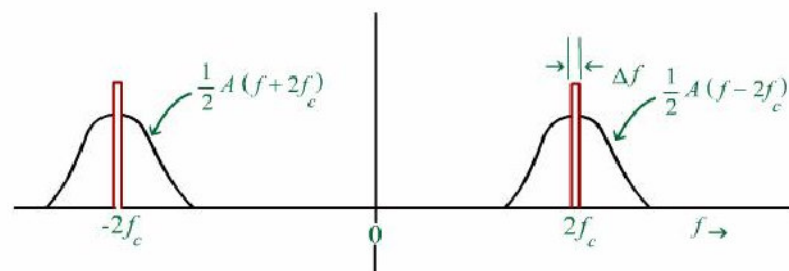
فیلترباند باریک میان گذر، جمله ی $\frac{1}{2} A_c^2 x^2(t)$ را حذف کرده و تمام جمله ی دوم را عبور می دهد. اگر پهنای باند $x(t)$ برابر w باشد، در اینصورت پهنای باند جمله ی دوم $2w$ حول $2f_c$ خواهد بود.

$$x^2(t) \leftrightarrow A(f)$$

اگر تبدیل فوریه $x^2(t)$ را $A(f)$ فرض کنیم:

$$x^2(t) \cos 2\omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2} [A(f + 2f_c) + A(f - 2f_c)]$$

آنگاه:



اگر پهنای باند فیلتر میان گذر $\Delta f \ll 2w$ باشد در خروجی آن فقط قطعه ای از طیف ورودی با پهنای باند Δf و حول $2f_c$ ظاهر خواهد شد.

طیف خروجی اساساً بصورت دو پالس باریک که سطح هر یک $\left(\frac{A_c^2}{2}\right)\left(\frac{A(0)}{2}\right)\Delta f$ است بوده، ولی آنها را می توان بصورت ایمپالس تقریب زد. پس:

$$E_o(f) = \frac{A_c^2}{2} \frac{A(o)\Delta f}{2} [\delta(f + 2f_c) + \delta(f - 2f_c)]$$

و در نتیجه :

$$e_o(t) = \frac{A_c^2}{2} A(o)\Delta f \cos(2\omega_c t)$$

باتوجه به اینکه مقدار طیف سیگنال انرژی در نقطه صفر مقدار انرژی آن را مشخص می کند می توان نوشت :

$$e_o(t) = \left(\frac{A_c^2}{2} \right) E_x \Delta f \cos(2\omega_c t)$$

مشاهده می شود که سیگنال $e_o(t)$ از نظر فاز با حامل دریافتی همزمان بوده ولی فرکانس آن، دو برابر فرکانس حامل است. با اعمال آن به تقسیم کننده فرکانسی ۲ به ۱، در خروجی سیگنالی که در فاز و فرکانس با حامل دریافتی هماهنگ و همزمان است بدست خواهد آمد.

در این روش باید به این نکته توجه شود که علامت سیگنال دریافتی در مدار مربع کننده از بین رفته و ابهامی در علامت حامل بازسازی شده (یا ابهام فاز) بوجود می آید. این امر در مورد سیگنال های آنالوگ اهمیتی ندارد ولی در مورد سیگنالهای دیجیتالی باید تغییراتی در این روش ایجاد کرد.

در مدولاسیون خطی که بحث آن در قسمت قبل مطرح شد، سه ویژگی بارز وجود داشت:

- ۱- پوش سیگنال مدوله شده شبیه پیام است و طیف مدوله شده اساساً همان طیف انتقال یافته پیام در حوزه فرکانس است .
 - ۲- حداکثر پهنای انتقال، دو برابر پهنای باند پیام است.
 - ۳- نسبت سیگنال به نویز در خروجی سیستم مدوله سازی خطی هیچ وقت بهتر از نسبت مربوطه در سیستم انتقال باند پایه آن نبوده و آنرا فقط با افزایش توان ارسالی می توان بهبود بخشید.
- در مقایسه با مدوله سازی خطی ، مدوله سازی نمایی از مشخصات زیر برخوردار است:
- ۱- یک فرآیند غیرخطی بوده و در نتیجه طیف مدوله شده رابطه ساده ای با طیف پیام ندارد.
 - ۲- پهنای باند انتقال به مراتب بزرگتر از دو برابر پهنای باند پیام است.
 - ۳- در مقابل نیاز مدوله سازی نمایی به پهنای باند انتقال بزرگتر، این نوع مدوله سازی می تواند بدون ازدیاد توان ارسالی نسبت سیگنال به نویز افزایش یافته ای را تامین کند.
- بنابراین با استفاده از مدوله سازی نمایی در طراحی یک سیستم مخابراتی می توان پهنای باند را با توان یا بالعکس مبادله کرد.

فصل هفتم:

مدولاسیون نمایی موج پیوسته

مدولاسیون فاز و
مدولاسیون فرکانس
قسمت ۱

مدولاسیون فاز (Phase Modulation)

و مدولاسیون فرکانس (Frequency Modulation)

سیگنال موج پیوسته $x_c(t)$ را که در آن پوش ثابت ولی فاز بر حسب زمان متغیر

است را در نظر بگیرید:

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$\theta_c(t)$ را فاز لحظه ای گوئیم و طبق تعریف عبارت است از:

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t)$$

بنابراین سیگنال $x_c(t)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\theta_c(t)}]$$

بنابراین اگر $\theta_c(t)$ حاوی اطلاعات پیام $x(t)$ باشد فرآیندی بنام مدوله سازی زاویه ای یا مدوله سازی نمایی انجام شده است.

مدولاسیون نمایی به دو نوع مدولاسیون فاز و فرکانس قابل تفکیک می باشد. در مدولاسیون فاز وابستگی $\theta_c(t)$ به $x(t)$ به صورت زیر است:

$$\phi(t) = \phi_\Delta x(t) \quad -180^\circ \leq \phi_\Delta \leq 180^\circ$$

توجه داریم که ϕ_Δ عدد ثابت است.

بنابراین رابطه سیگنال مدوله شده را می توان بصورت زیر نوشت :

$$x_c(t) = \cos(\omega_c t + \phi_\Delta x(t))$$

مشاهده می شود که در مدولاسیون فاز، فاز لحظه ای با سیگنال مدوله گر مستقیماً متناسب است. از آنجا که سیگنال پیام را نرمالیزه در نظر می گیریم $|x(t)| \leq 1$ ، ϕ_Δ حداکثر تغییر فاز بوجود آمده توسط $x(t)$ را نشان می دهد و با توجه به محدودیتی که برای ϕ_Δ در نظر گرفته ایم یعنی $-180^\circ \leq \phi_\Delta \leq 180^\circ$ این پارامتر مشابه μ در مدولاسیون دامنه می باشد و به آن شاخص مدوله سازی فاز یا انحراف فازی (Phase deviation) می گویند. با مشخص شدن تعریف مدولاسیون فاز به سراغ مدولاسیون فرکانس می رویم .

فرکانس لحظه ای $f_i(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_c(t)}{dt}$$

انحراف فرکانس لحظه ای از ω_c به صورت مشتق انحراف فاز لحظه ای تعریف می شود عبارت است از:

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

حال اگر انحراف لحظه ای فرکانس، یعنی $f_d(t)$ متناسب با پیام باشد مدولاسیون FM یا فرکانس ایجاد می شود. پس در مدولاسیون FM داریم :

$$f_d(t) = f_\Delta x(t)$$

با توجه به نرمالیزه بودن $x(t)$ ، f_Δ ماکزیمم تغییرات فرکانس می باشد و به آن انحراف فرکانسی (Frequency deviation) می گویند.

با رعایت کردن شرط $f_\Delta < f_c$ این اطمینان حاصل می شود که در همه شرایط $f_i(t) > 0$ مثبت است. اما معمولاً در عمل $f_\Delta \leq f_c$ می باشد تا ماهیت میان گذر بودن سیگنال $x_c(t)$ محفوظ بماند.

با توجه به رابطه $f_d(t)$ با سیگنال پیام و انحراف فاز لحظه ای داریم :

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_\Delta x(t)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه خواهیم داشت :

$$\phi(t) = 2\pi f_{\Delta} \int^t x(\lambda) d\lambda + \phi(t_0) \quad t \geq t_0$$

اگر t_0 به نحوی انتخاب شود که $\phi(t_0) = 0$ شود در این صورت داریم :

$$\phi(t) = 2\pi f_{\Delta} \int^t x(\lambda) d\lambda$$

و بنابراین رابطه ریاضی سیگنال F.M را می توان به صورت زیر نوشت :

$$x_c(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_{\Delta} \int^t x(\lambda) d\lambda\right]$$

با مقایسه روابط ریاضی FM و PM می توان نتیجه گرفت که تنها وجه تمایز این دو مدولاسیون، وجود انتگرال پیام در FM می باشد. این دو نوع مدولاسیون را به صورت بلوک دیاگرامی مشاهده می کنید.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{PM}} \rightarrow x_c(t) = A_c \cos [\omega_c t + \phi_\Delta x(t)]$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{FM}} \rightarrow x_c(t) = A_c \cos [\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda) d\lambda]$$

با توجه به رابطه مدولاسیون FM، اگر از پیام انتگرال گرفته و آنرا مدوله سازی کنیم سیگنال F.M بدست می آید.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow \boxed{\text{P.M}} \rightarrow \text{F.M}$$

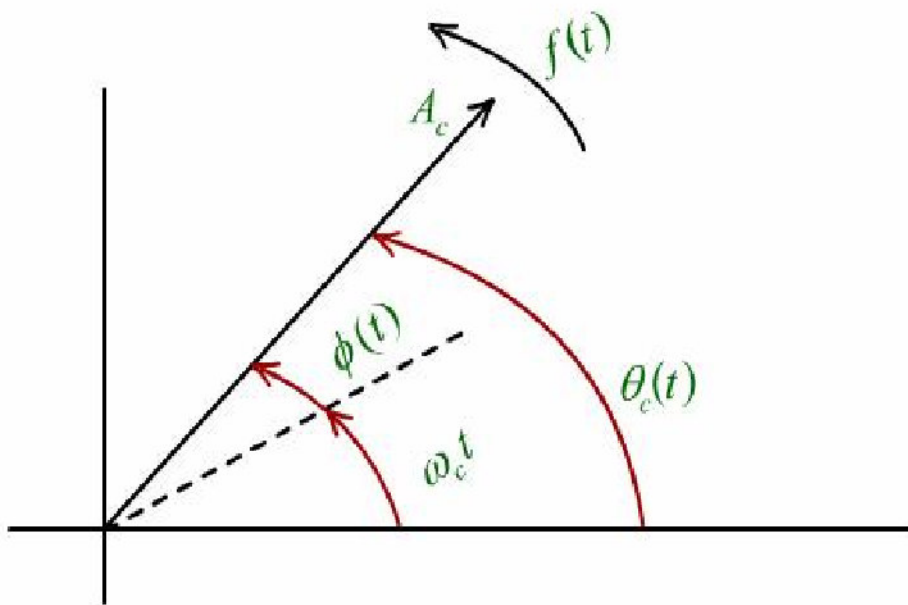
و همچنین اگر از پیام مشتق گرفته و آن را مدوله فرکانسی کنیم سیگنال P.M حاصل می شود.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow \boxed{\text{F.M}} \rightarrow \text{P.M}$$

دیاگرام فازوری چرخشی نشان داده شده در شکل برای تعبیر و تفسیر مدوله سازی فاز و فرکانس سودمند است.

زاویه کلی $\theta_c(t)$ از جمله چرخشی ثابت $\omega_c(t)$ و $\phi(t)$ تشکیل یافته است. بنابراین سرعت لحظه ای چرخش

فازور بر حسب بسیکل بر ثانیه $f_i(t)$ می باشد که فرکانس لحظه ای $x_c(t)$ است.



با توجه به روابط مربوط به مدولاسیون نمایی و مدولاسیون خطی می توان به چند تفاوت عمده زیر اشاره کرد.

دامنه موج PM یا FM ثابت بوده و در نتیجه مستقل از پیام $x(t)$ است. توان متوسط ارسالی در این شرایط عبارت است از:

$$S_T = \frac{1}{2A_c^2}$$

همچنین نقاط عبور از صفر سیگنال مدوله نمایی، متناوب نمی باشد در حالی که نقاط مذکور در مدوله سازی خطی

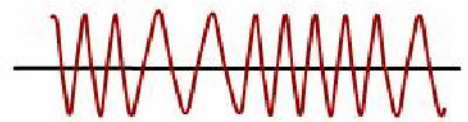
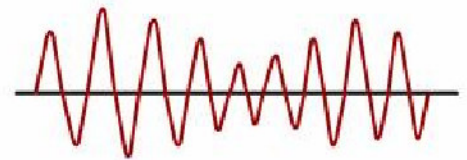
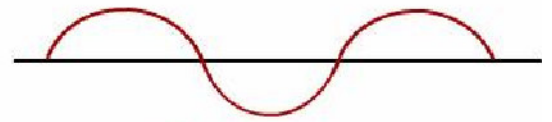
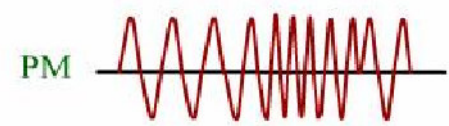
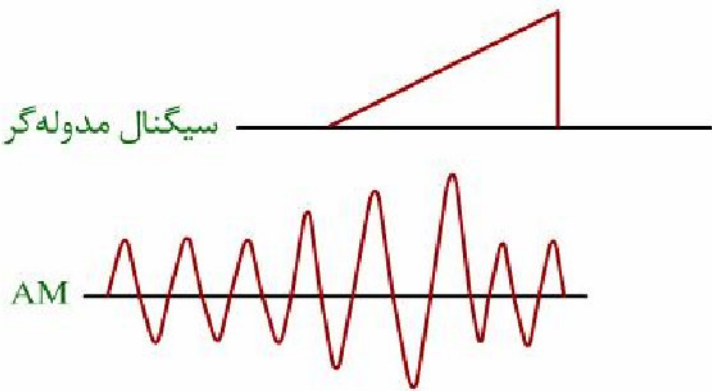
متناوب بوده و در حقیقت اطلاعات پیام در نقاط عبور از صفر سیگنال مدوله نمایی قرار دارند مشروط بر آن که فرکانس

حامل به حد کافی بزرگ باشد. نهایتاً با توجه به غیر خطی بودن فرآیند مدوله سازی نمایی، موج مدوله شده ابداً شبیه

پیام نیست. جهت مشاهده این خواص به شکل موج سیگنال مدوله شده AM، PM و FM برای یک سیگنال پیام

سینوسی و یک سیگنال پیام مثلثی توجه کنید.

سیگنال مدوله گر



فصل هفتم:

مدولاسیون نمایی موج پیوسته

مدولاسیون فاز و فرکانس باند باریک
Narrow band P.M
Narrow band F.M قسمت ۱

مدولاسیون فاز و فرکانس
باند باریک
Narrow band P.M
Narrow band F.M

می خواهیم طیف فرکانسی مدولاسیون نمایی را بدست آوریم . برای این منظور رابطه زمانی مدولاسیون نمایی را به صورت زیر بسط می دهیم :

$$\begin{aligned}x_c(t) &= A_c \cos[\omega_c t + \phi(t)] \\ &= A_c \cos \phi(t) \cos \omega_c t - A_c \sin \phi(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

اگر بخواهیم مدولاسیون باند باریک را بررسی کنیم باید شرط $\phi(t) \ll 1$ برقرار باشد . در این صورت می توان تقریب های زیر را به کاربرد:

$$\cos \phi(t) \approx 1 \qquad \sin \phi(t) \approx \phi(t)$$

بنابراین رابطه زمانی سیگنال مدوله شده نمایی به صورت زیر قابل نوشتن است :

$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t - A_c \phi(t) \sin \omega_c t$$

اگر از این رابطه تبدیل فوریه بگیریم، طیف مدولاسیون نمایی باند باریک به صورت زیر قابل نوشتن است :

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] - \frac{A_c}{2j} [\Phi(f - f_c) - \Phi(f + f_c)]$$

$\Phi(f)$ تبدیل فوریه $\phi(t)$ می باشد.
با توجه به روابط انحراف فاز لحظه ای برای مدولاسیون PM و FM یعنی:

$$\phi(t) = \phi_{\Delta} x(t)$$

برای مدولاسیون PM

$$\phi(t) = 2\pi f_{\Delta} \int^t x(\lambda) d\lambda$$

برای مدولاسیون FM

و نوشتن تبدیل فوریه این روابط داریم:

$$\Phi(f) = \phi_{\Delta} X(f)$$

برای مدولاسیون PM

$$\Phi(f) = \frac{2\pi f_{\Delta} X(f)}{j2\pi f} = -jf_{\Delta} \frac{X(f)}{f}$$

برای مدولاسیون FM

تبدیل فوریه سیگنال مدولاسیون فاز و مدولاسیون فرکانس باند باریک را می توان به صورت زیر نوشت :

$$X_o(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{jA_c}{2} \phi_\Delta [X(f - f_c) - X(f + f_c)]$$

برای مدولاسیون فاز:

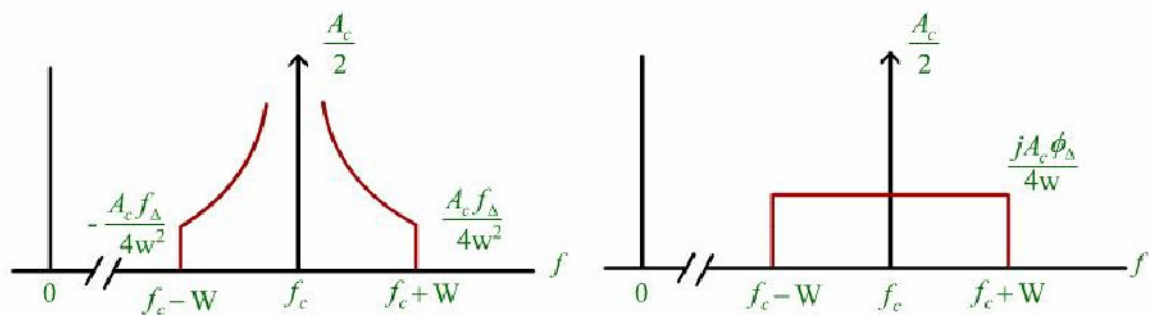
$$X_o(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c f_\Delta}{2} \left[\frac{X(f - f_c)}{f - f_c} - \frac{X(f + f_c)}{f + f_c} \right]$$

برای مدولاسیون فرکانس:

به عنوان مثال فرض کنید، سیگنال پیام به صورت $x(t) = \sin c(2wt)$ باشد. در این صورت طیف پیام عبارت است از:

$$X(f) = \frac{1}{2w} \Pi\left(\frac{f}{2w}\right)$$

طیفهای NBPM و NBFM را برای پیام مورد نظر در شکل مشاهده می نمائید.



هر دو طیف، ایمپالسی در فرکانس حامل داشته و پهنای باند هر دو، $2W$ است. دقت کنید که باند جانبی تحتانی در NBFM، ۱۸۰ درجه با باند جانبی فوقانی اختلاف فاز دارد. این اختلاف فاز با علامت منفی در باند جانبی تحتانی نشان داده شده است. در N.B.P.M تغییر فاز باندهای جانبی ۹۰ درجه است که با j نمایش داده شده است. به غیر از تغییر فاز می توان ملاحظه نمود که طیف N.B.P.M کاملاً مشابه طیف AM با سیگنال مدوله گر یکسان می باشد.

فصل هفتم:

مدولاسیون نمایی موج پیوسته

تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی Fm قسمت ۱

تجزیه و تحلیل طیف
برای مدولاسیون
فرکانسی fm (نوا)

فرض کنید، سیگنال پیام برای مدولاسیون نمایی، یک سیگنال سینوسی با فرکانس f_m

باشد یعنی :

$$x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

برای این پیام سیگنال مدوله شده **PM** , **FM** را می توان بصورت زیر نوشت :

سیگنال **PM** عبارت خواهد بود از:

$$x_o(t) = \begin{cases} A_c \cos(\omega_c t + \phi_\Delta A_m \cos(2\pi f_m t)) \\ A_c \cos\left(\omega_c t + \frac{f_\Delta A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right) \end{cases}$$

و سیگنال **FM** عبارت است از:

بدون از دست دادن کلیت موضوع و برای سادگی در نوشتن روابط، فرض می کنیم که سیگنال مدوله کننده برای مدولاسیونهای **PM** و **FM** ۹۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند.

برای حالت P.M

$$x(t) = \begin{cases} A_m \sin \omega_m t \\ A_m \cos \omega_m t \end{cases}$$

برای حالت F.M

در این صورت انحراف فاز لحظه ای را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\phi(t) = \beta \sin \omega_m t$$

که در آن β طبق روابط زیر بدست می آید :

برای مدولاسیون p.M

$$\beta = \begin{cases} \phi_{\Delta} A_m \\ \frac{A_m f_{\Delta}}{f_m} \end{cases}$$

برای مدولاسیون F.M

پارامتر β با مقادیر فوق، شاخص مدوله سازی F.M یا p.M در حالت مدولاسیون نوا می باشد. این پارامتر با

حداکثر انحراف فاز برابر بوده و در هر مورد p.M و F.M با A_m متناسب است. اما باید توجه کرد که در حالت

F.M, β با فرکانس نوای f_m بطور معکوس متناسب است.

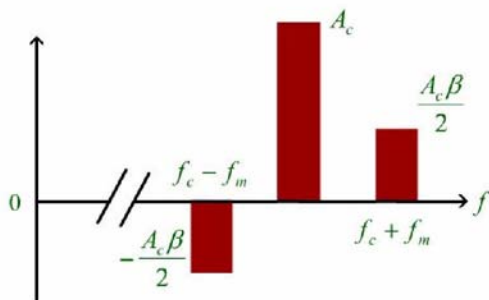
سیگنال مدوله شده نمایی با پیام تن را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} x_o(t) &= A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin \omega_m t] \\ &= A_c \cos \omega_c t \cos(\beta \sin \omega_m t) - A_c \sin \omega_c t \sin(\beta \sin \omega_m t) \end{aligned}$$

در مدولاسیون نمایی باند باریک، $\beta \ll 1$ می باشد و بنابراین رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned} x_o(t) &= A_c \cos \omega_c t - A_c \beta \sin \omega_m t \sin \omega_c t \\ &= A_c \cos \omega_c t - \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t \end{aligned}$$

طیف خطی این عبارت را در نمودار مشاهده می کنید.



مشاهده می شود که این طیف مشابه طیف مدولاسیون AM است.

برای بررسی، به ازاء هر مقدار اختیاری شاخص مدولاسیون، رابطه سیگنال مدوله شده را به صورت نمایی می نویسیم:

$$x_o(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t) = A_c \operatorname{Re}[e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \sin \omega_m t}]$$

عبارت $e^{j\beta \sin \omega_m t}$ متناوب با پریود $T_m = \frac{1}{f_m}$ بوده و بنابراین می توان آن را با استفاده از سری فوریه بسط داد.

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi f_m t}$$

ضرایب سری فوریه یعنی C_n ها از انتگرال زیر محاسبه می شوند:

$$C_n = \frac{1}{T_m} \int_{T_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} \cdot e^{-j2\pi f_m t} dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $\lambda = 2\pi f_m t$ انتگرال فوق به صورت زیر ساده می شود :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta \sin \lambda} \cdot e^{-jn\lambda} \left(\frac{d\lambda}{2\pi f_m} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda = J_n(\beta) \end{aligned}$$

که J_n تابع بسل است.

در ریاضیات، انتگرال بدست آمده فوق را تابع بسل نوع اول مرتبه n ام با آرگومان β می نامند. بنابراین داریم :

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi f_m t}$$

و سیگنال مدوله شده نمایی برای پیام تن، به صورت زیر در می آید:

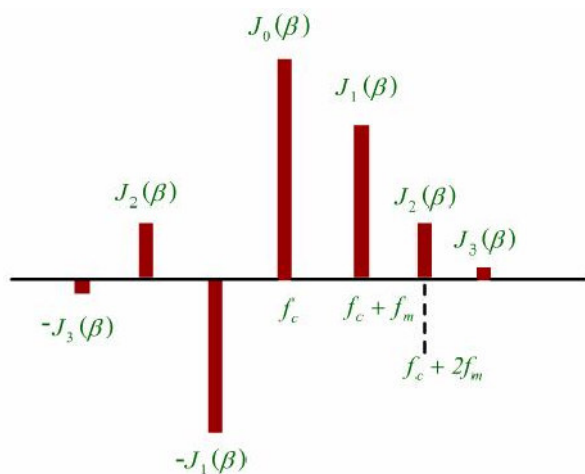
$$x_o(t) = \text{Re} \left[A_c e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \right]$$

$$= \text{Re} \left[A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi(f_c + nf_m)t} \right] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

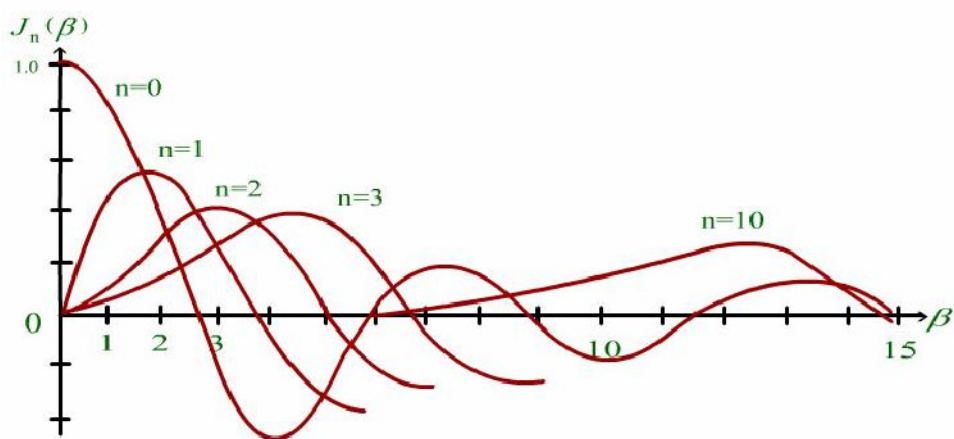
با بررسی رابطه اخیر ملاحظه می شود که طیف FM از یک خط فرکانس حامل به اضافه تعداد بی نهایت خطوط باند جانبی در فرکانس های $f_c \pm nf_m$ تشکیل یافته است. مشاهده می شود که کلیه خطوط مجاور از یکدیگر به اندازه فرکانس موج مدوله گر یعنی f_m فاصله داشته و خطوط باند جانبی تحتانی با مرتبه فرد از نظر فاز نسبت به حامل مدوله نشده معکوس شده اند.

علت این معکوس شدگی فاز خاصیت تابع بسل است . یعنی:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$



با توجه به اینکه دامنه نسبی هر خط در فرکانس $f_c + nf_m$ با $J_n(\beta)$ مشخص می شود، قبل از بررسی بیشتر و مفصل تر، ضروری است که با خصوصیات تابع بسل آشنا شویم. در شکل چند تابع بسل با مراتب مختلف را بر حسب آرگومان β مشاهده می کنید. از این شکل می توان چند خاصیت مهم را نتیجه گرفت:



۱- دامنه نسبی خط حامل $J_0(\beta)$ ، به شاخص مدوله سازی β بستگی داشته و در نتیجه به سیگنال مدوله گر وابسته است. بنابراین بر خلاف مدوله سازی خطی، مؤلفه فرکانس حامل موج FM حاوی قسمتی از اطلاعات پیام است. همچنین طیف هایی می تواند بوجود آید که در آنها خط حامل دامنه، صفر باشد، چون به ازاء $\beta = 2.4, 5.5, \dots$ ، $J_0(\beta) = 0$ می باشد.

۲- تعداد خطوط باند جانبی با دامنه نسبی قابل ملاحظه نیز به β بستگی دارد. اگر $\beta \ll 1$ باشد، فقط J_0 و J_1 قابل ملاحظه بوده و طیف حاصل متشکل از یک حامل و دو خط باند جانبی می باشد. برای این حالت:

$$J_0(\beta) \approx 1 \quad J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2}$$

اما اگر $\beta \geq 1$ باشد تعداد زیادی خطوط باند جانبی وجود داشته و طیفی کاملاً متفاوت با طیف مدوله سازی خطی بوجود خواهد آمد.

برای این حالت

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n \times n!}$$

۳- مقادیر بزرگ β سبب می گردد که پهنای باند بزرگتری که شامل خطوط باند جانبی با دامنه نسبی قابل ملاحظه می باشد، در نظر گرفته شود که این امر با تعبیر فیزیکی انحراف فرکانسی بزرگتر کاملاً هماهنگ بوده و مطابقت دارد.

روابط ریاضی دیگری بر $J_n(\beta)$ حاکم است که در ادامه از آنها استفاده خواهیم نمود:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

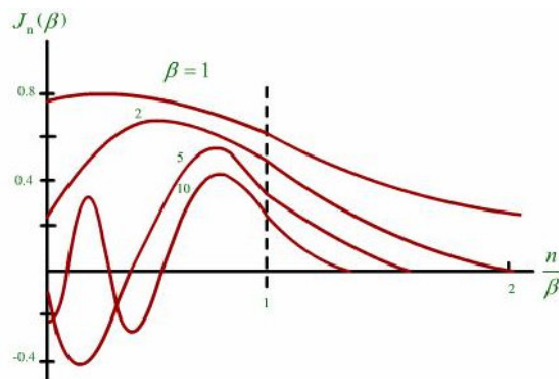
$$\cos(\beta \sin \omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2J_n(\beta) \cos(n\omega_m t)$$

فقط برای n های فرد

$$\sin(\beta \sin \omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2J_n(\beta) \sin(n\omega_m t)$$

فقط برای n های زوج

نمودار $J_n(\beta)$ بصورت تابعی از $\frac{n}{\beta}$ به ازای مقادیر ثابت β در درک بیشتر از تابع بسل مفید می باشد.



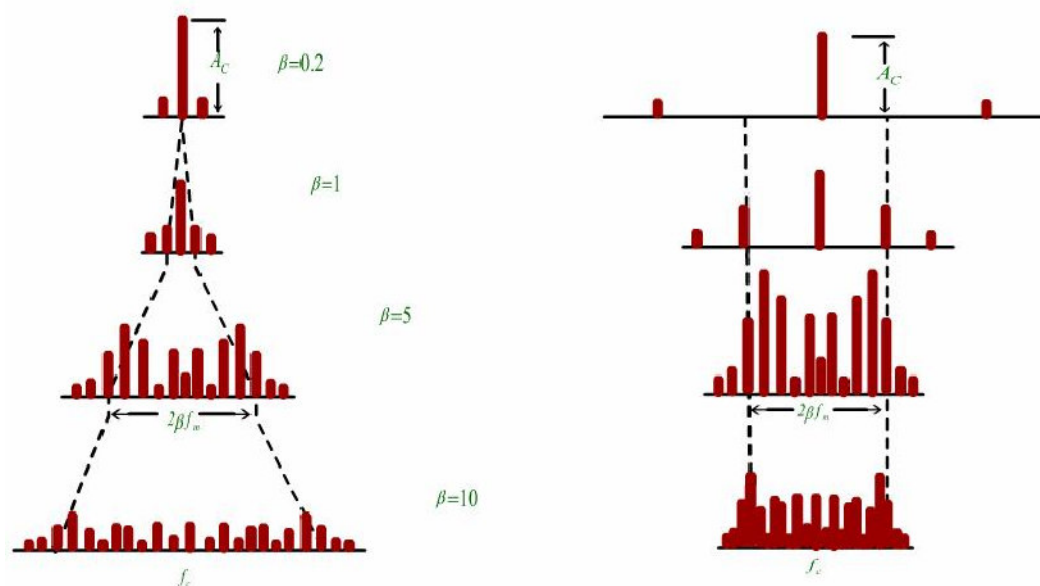
با توجه به این شکل کلی $J_n(\beta)$ ها به ازای $\frac{n}{\beta} \gg 1$ میرا شده و اگر $\frac{n}{\beta} \gg 1$ باشد در این صورت $|J_n(\beta)| \ll 1$

خواهد بود. مقادیر منتخب $J_n(\beta)$ را تا دو رقم اعشار در جدول زیر مشاهده می کنید.

n	$J_n(0.1)$	$J_n(0.2)$	$J_n(0.5)$	$J_n(1.0)$	$J_n(2.0)$	$J_n(5.0)$	$J_n(10)$	n
0	1.00	0.99	0.94	0.77	0.22	-0.18	-0.25	0
1	0.05	0.10	0.24	0.44	0.58	-0.33	0.04	1
2			0.03	0.11	0.13	0.05	0.25	2
3				0.02	0.03	0.36	0.06	3
4						0.26	-0.22	4
5						0.13	-0.23	5
6						0.05	-0.01	6
7						0.02	0.22	7
8							0.32	8
9							0.29	9
10							0.21	10
11							0.12	11
12							0.06	12
13							0.03	13
14							0.01	14

مقادیری که در جدول نوشته نشده است کمتر از ۰,۰۱ بوده اند.

با استفاده از مقادیر این جدول طیف های خطی را برای β های مختلف رسم کرده ایم .



در این شکل ها معکوس شدن علامت $J_n(\beta)$ برای n های فرد منظور نشده است. در قسمت الف این شکل که شامل هر دو مورد FM و PM است، β افزایش می یابد ولی f_m ثابت در نظر گرفته شده است. قسمت ب فقط به مورد FM قابل اعمال بوده و اثر افزایش β بواسطه کاهش f_m را در حالتیکه $A_m f_\Delta$ ثابت نگه داشته می شود نشان می دهد. خطوط منقطع در شکل، خطوط باند جانبی عمده و قابل ملاحظه را در گستره $f_c \pm \beta f_m$ به ازای مقادیر افزایشی β در بر گرفته و مشخص می سازد.

فصل هفتم:

مدولاسیون نمائی موج پیوسته

تعبیر باند باریک $x_0(t)$ برای پیام

قسمت ۱

تعبیر باند باریک
 $x_0(t)$ برای پیام تن

فرض کنید $\beta \ll 1$ باشد. در این صورت داریم:

$$x_o(t) = A_c J_0(\beta) \cos \omega_c t + A_c J_1(\beta) \cos(\omega_c + \omega_m)t - A_c J_1(\beta) \cos(\omega_c - \omega_m)t$$

که با توجه به مقادیر $J_0(\beta)$ و $J_1(\beta)$ در این حالت خواهد شد:

$$x_o(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t - \frac{A_c \beta}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t$$

با بسط کسینوس ها و ساده کردن عبارت بدست آمده خواهیم داشت:

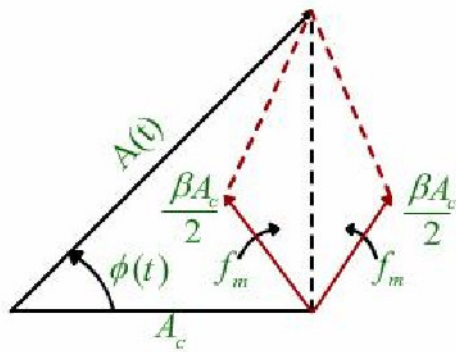
$$x_o(t) = A_c \cos \omega_c t - 2 \frac{A_c \beta}{2} \sin \omega_m t \sin \omega_c t$$

بنابراین پوش و فاز حاصل از حامل و اولین زوج از خطوط باند جانبی عبارتند از:

$$A(t) = \sqrt{A_c^2 + \left(2 \frac{\beta}{2} A_c \sin \omega_m t\right)^2} = A_c \left[1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} \sin 2\omega_m t\right]$$

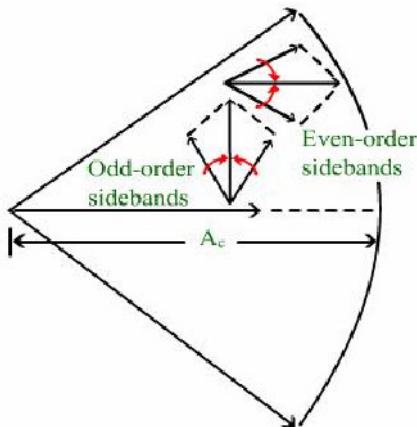
$$\phi(t) = \tan^{-1}[\beta \sin \omega_m t] \approx \beta \sin \omega_m t$$

بنابراین تغییرات فاز به همان صورتی است که مورد نظر می باشد ولی تغییرات دامنه اضافی در دو برابر فرکانس نوا مشاهده می شود. دیا گرام فازوری عبارت مذکور را می توانید در شکل مشاهده کنید.



توجه کنید که به چه نحو معکوس شدن فاز باند جانبی تحتانی سبب ایجاد مؤلفه ای عمود (یا تربیعی) بر فازور حامل شده است. این تعامد دقیقاً همان پدیده ای است که برای تولید مدوله سازی دامنه، مورد نیاز است.

برای حذف تغییرات دامنه در دو برابر فرکانس نوا، باید زوج دوم خطوط باند جانبی را که با سرعت $\pm 2f_m$ نسبت به حامل چرخیده و برآیند آنها همسو و موازی حامل است منظور شوند. با این عمل مدوله سازی دامنه نامطلوب حذف می شود ولی در مقابل، فاز را دچار اعوجاج می سازد. اعوجاج فاز مذکور را می توان با اضافه کردن زوج سوم خطوط باند جانبی از بین برد ولی دوباره مدوله سازی دامنه بوجود می آید و این پدیده به همین صورت ادامه می یابد. اگر کلیه خطوط طیفی در نظر گرفته شوند زوج های فرد دارای برآیندی متعامد بر حامل بوده و در نتیجه مدوله سازی فرکانس مورد نظر به همراه مدوله سازی دامنه نامطلوب بوجود می آید. برآیند زوج های زوج که با حامل همسو و موازی است، تغییرات دامنه را تصحیح می نماید. نتیجه نهایی که می توانید آن را در شکل مشاهده نمایید، فازوری است که نوک آن قوس مدوری را می پیماید و طول آن دامنه ثابت A_c را مشخص می سازد.



تجزیه و تحلیل طیف
فرکانسی FM برای
مدولاسیون چند نوایی

روش سری فوریه که در قسمت قبل مورد استفاده قرار گرفت را می توان برای مدوله سازی چند نوایی FM نیز بکار برد. به عنوان مثال فرض کنید پیام به صورت زیر باشد:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

که در آن f_1 و f_2 از نظر هارمونیک با هم ارتباطی ندارند. با توجه به رابطه سیگنال FM یعنی:

$$x_0(t) = A_c \cos \left[\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda) d\lambda \right]$$

موج مدوله شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x_0(t) = A_c \cos [\omega_c t + \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t]$$

که در آن $\beta_1 = \frac{A_1 f_\Delta}{f_1}$ و $\beta_2 = \frac{A_2 f_\Delta}{f_2}$ می باشند. اگر رابطه $x_0(t)$ را بر اساس بسط کسینوس ها بنویسیم.

$$x_0(t) = A_c \cos \omega_c t [\cos(\beta_1 \sin \omega_1 t) \cos(\beta_2 \sin \omega_2 t) - \sin(\beta_1 \sin \omega_1 t) \sin(\beta_2 \sin \omega_2 t)]$$

$$- A_c \sin \omega_c t [\sin(\beta_1 \sin \omega_1 t) \cos(\beta_2 \sin \omega_2 t) + \sin(\beta_2 \sin \omega_2 t) \cos(\beta_1 \sin \omega_1 t)]$$

با توجه به بسط $\cos(\beta \sin \omega_m t)$ و $\sin(\beta \sin \omega_m t)$ بر حسب توابع بسل که قبلاً معرفی شده است، رابطه

نهایی سیگنال مدوله شده FM با دو نوا بصورت زیر قابل نوشتن است:

$$x_0(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t$$

برای تعبیر و تفسیر رابطه فوق، خطوط طیفی را به چهار گروه تقسیم بندی می کنیم:

$$x_0(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t$$

برای تعبیر و تفسیر رابطه فوق، خطوط طیفی را به چهار گروه تقسیم بندی می کنیم:

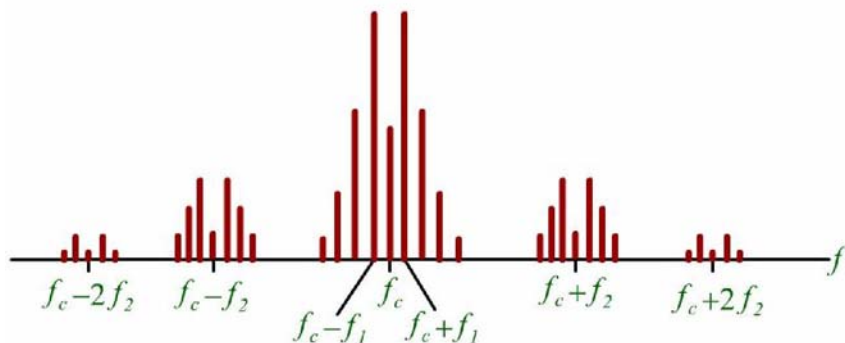
۱- خط حامل با دامنه $A_c J_0(\beta_1) J_0(\beta_2)$

۲- خطوط باند جانبی در $f_c \pm n f_1$ حاصل از یک نوا به تنهایی

۳- خطوط باند جانبی در $f_c \pm m f_2$ حاصل از نوای دیگر به تنهایی

۴- خطوط باند جانبی در $f_c \pm n f_1 \pm m f_2$ (این گروه از خطوط باند جانبی در مدولاسیون خطی بوجود نمی آید).

طیف FM با دو نوا که شامل انواع مختلف خطوط طیفی است را در شکل مشاهده می نمائید.



در این شکل فازهای منفی خطوط طیفی فرد $J_n(\beta)$ و $J_m(\beta)$ همگی مثبت در نظر گرفته شده اند. در

این شکل $f_1 \ll f_2$ و $\beta_1 > \beta_2$ فرض شده است و تحت این شرایط می توان ملاحظه کرد که هر خط

باند جانبی در $f_c \pm m f_2$ مشابه یک حامل FM دیگر با مدوله سازی نوا به فرکانس f_1 ظاهر شده و عمل می نماید.

بطور کلی می توان گفت که در مدوله سازی FM با پیام تک نوا یا چند نوا مشروط بر آن که نواها از نظر هارمونیک با هم مرتبط باشند، $\phi(t)$ و در نتیجه $e^{j\phi(t)}$ متناوب بوده و با استفاده از سری فوریه نمایی می توان $e^{j\phi(t)}$ را بسط داد. بنابراین اگر دوره تناوب $\phi(t)$ ، T_0 باشد ضرایب سری فوریه عبارتند از:

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j(\phi(t) - n\omega_0 t)} dt$$

رابطه کلی سیگنال FM به صورت زیر در می آید:

$$x_0(t) = A_c \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(\omega_c + n\omega_0)t} \right]$$

بطوریکه $A_c |C_n|$ دامنه خط طیفی در $f = f_c + nf_0$ می باشد.

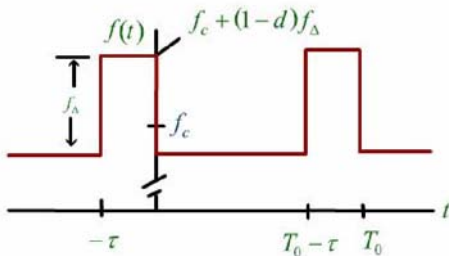
فصل هفتم:

مدولاسیون نمائی موج پیوسته

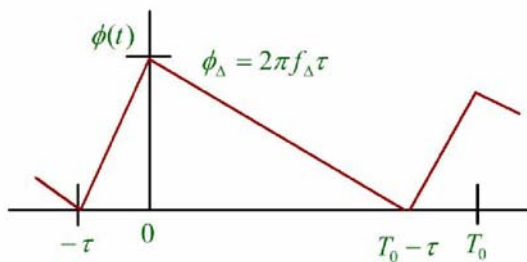
تجزیه و تحلیل طیف فرکانسی FM
برای مدولاسیون چند نوائی - قسمت ۳

مثال

اگر $x(t)$ یک رشته متناوب از پالس های چهار گوش با دامنه واحد و پهنای پالس τ و دوره تناوب T_0 و دوره ی کارکرد $d = \frac{\tau}{T_0}$ باشد، فرکانس لحظه ای موج FM پس از حذف مؤلفه DC سیگنال مدوله گر یعنی $\langle x(t) \rangle = d$ به صورت شکل نشان داده شده می باشد.



مبدأ زمانی به نحوی انتخاب شده است که $\phi(t)$ مطابق با شکل دارای مقدار پیک $\phi_\Delta = 2\pi f_\Delta \tau$ در $t = 0$ باشد.



همچنین ثابت انتگرال گیری به نحوی انتخاب شده است که $\phi(t) \geq 0$ باشد پس:

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) & -\tau < t < 0 \\ \phi_\Delta \left(1 - \frac{t}{T_0 - \tau}\right) & 0 < t < T_0 - \tau \end{cases}$$

روابط اخیر محدوده انتگرال گیری $C(nf_0)$ را مشخص می کنند. بعد از انجام این انتگرال گیری به نتیجه زیر

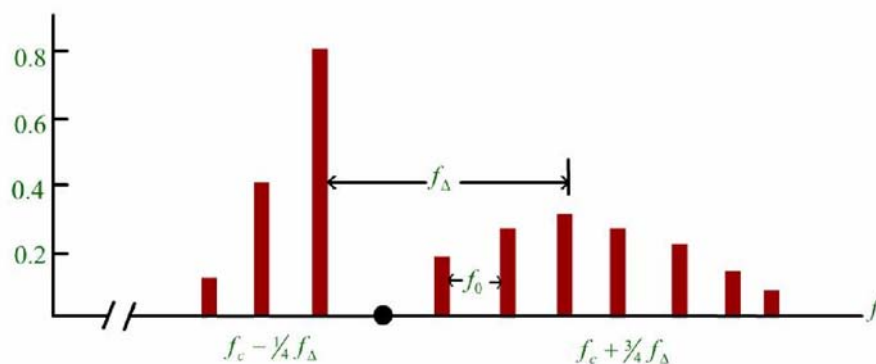
می رسیم:

$$C(nf_0) = \left[\frac{\sin \pi(\beta - n)d}{\pi(\beta - n)} + \frac{(1 - d)\sin \pi(\beta - n)d}{\pi(\beta - n)d + n\pi} \right] e^{j\pi(\beta + n)d} =$$

$$\frac{\beta d}{(\beta - n)d + n} \sin c(\beta - n)d e^{j\pi(\beta + n)d}$$

که در آن $\beta = f_{\Delta} T_0 = \frac{f_{\Delta}}{f_0}$ می باشد. نقش β مشابه شاخص مدوله سازی در مدوله سازی تک نوا است

. طیف خطی عبارت مذکور را به ازاء $d = \frac{1}{4}$ ، $\beta = 4$ و $A_c = 1$ در شکل مشاهده می نمائید.



به عدم وجود تقارن در این شکل و مقادیر پیک در فرکانس های $f_c + \frac{3}{4}f_{\Delta}$ و $f_c - \frac{1}{4}f_{\Delta}$ توجه کنید.

پهنای باند
انتقال

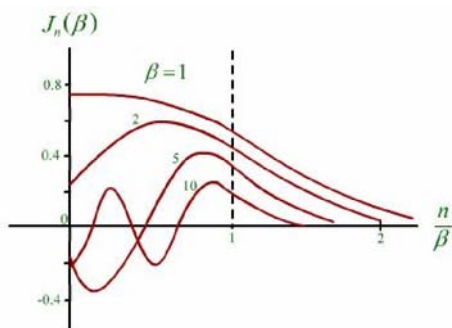
در بخش قبل، طیف سیگنال مدوله فرکانسی با مدوله سازی نوا بررسی و نشان داده شد که طیف مذکور وسعت و محدوده‌ی بی نهایت دارد.

به طور کلی طیف هر نوع سیگنال با مدوله سازی نمایی وسعت نامحدود داشته و در نتیجه می توان گفت تولید و انتقال FM کامل به پهنای باند بی نهایت نیاز دارد. با این وجود سیستم های FM، در عمل پهنای باند محدود داشته اما بخوبی کار می کنند. عملکرد رضایت بخش این سیستم ها به این امر بستگی دارد که مؤلفه های طیفی هر چه از فرکانس حامل دورتر می شوند کوچکتر شده و از مؤلفه های فرکانسی با دامنه های خیلی کوچکتر می توان صرفنظر کرد. اگر چه حذف قسمتی از طیف سبب ایجاد اعوجاج می شود ولی با حفظ مؤلفه های فرکانسی عمده و قابل ملاحظه می توان اعوجاج مذکور را به حداقل رساند.

ابتدا پهنای باند انتقال FM با خطوط باند جانبی عمده را در حالت مدوله سازی نوا و سپس برای یک سیگنال اختیاری بدست می آوریم.

همانطور که در شکل مشاهده می کنید و قبلاً نیز بیان شد، $J_n(\beta)$ به ازای $\left| \frac{n}{\beta} \right| > 1$ ، مخصوصاً اگر

$\beta \gg 1$ باشد به سرعت میرا شده و تنزل می نماید.



سپس با فرض بزرگ بودن شاخص مدوله سازی β می توان گفت که کلیه خطوط قابل ملاحظه در گستره‌ی فرکانسی $f_c \pm \beta f_m = f_c \pm A_m f_\Delta$ قرار دارند.

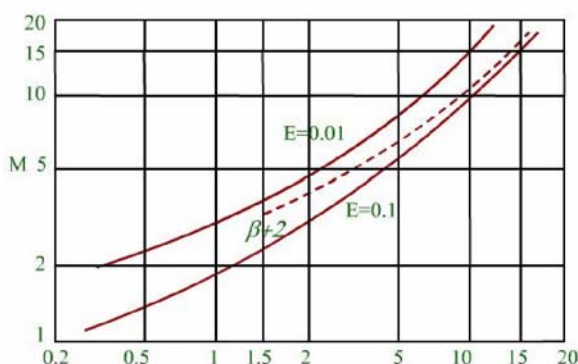
از طرف دیگر اگر β کوچک باشد تمام باندهای جانبی نسبت به حامل کوچک می باشند، چون به ازاء $J_0(\beta) \gg J_{n \neq 0}(\beta)$ ، $\beta \ll 1$ است. اما باید حداقل یک زوج مرتبه اول حول حامل باقی بماند چون اساساً درغیر این صورت مدوله سازی فرکانسی وجود نخواهد داشت. بنابراین به ازای مقادیر کوچک β ، خطوط باند جانبی مهم در گستره‌ی $f_c \pm f_m$ قرار دارند. به تعبیری دیگر می توان گفت کلیه خطوط باند جانبی که دامنه نسبی آنها $|J_n(\beta)| > \epsilon$ باشد خطوط عمده و قابل ملاحظه هستند، به طوری که ϵ می تواند مقداری از ۰/۱ تا ۰/۱ بسته به مورد و کاربرد مربوطه اختیار کند.

پس اگر $|J_M(\beta)| > \epsilon$ و $|J_{M+1}(\beta)| < \epsilon$ باشد در این صورت M زوج باند جانبی عمده وجود خواهد داشت و $2M+1$ خط عمده را ملاحظه خواهیم کرد. بنابراین پهنای باند عبارت است از:

$$B = 2M(\beta).f_m, \quad M(\beta) \geq 1$$

شرط $M(\beta) \geq 1$ در رابطه اخیر بیان کننده این واقعیت است که B (پهنای باند) نمی تواند از $2f_m$ کمتر باشد.

مقدار M بصورت تابعی پیوسته از β به ازای $\epsilon = 0.01$ و $\epsilon = 0.1$ در شکل نشان داده شده است.



بر اساس بررسی های تجربی به عمل آمده، $\varepsilon = 0.01$ غالباً بسیار محافظه کارانه بوده و متقابلاً $\varepsilon = 0.1$ می تواند به اعوجاج هر چند کم ولی کم و بیش قابل ملاحظه منجر گردد. بدین علت در اغلب موارد مقدار M در حد فاصل دو حد مذکور انتخاب می شود.

با این وجود پهنای باند B ، پهنای باند انتقال B_T نیست بلکه پهنای باند حداقل مورد لزوم برای مدوله سازی نوائی با دامنه مشخص و فرکانس معین می باشد. برای تخمین B_T ، باید حداکثر پهنای باند مورد لزوم را در شرایطی که پارامترهای نوا با روابط $A_m \leq 1$ و $f_m \leq W$ محدود می شوند محاسبه کرد. خط منقطع شکل این تقریب را نشان می دهد:

$$M(\beta) \approx \beta + 2$$

خط مذکور به ازای $\beta \geq 2$ تقریباً در وسط خطوط پیوسته و حدی $\varepsilon = 0.1$ و $\varepsilon = 0.01$ قرار دارد. با جایگزینی $\beta + 2$ در رابطه پهنای باند بجای $M(\beta)$ خواهیم داشت:

$$B \approx 2(\beta + 2)f_m = 2\left(\frac{A_m f_\Delta}{f_m} + 2\right)f_m = 2(A_m f_\Delta + 2f_m)$$

اکنون با توجه به این که f_Δ یکی از پارامترهای مدوله کننده می باشد، حداکثر پهنای باند به ازای حداکثر دامنه و حداکثر فرکانس نوا حاصل خواهد شد، یعنی $A_m = 1$ و $f_m = W$ ، بنابراین پهنای باند مدوله سازی نوا در بدترین حالت عبارت است از:

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W)$$

باید دقت کرد که شاخص مدوله سازی مربوطه یعنی $\beta = \frac{f_\Delta}{W}$ دیگر مقدار حداکثر را ندارد بلکه دارای مقداری است که به همراه مقدار حداکثر فرکانس مدوله گر، پهنای باند حداکثر را ایجاد می کند.

هر نوای دیگر که دارای دامنه کوچکتر از یک ($A_m < 1$) و یا فرکانس کمتر از W باشد ($f_m < W$) به پهنای باند کمتری نیاز دارد، اگر چه β آن می تواند بزرگتر باشد.

اکنون یک سیگنال اختیاری مدوله گر با پهنای باند W و دامنه نرمالیزه شده‌ی $|x(t)| \leq 1$ را در نظر بگیرید. پهنای باند انتقال B_T را با استفاده از مدوله سازی نوا در بدترین حالت تخمین می زنیم، چون هر مؤلفه در $x(t)$ با دامنه یا فرکانس کوچکتر، به پهنای باند کوچکتر از B_T نیاز دارد، بنابراین با تعمیم مورد مدوله سازی نوا به مدوله سازی یک سیگنال مدوله گر اختیاری، نسبت انحراف (Deviation ratio)، به صورت زیر قابل تعریف است.

$$D = \frac{\text{ماکزیمم انحراف فرکانسی}}{\text{بالاترین مؤلفه سیگنال ورودی}} = \frac{f_{\Delta}}{W}$$

نسبت مذکور با انحراف حداکثر تقسیم بر حداکثر فرکانس مدوله گر برابر بوده و مشابه شاخص مدوله سازی در مدوله سازی نوا با بدترین حالت می باشد. در این صورت پهنای باند انتقال مورد لزوم برای $x(t)$ عبارت است از:

$$B_T \approx 2M(D)W$$

در رابطه فوق D مشابه β در حالت قبل می باشد و با استفاده از منحنی M بر حسب β می توان تعداد زوج های باند جانبی عمده یا $M(D)$ را تعیین کرد. در صورت عدم دسترسی به منحنی ها یا جداول مربوط به $M(D)$ می توان پهنای باند انتقال به طور تقریبی محاسبه کرد. اگر نسبت انحراف D از واحد خیلی بزرگتر یا خیلی کوچکتر باشد، پهنای باند انتقال به صورت زیر قابل تعیین است:

$$B_T = \begin{cases} 2DW = 2f_{\Delta}, D \gg 1 \\ 2W, D \ll 1 \end{cases}$$

ترکیب این دو تقریب با یکدیگر به نتیجه زیر برای هر دو حالت $D \gg 1$ و $D \ll 1$ منجر می شود:

$$B_T \approx 2(f_{\Delta} + W) = 2(D + 1)W$$

این رابطه به رابطه کارسون معروف است. در اغلب سیستم های FM واقعی که $2 < D < 10$ است قاعده ی کارسون پهنای باند انتقال را با تقریب نقصانی محاسبه می کند. تقریب بهتر در طراحی عبارت است از:

$$B_T = 2(f_{\Delta} + 2W) = 2(D + 2)W$$

از نظر فیزیکی نسبت انحراف D بیان کننده انحراف فاز حداکثر موج FM در بدترین شرایط پهنای باند است. روابط پهنای باند FM بدست آمده تا بدینجا را می توان به مدوله سازی PM اعمال کرد، مشروط بر آنکه بجای D ، انحراف فاز حداکثر ϕ_{Δ} مربوط به موج PM را قرار دهیم. بنابراین پهنای باند انتقال مورد لزوم در PM با سیگنال پیام اختیاری $x(t)$ بطور تقریبی عبارت است از:

$$B_T \approx 2M(\phi_{\Delta})W \quad \text{و} \quad M(\phi_{\Delta}) \geq 1$$

یا به عبارتی دیگر:

$$B_T \approx 2(\phi_{\Delta} + 1)W$$

این رابطه در واقع تقریب معادل قاعده کارسون برای مدوله سازی فاز است. تنها تفاوت آن با مورد FM، مستقل بودن ϕ_{Δ} از W است. در هنگام استفاده از تقریب های بیان شده برای تعیین پهنای باند انتقال مورد نیاز امواج FM یا PM باید به شرایط معتبر بودن تقریب ها توجه کرد. با این وجود اگر سیگنال مدوله گر دارای ناپیوستگی هایی باشد مثل یک رشته پالس چهار گوش، تخمین پهنای باند با استفاده از روش های فوق معتبر نبوده و باید به تجزیه و تحلیل طیفی متوسل شد.

مثال

ایستگاههای فرستنده رادیویی FM معمولاً دارای انحراف فرکانس حداکثر ۷۵ کیلو هرتز بوده و فرکانس های مدوله گر معمولاً در محدوده ۳۰ هرتز تا ۱۵ کیلو هرتز قرار دارند. با فرض $W=15 \text{ KHz}$ ، نسبت انحراف عبارت است از $D = \frac{75}{15} = 5$. با استفاده از رابطه $B_T = 2(D + 2)W$ پهنای باند انتقال برابر با $B_T = 210 \text{ KHz}$ خواهد شد. رادیوهای FM با کیفیت بالا دارای پهنای باند حداقل 200KHz می باشند. قاعده کارسون پهنای باند را با مقدار کمتر یعنی $B_T = 180 \text{ KHz}$ محاسبه می کند. اگر یک نوای مدوله گر تنها را با $A_m = 1$ و $f_m = 15 \text{ KHz}$ در نظر بگیریم، در این صورت $\beta = 5$ و $M(\beta) = 7$ بوده و با استفاده از رابطه $B = 2M(\beta)f_m$ مقدار پهنای باند عبارت است از $B=210 \text{ KHz}$ ، برای نوایی با فرکانس پایین تر، مثلاً 3KHz، شاخص مدوله سازی بزرگتری بدست می آید، $\beta = 27$. همچنین تعداد زوج های باند جانبی عمده بیشتر می شود. $M=27$ با این وجود پهنای باند کاهش می یابد یعنی:

$$B = 2 \times 27 \times 3 = 162 \text{ KHz}$$

اعوجاج خطی

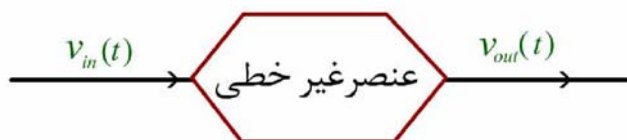
هنگامی که یک موج FM به یک فیلتر خطی تغییر ناپذیر بر حسب زمان و دارای اعوجاج دامنه و فاز اعمال می شود بطور کلی علاوه بر وجود مولفه های اعوجاجی در زاویه فاز موج FM خروجی فیلتر، مدوله سازی دامنه نامطلوب را می توان با استفاده از محدود کننده ها حذف نمود، مولفه های اعوجاجی در زاویه فاز موج FM، در خروجی دمدوله کننده فرکانسی ظاهر خواهند شد. اعوجاج مذکور به این علت ایجاد می شود که باندهای جانبی موج در هنگام انتقال توسط فیلتر بطور نابرابر تضعیف می گردند محاسبه اعوجاج حاصل از انتقال موج FM بوسیله فیلتر خطی، یکی از دشوارترین مسائل نظریه مدوله سازی غیر خطی است. دشواری محاسبه در واقع به سبب ماهیت غیر خطی موج FM است. به منظور ایجاد یک مدل ریاضی از مسأله، که برای شبیه سازی در کامپیوتر مناسب باشد باید از روش زیر استفاده کرد. بر طبق این روش:

- (۱) با توجه به موج FM، مؤلفه های هم فاز و تربیعی آن را تعیین می کنیم.
- (۲) بجای فیلتر میان گذر، معادل پایین گذر مختلط آن را در نظر می گیریم.
- (۳) پاسخ این فیلتر معادل را بواسطه اعمال ترکیب مؤلفه های هم فاز و تربیعی موج FM به ورودی آن بدست می آوریم.
- (۴) با استفاده از نتیجه مرحله سوم، پاسخ مورد نظر فیلتر میان گذر اصلی که در اثر ورودی FM بوجود آمده، تعیین می شود.

اعوجاج غیر خطی

اعوجاج دامنه موج FM سبب تبدیل FM به AM می گردد، یعنی دامنه موج FM مشابه مدوله سازی AM، با سیگنال اطلاعات متناسب خواهد بود. در ادامه مشاهده خواهید کرد که چگونه با استفاده از اعوجاج غیر خطی کنترل شده و فیلتر کردن می توان مدوله سازی AM فوق الذکر را از بین برد. فرض کنید سیگنال ورودی عنصر غیر خطی به صورت زیر است:

$$v_{in}(t) = A(t)\cos\theta_c(t)$$



بطوریکه $\theta_c(t) = \omega_c(t) + \phi(t)$ بوده و $A(t)$ دامنه می باشد. فرض می شود که مدار غیرخطی بدون حافظه است، یعنی عنصر ذخیره کننده انرژی نداشته و در نتیجه ورودی و خروجی با مشخصه تبدیل غیرخطی لحظه ای

$$v_{out} = T[v_{in}] \text{ با هم ارتباط دارند و نیز برای سهولت فرض می شوند که } T[0] = 0 \text{ است. اگر چه}$$

$v_{in}(t)$ الزاماً بر حسب زمان متناوب نیست ولی آن را می توان تابع متناوبی از θ_c با دوره تناوب 2π در نظر گرفت

مشابهاً خروجی، تابع متناوبی از θ_c بوده و آن را می توان به صورت سری مثلثاتی فوریه بسط داد.

$$v_{out} = \sum_{n=1}^{\infty} |2a_n| \cos(n\theta_c + \arg a_n)$$

بطوریکه:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T[v_{in}] e^{-jn\theta_c} d\theta_c$$

متغیر زمان t در روابط فوق بطور واضح ظاهر نمی شود ولی v_{out} به t بستگی دارد چون θ_c تابعی از t است.

همچنین هنگامی که دامنه v_{in} تغییرات زمانی دارد امکان دارد ضرایب a_n تابعی از زمان باشند. معذالک ما ابتدا مورد

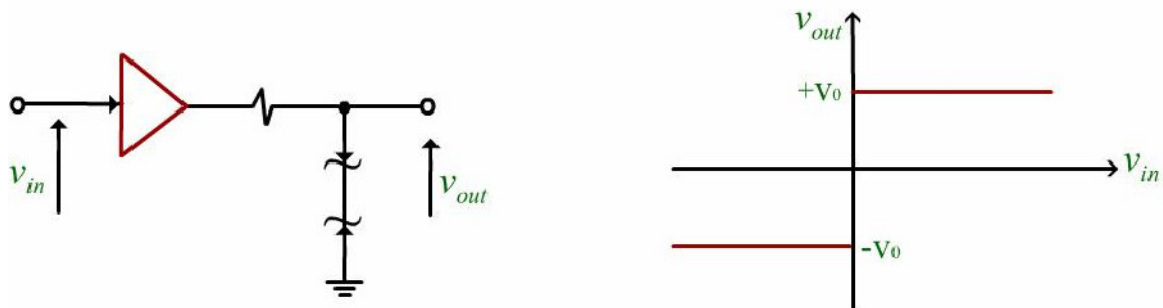
ورودی FM بدون اعوجاج را در نظر می گیریم، یعنی $A(t)$ برابر مقدار ثابت A_c بوده و کلیه a_n ها ثابت هستند.

بنابراین رابطه v_{out} را می توان به صورت زیر نوشت.

$$v_{out}(t) = |2a_1| \cos [\omega_c t + \phi(t) + \arg a_1] + |2a_2| \cos [2\omega_c t + 2\phi(t) + \arg a_2] + ..$$

به اضافه تغییر فاز $|2a_n|$ عبارت فوق نشان می دهد، که اعوجاج غیرخطی سبب ایجاد امواج و مدوله ساز فازی FM اضافی در هارمونیک های فرکانس حامل می گردد، یعنی هارمونیک n ام دارای دامنه ثابت $|2a|$ و مدوله سازی فاز $n\phi(t)$ به اضافه تغییر فاز $\arg a_n$ می باشد. بنابراین اگر امواج مذکور در حوزه فرکانس با هم تداخل نداشته باشد ورودی بدون اعوجاج را می توان با اعمال خروجی اعوجاج دار به یک فیلتر میان گذر، مناسب دوباره بازسازی کرد. پس می توان گفت که نسبت به اثرات FM اعوجاج غیرخطی بدون حافظه مصونیت قابل ملاحظه ای دارد.

اکنون موردی را در نظر بگیرید که در آن موج FM دارای دامنه متغیر نامطلوب $A(t)$ است. تغییرات مذکور را می توان با استفاده از یک محدود کننده (Limiter) سخت ایده آل یا مدار برش (Clipper) که مشخصه تبدیل آن در شکل رسم شده است از بین برده و آن را به صورت دامنه هموار و ثابت در آورد. در شکل یک مدار برش را با استفاده از اتصال پشت به پشت دیودهای زنر با ولتاژ شکست V_0 در خروجی یک تقویت کننده با بهره زیاد مشاهده می کنید.



خروجی مدار برش یا محدود کننده مانند یک موج چهار گوش است چون :

$$T[v_{in}] = V_0 \operatorname{sgn} v_{in}$$

به عبارتی

$$v_{out} = \begin{cases} +V_0 & v_{in} > 0 \\ -V_0 & v_{in} < 0 \end{cases}$$

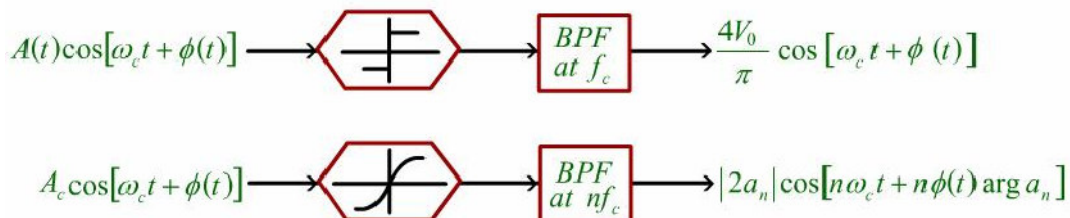
با توجه به رابطه a_n که قبلاً نوشته شد، ضرایب a_n عبارتند از :

$$a_n = \begin{cases} 4V_0/\pi & n=1,5,9,\dots \\ -4V_0/\pi & n=3,7,11,\dots \\ 0 & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

همانگونه که مشاهده می شود ضرایب a_n مستقل از زمان هستند چون $A(t) \geq 0$ اثری بر $\text{sgn } v_{in}$ ندارد.
بنابراین:

$$v_{out} = \frac{4V_0}{\pi} \cos[\omega_c t + \phi(t)] - \frac{4V_0}{3\pi} \cos[3\omega_c t + 3\phi(t)] + \dots$$

با عبور خروجی فوق از یک فیلتر میان گذر مناسب موج FM با دامنه ثابت بدست می آید مشروط بر آنکه مولفه های $v_{out}(t)$ با هم تداخل فرکانسی نداشته باشند باید توجه کرد که تحلیل فوق در واقع این مطلب را که اطلاعات انحصاراً در نقاط عبور از صفر موج FM یا PM قرار دارد تأیید می کند . در شکل نتایج حاصل از بحث فوق را به صورت خلاصه مشاهده می کنید .



در قسمت الف محدود کننده به اضافه فیلتر میان گذر تغییرات دامنه نامطلوب موج FM یا PM را حذف می کند و معمولاً آن را در گیرنده بکار می برند . مدار غیر خطی در قسمت ب شکل مذکور ، موج با دامنه ثابت را دچار اعوجاج می کند ولی فیلتر میان گذر، فقط جمله بدون اعوجاج مربوط به هارمونیک n ام را عبور می دهد . ترکیب مذکور را ضرب کننده فرکانسی می نامند (اگر $n > 1$ باشد) و آن را معمولاً در برخی از فرستنده ها بکار می برند .

مدوله کننده های

PM و FM

بطور کلی دو روش اساسی برای ایجاد سیگنال های مدوله فرکانسی وجود دارد یکی روش FM مستقیم و دیگری روش FM غیر مستقیم .

در روش مستقیم فرکانس حامل مستقیماً بر طبق سیگنال باند پایه ورودی تغییر می کند، در صورتی که در روش غیر مستقیم ابتدا موج مدوله گر جهت ایجاد موج FM باند باریک بکار رفته و سپس موج مذکور با استفاده از ضرب فرکانسی و افزایش انحراف فرکانسی به مقدار مورد نظر به سیگنال FM اصلی تبدیل می شود .

روش FM
مستقیم

مفهوم روش FM مستقیم کاملاً ساده و واضح بوده و در آن به یک نوسان ساز قابل کنترل با ولتاژ (Voltage - Controlled Oscillator) (VCO) بطوری که فرکانس نوسانات آن بطور خطی با ولتاژ اعمال شده تغییر نماید نیاز است . در فرکانس های حامل پائین تر، می توان در مدار تشدید موازی LC یک نوسان ساز، از یک عنصر با راکتانس متغیر استفاده کرد . اگر ظرفیت معادل به صورت زیر وابستگی زمانی داشته باشد:

$$c(t) = c_0 - cx(t)$$

و اگر $cx(t)$ باندازه کافی کوچک بوده و باندازه کافی آهسته تغییر نماید، در این صورت خروجی نوسان ساز $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ خواهد بود که در آن:

$$\frac{d\theta_c(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{Lc(t)}} = \frac{1}{\sqrt{Lc_0}} \left[1 - \frac{c}{c_0} x(t) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

با فرض $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و $\left| \frac{c}{2c_0} x(t) \right| \ll 1$ و استفاده از بسط سری دو جمله ای، رابطه فوق به صورت زیر در می آید.

$$\frac{d\theta_c(t)}{dt} \approx \omega_c \left[1 + \frac{c}{2c_0} x(t) \right]$$

بنابراین:

$$\theta_c(t) \approx 2\pi f_c t + 2\pi \frac{c}{2c_0} f_c \int x(\lambda) d\lambda$$

بررسی رابطه اخیر نشان می دهد که مدوله سازی فرکانسی با انحراف فرکانسی $f_\Delta = \frac{c}{2c_0} f_c$ ایجاد شده است.

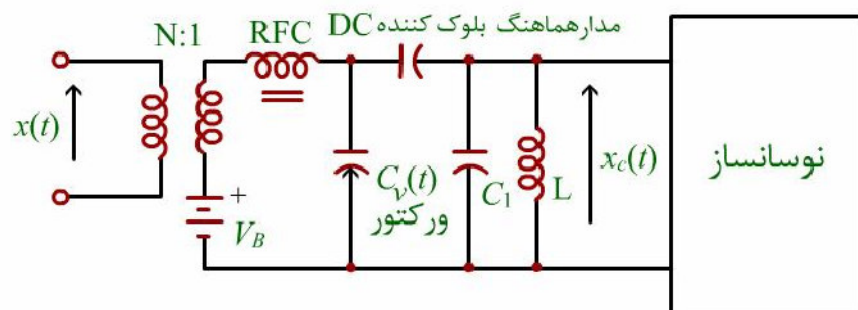
از آنجا که $|x(t)| \leq 1$ است با فرض $0/01 \ll \left| \frac{c}{2c_0} x(t) \right|$ نسبت $\frac{c}{c_0} < 0/013$ نتیجه قابل قبولی بوده و بنابراین انحراف فرکانسی در این حالت عبارت خواهد بود از:

$$f_\Delta = \frac{c}{2c_0} f_c \leq 0/006 f_c$$

محدودیت فوق نشان می دهد که $cx(t)$ کوچک بوده و از نظر طراحی بندرت مشکلی ایجاد خواهد کرد . مشابهاً شرط $W \ll f_c$ بیانگر این است که $cx(t)$ باندازه کافی آهسته تغییر می نماید .

در شکل یک نویسن ساز مدار هماهنگ با دیود و رکتور را مشاهده می کنید . ترانسفورماتور ورودی ، چوک RF و بلوک کننده DC برای جدا کردن ولتاژهای فرکانس های پائین ، فرکانس های بالا و ولتاژ DC بکار می روند.

مزیت اصلی روش FM مستقیم در این است که می توان انحراف های فرکانسی بزرگی را بدون نیاز به عملیات یا مدارهای اضافی بدست آورد . در مقابل نقص عمده این روش عدم پایداری کافی فرکانس حامل بوده و اغلب از روش های کنترل فرکانسی فیدبک جهت پایداری حامل استفاده می شود . از آنجا که روش های پایداری مناسب در سال های اخیر مطرح گردیده اند اکثر فرستنده های FM قدیمی از نوع FM غیر مستقیم هستند .



روش FM
غیر مستقیم

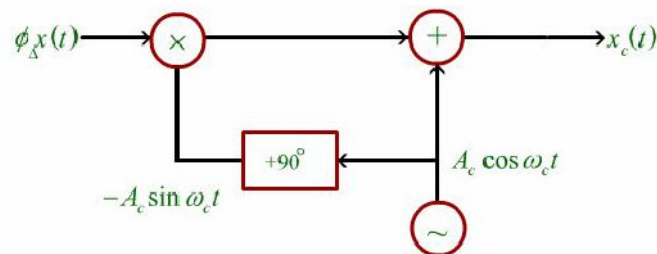
اگر چه موج مدوله فازی PM بندرت ارسال می شود ولی به دلایل زیر ما به مدوله کننده های فازی علاقه مند هستیم .

(۱) تحقق آنها نسبتاً آسان است.

(۲) حامل را می توان از یک منبع فرکانس پایدار مانند نوسان ساز کریستالی تأمین کرد.

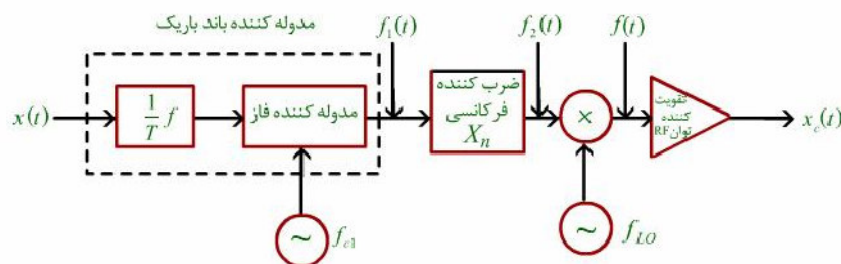
(۳) با انتگرال گیری از سیگنال ورودی به مدوله کننده فاز، خروجی مدوله کننده مذکور، سیگنال مدوله فرکانسی خواهد بود .

شکل زیر مدوله کننده فاز باند باریک را که بر اساس تقریب $x_c(t) = A_c \cos \omega_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \sin \omega_c t$ طرح ریزی شده است نشان می دهد .



بدیهی است سادگی مدار مذکور به تقریب رادیان $|\phi_\Delta x(t)| \ll 1$ بستگی دارد و انحراف های فازی بزرگتر از 10° منجر به مدوله سازی اعوجاج دار می گردد .

اکنون فرستنده FM غیر مستقیم را که دیگرام آن را مشاهده می کنید در نظر بگیرید .



انتگرال گیر و مدوله کننده فاز با هم یک مدوله کننده فرکانسی باند باریک را بوجود می آورند . خروجی این مدوله کننده فرکانسی، دارای فرکانس لحظه ای

$$f_1(t) = f_{c1} + \frac{\phi_{\Delta}}{2\pi T} x(t)$$

است، بطوریکه T ضریب تناسب انتگرال گیر می باشد .

بنابراین انحراف فرکانس اولیه برابر $\frac{\phi_{\Delta}}{2\pi T}$ بوده و باید با استفاده از یک ضرب کننده فرکانسی، آن را به مقدار مورد

نظر f_{Δ} تبدیل کرد . ضرب کننده فرکانسی، فرکانس لحظه ای ورودی را n برابر می کند یعنی:

$$f_2(t) = nf_1(t) = nf_{c1} + f_{\Delta} x(t)$$

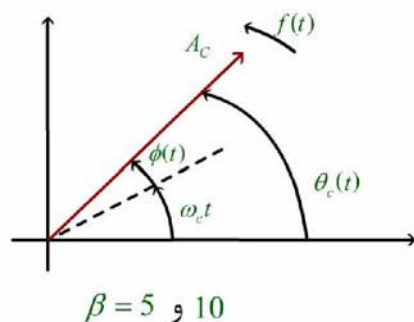
بطوریکه :

$$f_{\Delta} = n \left(\frac{\phi_{\Delta}}{2\pi T} \right)$$

باید توجه کرد که در ضرب فرکانسی، گستره تغییرات فرکانسی تغییر نموده و بزرگتر می شود ولی سرعت تغییرات فرکانسی تغییر نمی نماید .

به عنوان مثال اگر یک سیگنال مدوله نوا، ضرب فرکانسی شود فرکانس حامل و شاخص مدوله سازی افزایش می یابند، ولی فرکانس مدوله سازی تفاوتی نمی کند. بنابراین دامنه خطوط باند جانبی تغییر می کنند ولی فاصله بین خطوط ثابت باقی می ماند .

در شکل دو طیف $\beta = 5$ و $\beta = 10$ با هم مقایسه شده اند .



معمولا برای رسیدن به f_{Δ} مورد نظر، ضریب ضرب کننده فرکانسی دارای مقداری است که nf_{c_1} بسیار بالاتر از فرکانس حامل مورد نظر می باشد. بنابراین با توجه به شکل، فرستنده FM غیر مستقیم، حاوی یک مبدل فرکانسی است که طیف را بدون تغییر به $f_c = |nf_{c_1} \pm f_{L_0}|$ انتقال داده و فرکانس لحظه ای نهائی به صورت $f(t) = f_c + f_{\Delta}x(t)$ در می آید.

امکان دارد تبدیل فرکانسی در میانه زنجیره ضرب فرکانس ها صورت پذیرد تا فرکانس ها مقادیر قابل قبولی داشته باشند. آخرین بلوک سیستم مذکور تقویت کننده توان است، چون تمام عملیات قبلی باید در سطح توان پائین انجام گیرد.

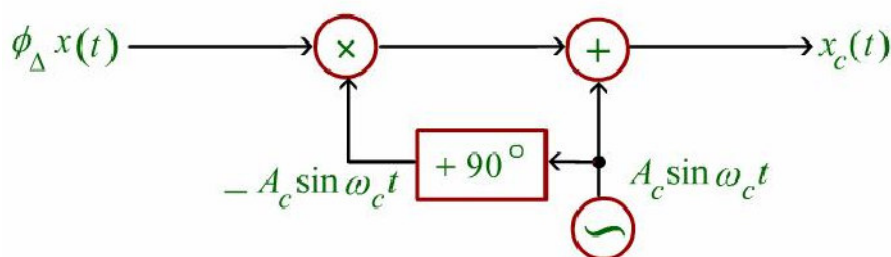
فصل هفتم: مدولاسیون نمایی موج پیوسته

روش FM غیر مستقیم
قسمت ۲

مثال

سیستم FM غیر مستقیم اولیه که بوسیله آرمسترانگ طراحی شد، از یک مدوله کننده

فاز باند باریک مطابق شکل
زیر استفاده می کرد.



به عنوان مثال فرض کنید که $\frac{\phi_{\Delta}}{2\pi T} \approx 15\text{Hz}$ باشد (که سبب اعوجاج مدوله سازی جزئی خواهد شد) و $f_{c_1} = 200\text{KHz}$

در نظر بگیرید (که در قسمت پایین محدوده فرکانسی نوسان ساز کریستالی قابل ساخت باشد). خروجی فرستنده رادیویی

FM با $f_{\Delta} = 75\text{KHz}$ به ضرب فرکانسی با ضریب $n = \frac{75000}{15} = 5000$ نیاز دارد.

ضرب کننده مذکور را می توان با زنجیره ای از چهار عدد سه برابر کننده و ۶ عدد دو برابر کننده تحقق بخشید یعنی:

$$n = 3^4 \times 2^6 = 5184$$

ولی در این شرایط $nf_{c_1} = 500 \times 200 = 1000\text{MHz}$ خواهد شد و یک مبدل پایین، با $f_{Lo} = 900\text{MHz}$

می تواند f_c را در باند FM یعنی ۸۸ – ۱۰۸ مگا هرتز قرار دهد.

دمدوله کننده های

PM و FM

دمدوله کننده FM یا آشکارساز فرکانسی که اغلب ممیز فرکانسی (Frequency Discriminator) نامیده می شود، مداری است که ولتاژ خروجی آن رابطه خطی با فرکانس لحظه ای ورودی مذکور دارد . مدارهای متفاوت بسیاری برای آشکارسازی فرکانس طراحی شده و مورد استفاده قرار می گیرند ولی آنها را می توان به چهار گروه مشخص تقسیم بندی کرد :

۱- آشکار ساز تبدیل FM به AM

۲- آشکارساز تمایز تغییر فاز

۳- آشکارساز عبور از صفر

۴- آشکارساز فیدبک فرکانسی

سه نوع آشکار ساز فرکانسی اول در این جا مطرح و بررسی می گردند . آشکارساز چهارم از مدار حلقه قفل شده فاز (Phase-Locked Loop) استفاده می نماید که در حوصله این درس نمی گنجد .

آشکار ساز تبدیل
AM به FM

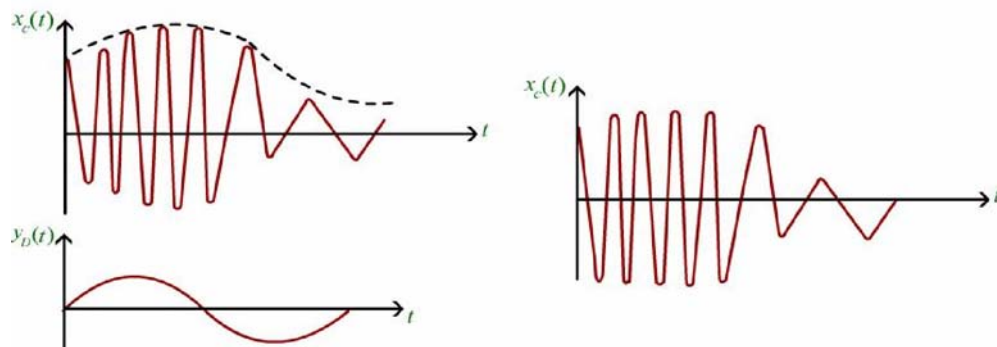
هر نوع مداری که خروجی اش مشتق زمانی ورودی آن باشد عمل تبدیل FM به AM را انجام می دهد. فرض کنید $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ و $\frac{d\theta_c(t)}{dt} = 2\pi[f_c + f_\Delta x(t)]$ می باشد در این صورت:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -A_c \left(\frac{d\theta_c(t)}{dt} \right) \sin \theta_c(t) = 2\pi A_c [f_c + f_\Delta x(t)] \sin [\theta_c(t) \pm \pi]$$

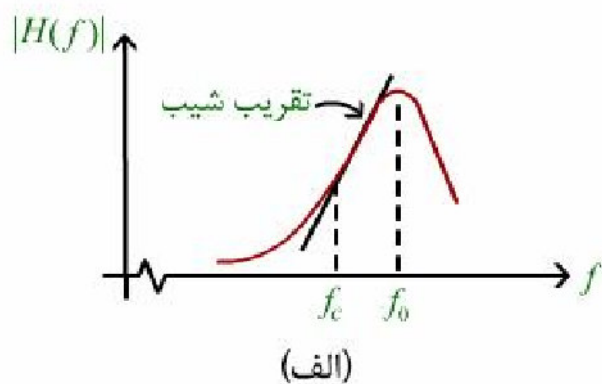
بنابراین با اعمال مشتق سیگنال $x_c(t)$ به یک آشکارساز پوش می توان ولتاژی که با $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ متناسب است بدست آورد. در شکل دیاگرام بلوکی آشکارساز مذکور را مشاهده می کنید.



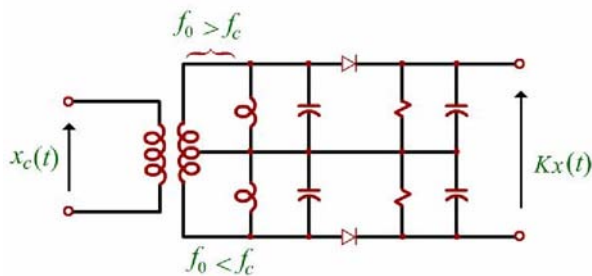
علت استفاده از محدود کننده در ورودی، حذف تغییرات مزاحم دامنه $x_c(t)$ قبل از رسیدن به آشکارساز پوش است. مدار مذکور هم چنین شامل یک بلوک کننده DC است تا ولتاژ DC مربوط به فرکانس حامل در خروجی آشکارساز پوش را از میان بردارد. شکل موج های مربوطه با فرض مدوله سازی نوا را در شکل مشاهده می کنید.



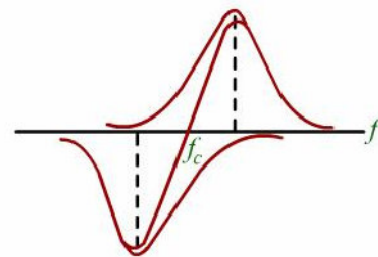
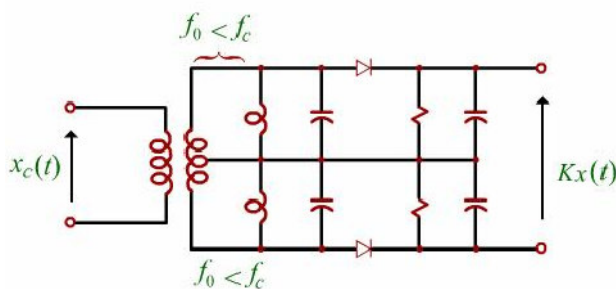
به منظور تحقق تبدیل FM به AM در عمل باید توجه کرد که مشتق گیر ایده آل دارای مشخصه $|H(f)| = 2\pi f$ است. بنابراین تابع تبدیل یک مدار تشدید معمولی همان گونه که در شکل مشاهده می شود، در ناحیه بالا یا پائین نقطه تشدید تقریباً پاسخ دامنه خطی مورد نظر را در محدوده فرکانسی کوچکی تامین می کند.



بنابراین به عنوان مثال، یک گیرنده AM ناهماهنگ از طریق آشکارسازی شیب، موج FM را دمدوله خواهد کرد. برای بسط ناحیه خطی مشخصه مورد نظر، می توان از مدار ممیز متعادل مطابق شکل استفاده نمود.



مدار ممیز متعادل، شامل دو مدار تشدید است که یکی بالای f_c و دیگری پائین f_c هماهنگ شده و خروجی با تفاضل پوش های خروجی دو مدار تشدید برابر است. مشخصه تبدیل فرکانس به ولتاژ حاصله به شکل معروف S خواهد بود. بدیهی است که به بلوک کننده DC نیازی نیست چون در خروجی های مدار تشدید، مؤلفه های مربوط به فرکانس حامل همدیگر را حذف می نماید. مدار مذکور در فرکانس های مدوله کننده پائین دارای کیفیت عمل خوبی است. ترکیب متعادل فوق الذکر را می توان در باند میکروویو نیز بکار برد و با استفاده از حفره های مشدد به عنوان مدارهای هماهنگ و دیود های کریستالی به عنوان آشکارساز های پوش، ممیز فرکانسی مورد نظر را بوجود آورد.



آشکارساز
تمایز تغییر فاز

این نوع آشکارساز FM در مقایسه با آشکارساز شیب (تبدیل FM به AM) که به پاسخ دامنه خطی نیاز دارد شامل مدارهایی با پاسخ غیر خطی است. اساس کار آشکارساز تمایز تغییر فاز تقریب است که می توان برای مشتق زمانی در نظر گرفت. یعنی:

$$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{1}{t_1} [v(t) - v(t - t_1)]$$

در نظر گرفته می شود.

مشروط بر آن که t_1 نسبت به تغییرات $v(t)$ کوچک باشد. در موج FM رابطه زیر وجود دارد:

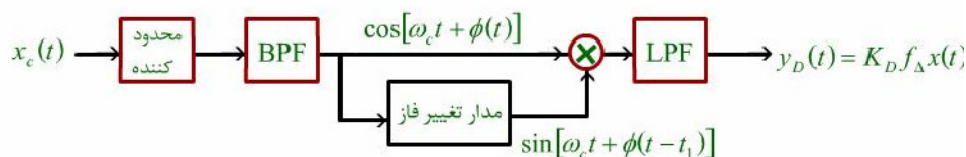
$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi f_{\Delta} x(t)$$

بنابراین:

$$\phi(t) - \phi(t - t_1) \approx t_1 \frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi f_{\Delta} t_1 x(t)$$

عبارت $\phi(t - t_1)$ را می توان بوسیله یک خط تاخیر یا یک مدار با تغییر فاز خطی بدست آورد.

در شکل دیاگرام بلوکی یک ممیز تغییر فاز را با استفاده از مداری که تاخیر گروه t_1 و تاخیر حامل t_0 را داشته و در آن $\omega_0 t_0 = 90^\circ$ می باشد مشاهده می نمائید و به همین دلیل ممیز مذکور را آشکارساز تربیعی (Quadrature Detector) نیز می نامند.



پس خروجی آشکارساز متناسب خواهد بود با :

$$\sin[\phi(t) - \phi(t - t_1)] \approx \phi(t) - \phi(t - t_1)$$

در رابطه فوق فرض شده است که t_1 به قدری کوچک است که $|\phi(t) - \phi(t - t_1)| \ll 1$ می باشد.
بنابراین:

$$y_D(t) \approx k_D f_\Delta x(t)$$

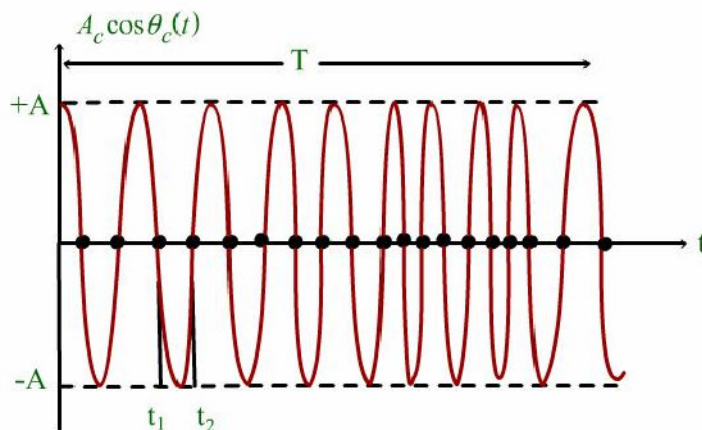
بطوریکه k_D ثابت آشکارسازی بوده و شامل t_1 می باشد . علیرغم تقریب های بعمل آمده در فوق آشکارساز تربیعی خاصیت خطی بهتری از ممیز متعادل دارد و اغلب در گیرنده های FM با کیفیت عالی مورد استفاده قرار می گیرد . از انواع دیگر مدارهای تغییر فاز، جهت آشکارسازی FM می توان از ممیز فاستر - سیلی و نیز مدار معروف آشکارساز نسبتی نام برد .

آشکارساز
عبور از صفر

همانگونه که قبلاً اشاره گردید آشکارسازهای FM معمولاً شامل محدود کننده های سخت می باشند تا هر گونه تغییرات دامنه را که می توانند بر خروجی FM آشکار شده تأثیر خطائی داشته باشند حذف کند. بنابراین بدیهی است که اطلاعات FM در نقاط عبور از صفر سیگنال مدوله فرکانسی قرار دارد. سیگنال FM زیر را در نظر بگیرید.

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \cos \left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(\lambda) d\lambda \right)$$

با توجه به شکل اگر t_1 یک نقطه عبور از صفر بوده و لحظه $t_2 = t_1 + \Delta t$ نقطه عبور از صفر بعدی باشد می توان نوشت:



$$\theta_c(t_2) - \theta_c(t_1) = \pi$$

با فرض اینکه $w \ll f_\Delta \ll f_c$ بوده و سیگنال پیام $x(t)$ در مقایسه با f_c بسیار آهسته تر تغییر می نماید می توان گفت $x(t)$ در فاصله $t_2 - t_1 = \Delta t$ تقریباً ثابت است .

$$\begin{aligned}\theta_c(t_2) - \theta_c(t_1) &= \pi = \omega_c(t_2 - t_1) + 2\pi f_\Delta \int_{t_1}^{t_2} x(\lambda) d\lambda \\ &= \omega_c(t_2 - t_1) + 2\pi f_\Delta x(t_1)(t_2 - t_1)\end{aligned}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$f(t_1) = f_c + f_\Delta x(t_1) = \frac{1}{2(t_2 - t_1)}$$

اگر نقاط عبور از صفر مثبت شونده (یعنی نقاط صفری که در آنها شیب $x_c(t)$ مثبت است) در نظر گرفته شوند نتیجه فوق را می توان به صورت زیر نوشت :

$$f(t_1) = \frac{1}{t_2 - t_1}$$

بطوریکه t_1 و t_2 دو نقطه عبور از صفر مثبت شونده متوالی هستند . بنابراین با اندازه گیری فاصله $t_2 - t_1$ می توان فرکانس لحظه ای و در نتیجه سیگنال اطلاعات را بدست آورد . روش ساده جهت اندازه گیری فاصله بین دو نقطه عبور از صفر مثبت شونده متوالی ، شمردن تعداد نقاط عبور از صفر مثبت شونده در یک فاصله زمانی معین است . اگر فاصله زمانی مذکور T_0 باشد این T_0 باید به نحوی انتخاب شود که در طول آن $x(t)$ تقریباً تغییر ننماید .

یعنی $\left(T_0 \ll \frac{1}{W}\right)$ و از طرف دیگر T_0 باید به نحوی در نظر گرفته شود که بتوان تعداد زیادی از نقاط مذکور را در زمان T_0 شمارش کرد .

یعنی $\left(\frac{1}{f_c} \ll T_0\right)$ در نتیجه:

$$\frac{1}{f_c} \ll T_0 \ll \frac{1}{W}$$

مثالی از مورد فوق می تواند $W=20 \text{ KHZ}$ و $T_0 = 1 \mu\text{sec}$ و $f_c = 10 \text{ MHz}$ باشد. اگر n_0 تعداد نقاط عبور از صفر مثبت شونده در T_0 ثانیه باشد در این صورت :

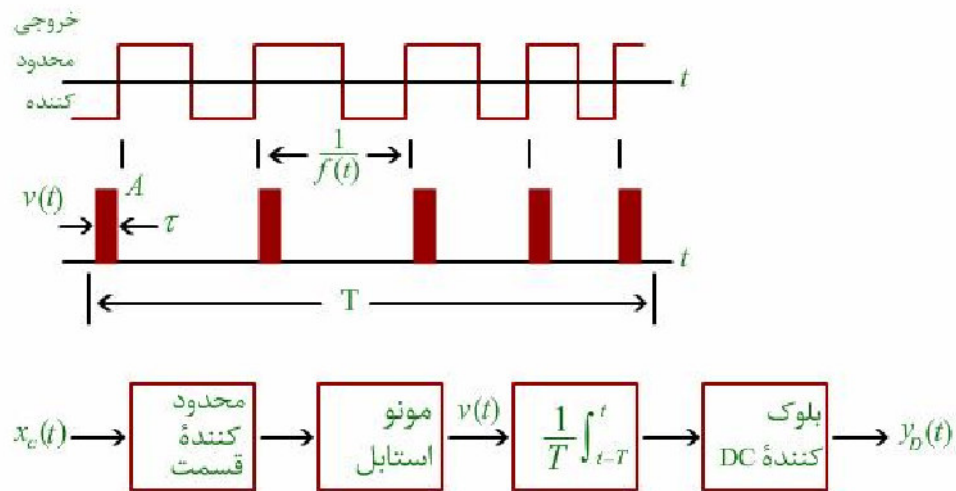
$$n_0 = \frac{T_0}{t_2 - t_1}$$

$$f(t) = \frac{n_0}{T_0}$$

بنابراین فرکانس لحظه ای و بالطبع سیگنال پیام با تعداد نقاط عبور از صفر مثبت شونده در ثانیه متناسب است. در شکل دیاگرام بلوکی و شکل موج های یک آشکارساز عبور از صفر نشان داده شده است. موج FM چهارگوش که در خروجی محدود کننده سخت ظاهر می شود به یک مولد پالسی مونو استابل اعمال شده و این مدار در هر نقطه عبور از صفر مثبت شونده سیگنال FM یک پالس با دامنه ثابت A و پهنای τ بوجود می آورد. اگر از پالس های مذکور (سیگنال $v(t)$) در فاصله زمانی T_0 انتگرال بگیریم می توان نوشت:

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} v(\lambda) d\lambda = \frac{1}{T_0} n_0 A \tau \approx A f(t)$$

و بدین ترتیب سیگنال آشکار شده است.



همانگونه که ذکر شد هدف یک سیستم مخابراتی تولید نسخه قابل قبولی از پیغام در مقصد است .

اگر چه برای این منظور غالباً این پیغام انتقال داده می شود اما آنچه که باید انتقال یابد اطلاعات موجود در پیغام است و نه الزاماً عین پیغام . بنابراین یک سری از زوائد را می توان در این میان حذف کرد که در ادامه به طور مشروح آنرا بررسی می کنیم. همچنین با استفاده از سیستم های مخابرات دیجیتال می توان یک پیغام آنالوگ را با کمک مبدل های آنالوگ به دیجیتال (A/D) در فرستنده و دیجیتال به آنالوگ (D/A) در گیرنده ارسال نمود و از مزایای مخابرات دیجیتال بهره برد.

تعریف پیام آنالوگ و دیجیتال و تبدیل A/D :

پیغام آنالوگ تابعی پیوسته از لحاظ اندازه و زمان است. این نوع پیغام شامل یک رشته سمبل با تنوع محدود و قابل شمارش می باشد با دو عمل نمونه برداری و کوانتیزه کردن می توان پیغام آنالوگ را به دیجیتال تبدیل نمود .

نمونه برداری یا (Sampling):

یک سیگنال با عرض باند w با تعداد $2w$ نمونه در ثانیه کاملاً توصیف می گردد .

کوانتیزه کردن (Quantization):

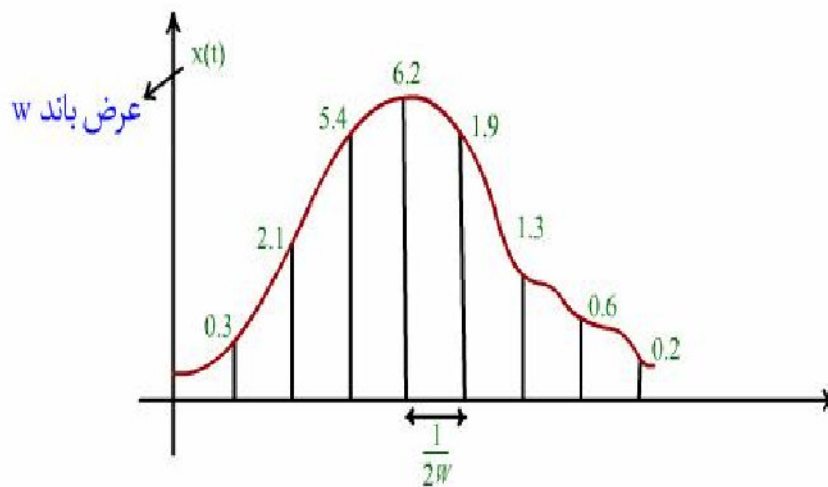
عملی شبیه روند کردن در محاسبات است و با این کار سیگنال نمونه برداری شده به یک رشته گسسته از اعداد

تبدیل می شود این رشته اعداد روند شده به راحتی قابل تبدیل به کد باینری هستند. برای مثال در شکل مشاهده شده

می توان مقادیر نمونه برداری، کوانتیزه و باینری متناظر را به شکل جدول ملاحظه نمود. مقدار نمونه ها: در سطر آخر

مقادیر باینری متناظر اعداد روند شده یا کوانتیزه شده را مشاهده می کنید.

0.3	2.1	5.4	6.2	1.9	1.3	0.6	0.2
0	2	5	6	2	1	1	0
000	010	101	110	010	001	001	000



روش کلی مخابره دیجیتال و مزایای مخابرات دیجیتال:

روش کلی مخابره دیجیتال (مخابره یک رشته عدد) تبدیل آن رشته عدد به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس متناظر با آن ارقام است. (مثلاً یک پالس چهار گوش با دامنه ای مشخص بجای رقم صفر و دامنه ای دیگر بجای رقم یک) و انتقال این سیگنال (شدت جریان، ولتاژ، شدت نور، شدت میدان) توسط کانال فیزیکی

مزایای ناشی از دیجیتال بودن پیغام:

۱- امکان حذف کامل نویز و اعوجاج:

با تشخیص این که پالس های حاوی نویز و پالس های اعوجاج یافته به کدامیک از پالس های مفروض شبیه تر است می توان آن را با یک پالس بدون نویز و بدون اعوجاج جایگزین کرد.

این ویژگی، مهمترین ویژگی مخابرات دیجیتال است زیرا با توجه به این ویژگی می توان پیغام را به فواصل خیلی دور انتقال داد. کفایت در فواصل مکانی یا زمانی مناسب نویز و اعوجاج اضافه شده را حذف کنیم و آنرا با یک پالس بدون نویز و اعوجاج جایگزین نمائیم. این عمل در واقع refresh کردن سیگنال است.

2- سهولت رمز کردن:

مثلاً با در هم ریختن ارقام می توان پیغام را رمز کرد.

۳- سهولت و سرعت در ذخیره و بازیابی پیغام به کمک حافظه های نیمه هادی

مزایای ناشی از دیجیتالی بودن سیستم ها

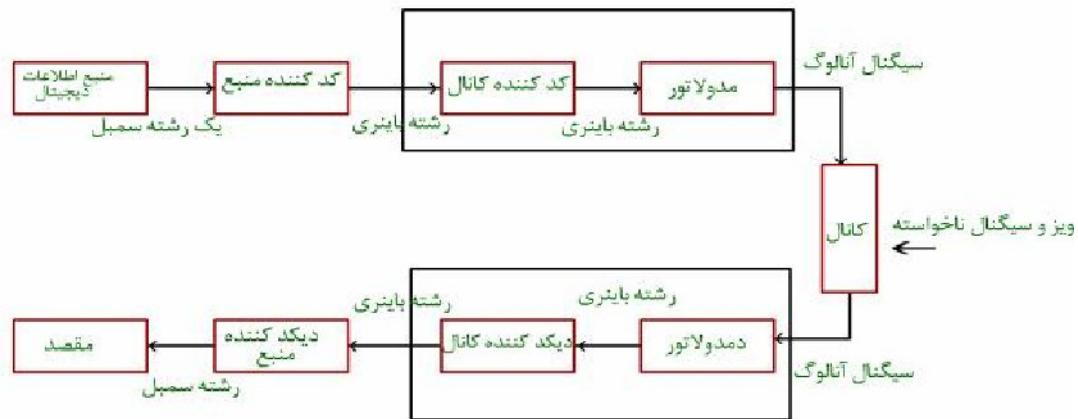
۱- قابلیت اطمینان بالا و درصد خرابی کمتر.

۲- انعطاف پذیری بالا که از نظر گسترش وبه روز در آوردن سیستم بسیار مهم است.

۳- نگهداری ساده که به صورت نرم افزاری و خود کار نیز عملی است.

معرفی اجزای سیستم
مخابراتی دیجیتال

بلوک دیاگرام کلی یک سیستم مخابرات دیجیتال را مشاهده می کنید که به شرح مختصری درباره هریک از بلوک های آن می پردازیم.



منبع اطلاعات دیجیتال : (Digital Information Source)

منبع اطلاعات دیجیتال، منبعی است که پیام دیجیتال (یک رشته سمبل) را تولید می کند .
مثل دستگاه تله تایپ که یک رشته از حروف و علائم گرامری ارقام ۰ تا ۹ را تولید می کند .
دستگاه فاکس که یک رشته صفر و یک تولید می کند.

و منبع آنالوگ به همراه یک مبدل آنالوگ به دیجیتال A/D که یک رشته نمونه روند شده یا کوانتیزه شده تولید می کند .

پارامترهای توصیف کننده منبع دیجیتال :

۱- الفبای منبع : که عبارت است از مجموعه ای است که سمبل ها از بین آنها انتخاب و صادر می شوند.
الفبای یک منبع μ تایی و یک منبع باینری را می توان به صورت زیر نشان داد:

$\{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$: الفبای یک منبع μ تایی

به عبارتی تعداد μ سمبل در آن وجود دارد.

$\{0,1\}$: الفبای منبع باینری

۲- سرعت منبع : که تعداد سمبل های صادر شده از منبع را در هر ثانیه نشان می دهد و با نماد r_s با واحد Symb/Sec نشان داده می شود .

کد بندی منبع (Source
Encoding)

عمل کدبندی یا کدگذاری منبع برای باینری کردن پیغام منابع است تا به عنوان یک زبان مشترک و مناسب بین فرستنده ها و گیرنده ها استفاده شود. البته ضمن این کار می توان اضافات منبع را نیز کاهش داد .

کد بندی می تواند با طول ثابت و یا با طول متغیر باشد. (منظور از طول کد تعداد ارقام باینری آن است.) که مثال آن در جدول زیر آمده است .

الفبای انگلیسی	کد بین المللی تلگراف و تلکس	کد مورس
A یا فراوانی متوسط	۱۱۰۰۰	•—
⋮		
E فراوان ترین حرف	۱۰۰۰۰	•
Z با فراوانی کم	۱۰۰۰۱	—•••

با اختصاص کد کوتاه تر به حروف فراوان تر و بالعکس می توان تعداد ارقام باینری حاصل از کد بندی یک پیغام را کاهش داد و بازدهی اطلاعاتی پیغام را بالا برد که روش بهینه آن ذکر خواهد شد.

کانال



کانال محدوده فیزیکی است که برای انتقال سیگنال در نظر گرفته می شود مانند زوج سیستم، کابل هم محور، فیبر نوری و غیره .

کانال دارای محدودیت هایی است و اثرات نامطلوبی روی سیگنال می گذارد که عبارتند از :

الف) تضعیف سیگنال :

این پدیده با عمل تقویت قابل جبران است .

ب) اعوجاج خطی سیگنال :

این اعوجاج ناشی از غیر یک نواخت بودن مشخصه فرکانسی کانال است و شامل دو نوع اعوجاج دامنه و فاز می باشد. این پدیده با عمل ترمیم یا Equalization قابل جبران است.

اعوجاج غیر خطی سیگنال:

این اعوجاج ناشی از تجاوز دامنه سیگنال از محدوده خطی سیستم است و با استفاده از عمل Companding قابل اجتناب است.

(د) تداخل : ناشن از مجاورت سیگنال مورد نظر با سایر سیگنال ها است.

مجاورت فیزیکی در زوج سیمها که با پدیده القاء باعث تداخل می گردد.

مجاورت فرکانسی در FDM که با پدیده اعوجاج غیر خطی باعث تداخل می گردد.

مجاورت زمانی در TDM که با پدیده اعوجاج خطی باعث تداخل می گردد.

با فاصله گرفتن از سایر سیگنال ها یعنی فاصله فیزیکی در زوج سیستم ها ، باند محافظ در FDM و بازه زمانی محافظ در TDM می توان با تداخل مقابله کرد .

(ه) نویز

نویز سیگنال ناخواسته ایست که از منابع طبیعی ناشی می گردد . مهمترین آن نویز حرارتی است که از حرکات تصادفی الکترونها نشأت می گیرد . چون این نویز قابل اجتناب نیست بعنوان یکی از محدودیت های اصلی کانال بحساب می آید.

(و) عرض باند

هر کانالی برای رنج فرکانسی مشخصی مناسب است و ضمناً همه باند مناسب کانال، معمولاً در اختیار یک سیگنال قرار داده نمی شود لذا عرض باند فیزیکی از محدودیت های اصلی کانال بحساب می آید.

کد بندی کانال

کد بندی کانال برای مقابله با نویز است. با کد بندی می توان خواصی را در ارقام ایجاد کرد که با از بین رفتن ناشی از نویز، این خواص برای گیرنده قابل تشخیص باشد، کد بندی با قابلیت تشخیص خطا را شامل می شود. در این صورت گیرنده درخواست ارسال مجدد می کند. همچنین کد بندی می تواند به گونه ای باشد که گیرنده رأساً اقدام به تصحیح خطا کند (که کد بندی با قابلیت تصحیح خطا می باشد). یک مثال ساده و بسیار رایج از کد بندی با قابلیت تشخیص خطا، روش توازن یا Parity است و مثالی از کد بندی با قابلیت تصحیح خطا، سه بار ارسال هر رقم است. کد بندی به روش توازن و به روش سه بار تکرار هر رقم را در جدول زیر ملاحظه می کنید:

a_i	ورودی کد کننده کانال	خروجی کد کننده کانال به روش توازن	خروجی کد کننده کانال به روش ۳ بار تکرار هر رقم
A	۱۱۰۰	۱۱۰۰۰	۱۱۱/۱۱۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
⋮			
E	۱۰۰۰	۱۰۰۰۱	۱۱۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
⋮			
Z	۱۰۰۱	۱۰۰۱۰	۱۱۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۱۱۱

در کد بندی با روش توازن بروز یک خطا در طول هر کد، تعداد یک ها را فرد می کند و این برای گیرنده قابل تشخیص است. در مثال ۳ بار تکرار هر رقم بروز یک خطا در طول سه تکرار با توجه به اکثریت دو رقم دیگر قابل تشخیص است.

مدم
(Modem)

مدولاتور وظیفه تبدیل ارقام به سیگنال مناسب برای عبور از کانال را به عهده دارد، یعنی عمدتاً سیگنالی که در باند فرکانسی مناسب و اختصاص یافته کانال قرار داشته باشد. این کار با تبدیل ارقام به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس متناظر با ارقام صورت می گیرد.

دمدولاتور وظیفه عکس را بر عهده دارد و با تشخیص این که در سیگنال دریافتی چه پالس هایی وجود دارد ارقام مربوطه را آشکار می کند.

تئوری اطلاعات
Information
Theory

تئوری اطلاعات به ۳ سوال اساسی زیر پاسخ می دهد .

- ۱- اطلاعات یک پیغام چیست ؟
- ۲- حداکثر اطلاعاتی که یک کانال مفروض می تواند در هر ثانیه انتقال دهد , یعنی ظرفیت کانال چقدر است ؟
- ۳- مشخصات یک سیستم مخابراتی ایده آل چیست ؟

در پاسخ به این سؤالات هیچ محدودیت فناوری در نظر گرفته نمی شود و فقط محدودیت های تئوریک مثل عرض باند و یا نویز در نظر گرفته می شود .

اطلاعات پیغام

تعریف اطلاعات پیغام و واحد آن :

سه پیغام زیر را در نظر بگیرید:

نوزاد متولد شده، سالم است.

نوزاد متولد شده، دختر است.

نوزاد متولد شده، دو قلو است.

این پیغام حاوی اطلاعات کمی است .

این پیغام حاوی اطلاعات بیشتری است .

این پیغام حاوی اطلاعات بسیار زیادی است .

می توان از جملات فوق تشخیص داد که اطلاعات پیغام، کمیتی است که به احتمال وقوع پیشامد مربوطه بستگی دارد .
به عبارتی :

$$I(A) = f(P_A)$$

$I(A)$ اطلاعات A , P_A احتمال وقوع A می باشد .

شرایطی که منطقاً در رابطه با اطلاعات هر پیغام باید وجود داشته باشد عبارتند از :

$$1) \quad P_A \geq P_B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$$

در واقع بیان گر نزولی بودن تابع مربوط کننده اطلاعات پیغام و احتمال وقوع آن است.

$$2) P_A = 1 \Rightarrow I(A) = 0$$

$$3) A \perp\!\!\!\perp B \stackrel{\text{اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند}}{\Rightarrow} I(A, B) = I(A) + I(B)$$

یعنی اطلاعات هر پیشامد بزرگتر یا مساوی صفر است .

$$4) I(A) \geq 0$$

شرایط فوق را بر حسب تابع f می توان به صورت زیر نوشت :

$$1) f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$2) f(1) = 0$$

این خاصیت نزولی بودن تابع f را نشان می دهد .

$$3) A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow P_{A,B} = P_A P_B \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y)$$

اگر از $f(xy)$ نسبت به x و بار دیگر نسبت به y مشتق بگیریم، داریم :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(xy)) = yf'(xy) = f'(x) + 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(xy)) = xf'(xy) = f'(y) + 0$$

از تقسیم روابط فوق بر یکدیگر خواهیم داشت :

$$xf'(x) = yf'(y)$$

همچنین داشتیم:

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$f'(x) = -\frac{K^2}{x}$$

بنابراین می توان نوشت :

و اگر $f(x)$ را محاسبه کنیم داریم :

$$f(x) = -K^2 \ln x + K_0$$

با توجه به شرط $f(1) = 0$, مقدار $K_0 = 0$ بدست خواهد آمد و عبارت $f(x)$ به صورت:

$$f(x) = -K^2 \ln x$$

در می آید.

اگر $K^2 = \frac{1}{\ln a}$ فرض شود، آنگاه:

$$f(x) = -\frac{\ln x}{\ln a} = -\log_a^x$$

بنابراین اطلاعات پیغام A ، با احتمال وقوع P_A برابر است با:

$$I(A) = -\log_a^{P_A}$$

مبنای لگاریتم، $a \geq 1$ می تواند به صورت دلخواه انتخاب شود.

سه مبنای رایج بایمیری، دسیمال و طبیعی بیشتر از همه به کار می‌روند. واحد اطلاعات در این سه مبنا به ترتیب bit، decit و nat نامیده می‌شوند.

$$I(A) = -\log_2^{PA} \quad [bit = binary \ unit]$$

$$I(A) = -\log_{10}^{PA} \quad [decit = decimal \ unit]$$

$$I(A) = -\log_e^{PA} \quad [nat = natural \ unit]$$

را تشکیل می‌دهد.

در ادامه از مبنای ۲ یعنی واحد بیت استفاده خواهیم کرد.

$$I(A) \triangleq -\log_2^{PA} = +\log_2^{\frac{1}{PA}} \quad [bit]$$

در دیجیتال رقم باینری را بیت می‌گویند. برای جلوگیری از اشتباه با واحد اطلاعات، نام بینیت که مخفف (binary digit) است را برای واحد رقم باینری انتخاب می‌کنیم.

چند مثال جهت آشنایی با مفهوم اطلاعات یک پیغام:

۱- اطلاعات پیغام دختر بودن نوزاد چقدر است.

با توجه به متساوی‌الاحتمال بودن تولد فرزند پسر یا دختر که $\frac{1}{2}$ است، یعنی:

$$P(\text{پسر}) = P(\text{دختر}) = \frac{1}{2}$$

اطلاعات پیغام مذکور ۱ بیت خواهد بود.

$$I(\text{پسر}) = \log_2^{\frac{1}{P(\text{دختر})}} = \log_2^2 = 1[\text{bit}]$$

به طور کلی ۱ بیت اطلاعات، پیغامی است که ۵۰٪ قابل پیش‌بینی است.

۲- تخمین اطلاعات یک کلمه.

هدف، تخمین حدود اطلاعات یک کلمه است.

فرض می‌کنیم کلمه ۵ حرفی باشد، حروف کلمه مستقل از هم باشند و هر حرف کلمه با

احتمالات مساوی از یک الفبای $\mu = 32$ تایی گرفته شده باشد.

با توجه به خاصیت مستقل بودن حروف کلمه داریم.

$$I(\text{کلمه}) = 5I(\text{حرف})$$

همچنین:

$$P(\text{حرف}) = \frac{1}{32}$$

بنابراین:

$$I(\text{کلمه}) = 5\log_2^{32} = 5\log_2^{2^5} = 25\text{bit}$$

البته تخمین فوق یک تخمین دست‌بالاست، زیرا حروف یک کلمه مستقل از هم نیستند، اگر بودند تمام ترکیبات ۵ حرفی، کلمه با معنی را تشکیل می‌دادند که اینطور نیست.

اگر بخواهیم تخمین فوق را بهتر کنیم، فرض می‌کنیم این کلمه از یک فرهنگ لغت صد هزار کلمه‌ای انتخاب شده است. در اینصورت:

$$P(\text{کلمه}) = \frac{1}{100000}$$

در اینصورت:

$$I(\text{کلمه}) = \log_2 \frac{1}{P(\text{کلمه})} = 16.6 \text{ bit}$$

ملاحظه می‌شود، اطلاعات یک کلمه چیزی در حدود ده بینیت بیت است.

۳- تخمین اطلاعات یک تصویر:

فرض کنید تصویر از 600×800 جزء تصویر (pixel) تشکیل شده است.

اجزای تصویر مستقل از هم هستند.

هر جزء تصویر با احتمالات مساوی در یکی از سطوح هشت‌گانه روشن قرار داشته باشد و

هر جزء تصویر با احتمالات مساوی در یکی از رنگ‌های ۱۶ گانه باشد.

در اینصورت:

$$I(\text{تصویر}) = 600 \times 800 I(\text{pixel}) = 600 \times 800 \log_2 \frac{1}{\frac{1}{16 \times 8}} = 3.36 \text{ Mbit}$$

البته تخمین فوق هم، تخمین دست بالا است، چون اجزاء تصویر مستقل از هم نیستند.

اطلاعات شرطی،
اطلاعات توأم و اطلاعات
مشترک بین دو پیغام

فرض کنید A و B دو پیغام متفاوتند.
اطلاعات شرطی عبارت است از:

$$I(B|A) \triangleq \log_2 \frac{1}{p(B|A)}$$

و اطلاعات توأم دو پیغام A و B عبارت است از:

$$I(AB) \triangleq \log_2 \frac{1}{p(AB)}$$

از احتمالات می‌دانیم:

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

و بنابراین:

$$I(AB) = I(A) + I(B|A)$$

که به رابطه زنجیره‌ای معروف است. تعمیم رابطه زنجیره‌ای عبارت است از:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots \\ \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

و با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه فوق، رابطه کلی اطلاعات توأم به دست می‌آید.

$$P(A_1, A_2 \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2|A_1) + P(A_3|A_1 A_2) + \\ \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

اگر اجزاء پیام مستقل از یکدیگر باشند، می‌توان شرطها را برداشت و رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I(A_1, A_2 \dots A_n) = \sum_{i=1}^n I(A_i)$$

اطلاعات مشترک بین دو پیغام بر طبق تعریف، عبارت است از:

$$I(A \leftrightarrow B) \triangleq I(A) + I(B) - I(AB)$$

همچنین داریم:

$$I(AB) = I(A) + I(B|A)$$

بنابراین اطلاعات مشترک دو پیغام را می‌توان بصورت‌های زیر نوشت:

$$I(A \leftrightarrow B) \triangleq I(B) - I(B|A)$$

این اطلاعاتی است که A در مورد B دارد.

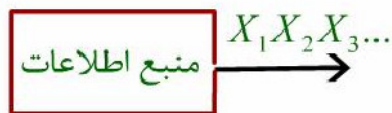
$$I(A \leftrightarrow B) \triangleq I(A) - I(A|B)$$

و این اطلاعاتی است که B در مورد A دارد.

9



هر منبع می‌تواند پیغام‌های مختلفی صادر کند، لذا برای آن اطلاعات متوسط تعریف می‌شود.



آنترופی (Entropy) در واقع متوسط اطلاعاتی است که منبع به ازای هر سمبل صادر می‌کند.

آنترופی را با H نشان می‌دهند و واحد آن $\frac{bit}{symb}$ است.

سرعت اطلاعات منبع یا Information Rate نیز بیانگر متوسط اطلاعاتی است که منبع در هر ثانیه از خود صادر می‌کند.

سرعت اطلاعات منبع را با R نشان داده و واحد آن $\frac{bit}{sec}$ است.

قبلاً نیز سرعت منبع را به صورت تعداد سمبل‌های صادر شده از منبع، در هر ثانیه تعریف کردیم و

نماد R_s را برای بیان آن به کار بردیم. واحد سرعت منبع یا r_s ، $\frac{symb}{sec}$ می‌باشد.

برای محاسبه این پارامترها می‌توان فرض کرد که منبع، پیغام بسیار طولی متشکل از $N \rightarrow \infty$

سمبل از خود صادر کرده است. زمان صدور آن را T_n و مقدار اطلاعات آن را I_n

می‌نامیم. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{N}, R = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{T_N}$$

بین این دو پارامتر یک رابطه ساده وجود دارد.

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{T_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{T_N} \times \frac{N}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{T_N} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{N} = r_s \cdot H$$

بنابراین با توجه به رابطه $R = r_s \cdot H$ کافی است یکی از این دو پارامتر مثلاً H را محاسبه کنیم.

آنتروپی منبع بدون
حافظه

منبع بدون حافظه، یعنی منبعی که هر سمبل صادره آن، مستقل از سمبل‌های صادره قبلی باشد. چون هر سمبل جدید نسبت به سمبل‌های بعدی، قبلی تلقی می‌شود پس هر سمبل از سمبل‌های صادره بعدی هم مستقل خواهد بود. بدین ترتیب کلیه سمبل‌های صادره توسط چنین منبعی مستقل از هم می‌باشند.

توصیف منبع بدون حافظه:

۱- سرعت منبع: که تعداد سمبل‌های صادره در هر ثانیه را نشان می‌دهد. $r_s \left(\frac{\text{symb}}{\text{sec}} \right)$

۲- الفبای منبع: مجموعه‌ای متشکل از کلیه سمبل‌های مختلفی که منبع قادر به تولید آن است.

به عنوان مثال در یک منبع μ تایی، الفبای منبع عبارت است از $\{a_1, a_2, a_3 \dots a_\mu\}$ و در منبع باینری $\mu = 2$ معمولاً الفبا را صفر و یک در نظر می‌گیرند. $\{0, 1\}$

۳- خصوصیات آماری منبع: در منبع بدون حافظه، احتمال صدور حروف مختلف الفبا، منبع را از لحاظ آماری کاملاً توصیف می‌کند، یعنی احتمال:

$$P(X = a_i) = P(a_i) = P_i$$

$$i = 1, 2, \dots, \mu$$

$$\{P_1, P_2, \dots, P_\mu\}$$

را تشکیل می‌دهد.

که این مجموعه خصوصیت آماری تمام سمبل‌ها را نشان می‌دهد. در حالت کلی مجموع این احتمالات برابر یک است.

فرمول آنتروپی

صدور پیغام به طول $N \rightarrow \infty$ را در نظر بگیرید.

$$y = X_1 X_2 \dots X_N$$

اطلاعات این پیغام با توجه به مستقل بودن سمبل‌ها عبارت است از:

$$I_N = I(y) = I(X_1 X_2 \dots X_N) = \sum_{i=1}^N I(X_i)$$

N را می‌توان بدین صورت نیز نوشت: بنابراین:

$$N = \sum_{i=1}^{\mu} NP_i$$

$$I_N = \sum_{i=1}^N I(X_i) = \sum_{i=1}^{\mu} NP_i I(a_i) = \sum_{i=1}^{\mu} NP_i \log_2 \frac{1}{P_i}$$

با کمک این رابطه و تعریف آنتروپی، فرمول آن بدست می‌آید.

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{N} = \sum_{i=1}^{\mu} P_i \text{Log}_2^{\frac{1}{P_i}} = \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i) \text{Log}_2^{\frac{1}{P(a_i)}} \left[\text{bit} / \text{symp} \right]$$

ماکزیمم آنتروپی
منبع μ تایی

$$\begin{cases} H = \sum_{i=1}^{\mu} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \\ P_1 + P_2 + \dots + P_{\mu} = 1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $P_{\mu} = 1 - (P_1 + P_2 \dots P_{\mu-1})$ رابطه H را می توان بدین صورت نوشت:

$$H = -P_1 \log_2^{P_1} - P_2 \log_2^{P_2} \dots - P_{\mu-1} \log_2^{P_{\mu-1}} - (1 - P_1 - P_2 \dots - P_{\mu-1}) \log_2 (1 - P_1 - P_2 \dots - P_{\mu-1})$$

از H نسبت به P_1 تا $P_{\mu-1}$ مشتق گرفته، برابر صفر قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_1} = & -\log_2^{P_1} - P_1 \frac{1}{P_1} \log_2^e + 0 + \log_2 (1 - P_1 - P_2 \dots - P_{\mu-1}) \\ & - \frac{(1 - P_1 \dots - P_{\mu-1})}{1 - P_1 \dots - P_{\mu-1}} \log_2^e \end{aligned}$$

و بنابر این:

$$\frac{\partial H}{\partial P_1} = 0 \Rightarrow -\log_2^{P_1} + \log(1 - P_1 \dots - P_{\mu-1}) = 0 \Rightarrow P_1 = (1 - P_1 - P_2 \dots - P_{\mu-1})$$

به همین ترتیب:

$$\frac{\partial H}{\partial P_2} = 0 \Rightarrow P_2 = (1 - P_1 \dots - P_{\mu-1})$$

و به همین ترتیب همه جملات را اگر

$$\frac{\partial H}{\partial P_{\mu-1}} = 0 \Rightarrow P_{\mu-1} = (1 - P_1 \dots - P_{\mu-1})$$

منجر خواهد شد.

با توجه به روابط به دست آمده برای P_i ها، شرط ماکزیمم شدن آنتروپی، متساوی‌الاحتمال بودن احتمالات می‌باشد. یعنی:

$$P_1 = P_2 = \dots = P_{\mu-1} = P_{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

و بدین ترتیب آنتروپی ماکزیمم عبارت است از:

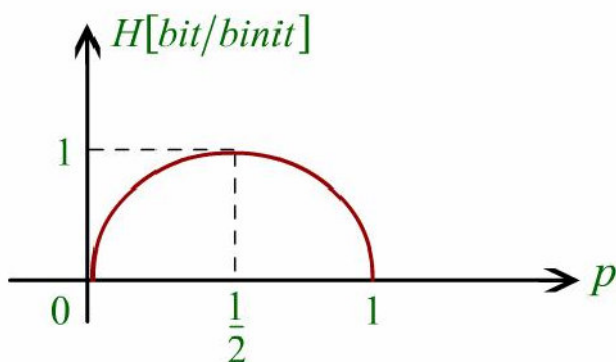
$$H_{\max} = \log_2^{\mu}$$

منبع باینری

اگر احتمال وقوع صفر در یک منبع باینری P و احتمال وقوع 1، $1-P$ باشد، آنتروپی منبع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$H = P \log_2 \frac{1}{P} + (1-P) \log_2 \frac{1}{1-P} \left[\frac{\text{bit}}{\text{binit}} \right]$$

که نمودار آن را بر حسب P مشاهده می‌کنید.



در حالت $P=0$ ، احتمال صدور 0 برابر صفر و احتمال صدور 1 برابر 1 است، یعنی خروجی منبع همیشه یک است. چنین منبعی هیچ اطلاعاتی ندارد و بنابراین $H = 0$ می‌گردد. در حالت

$P = \frac{1}{2}$ نیز ماکزیمم آنتروپی به دست می‌آید.

تعریف یک تابع:

$$h(x) \triangleq x \log_2^{\frac{1}{x}} + (1-x) \log_2^{\frac{1}{1-x}}$$

آنتروپی منبع باینری را می‌توان بر حسب این تابع به شکل $H=h(P)$ بیان کرد.

آنتروپی به
عنوان امید

صدور سمبل تصادفی X متعلق به الفبای a_μ را در نظر بگیرید.

$$X \in \{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$$

امید ریاضی اطلاعات این سمبل عبارت است از:

$$E(I(X)) = \sum_{i=1}^{\mu} P(X = a_i) I(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i) \log_2 \frac{1}{P(a_i)} = H$$

پس در منبع بدون حافظه داریم:

$$H = E(I(x))$$

یا آنتروپی مساوی است با امید ریاضی $I(X)$.

آنتروپی منبع
با حافظه

منبع با حافظه منبعی است که در آن صدور هر سمبل جدید بستگی به سمبل‌های صادره قبلی دارد و لذا به سمبل‌های صادره بعدی هم، بستگی دارد.

توصیف منبع با حافظه:

منبع با حافظه با پارامترهای زیر توصیف می‌گردد.

۱- سرعت منبع r_s

۲- الفبای منبع $\{a_1, a_2, \dots, a_\mu\}$

۳- حالات منبع

برای سابقه منبع یعنی سمبل‌هایی که قبلاً صادر کرده است از نظر تاثیری که روی صدور سمبل بعدی می‌گذارد می‌توان مثلاً n حالت در نظر گرفت. $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

۴- خصوصیات آماری منبع که عبارت است از:

۱. احتمال حالات مختلف:

$$P\{S = S_j\} = P(S_j) = P_j$$

که احتمال اینکه منبع در حالت j ام باشد را معین می‌کند و مجموعه اطلاعات $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ به وجود می‌آورد. که البته مجموع آن‌ها برابر 1 است.

۲. احتمال صدور حروف الفبا در هر حالت:

احتمال صدور حرف a_i در حالت S_j را به صورت احتمال شرطی زیر نشان می‌دهیم.

$$P\{X = a_i | S = S_j\} = P\{a_i | S_j\}$$

کلیه ی این احتمالات یعنی احتمال صدور a_1 تا a_μ ، در حالات S_1 تا S_n به قرار زیر می‌باشند.
 همانطور که ملاحظه می‌کنید، سطر اول احتمال a_i ها به شرط S_1 نوشته شده، در سطر دوم،
 احتمال a_i ها به شرط S_2 و تا آخر که احتمال a_i ها به شرط S_n را ملاحظه می‌کنید.

$$\begin{aligned} &\{P\{a_1|s_1\}, P\{a_2|s_1\}, \dots, P\{a_\mu|s_1\}\} \\ &\{P\{a_1|s_2\}, P\{a_2|s_2\}, \dots, P\{a_\mu|s_2\}\} \\ &\vdots \\ &\{P\{a_1|s_n\}, P\{a_2|s_n\}, \dots, P\{a_\mu|s_n\}\} \end{aligned}$$

فرمول آنتروپی
منبع باحافظه

صداور پیغام به طول $N \rightarrow \infty$ سمبل را در نظر می‌گیریم.
اطلاعات پیغام عبارت است از:

$$I_N = I(X_1 X_2 \dots X_N) \\ = I(X_1) + I(X_2 | X_1) + I(X_3 | X_1 X_2) + \dots + I(X_N | X_1 X_2 \dots X_{N-1})$$

در واقع در جمع کردن اطلاعات سمبل‌های پیغام، باید سمبل‌های صادره قبلی یا همان سابقه منبع یا حالت منبع را معلوم فرض کنیم. تعداد سمبل‌های صادره در حالت j ام، $NP(s_j)$ و تعداد a_i صادره در حالت j ام، $NP(s_j)P(a_i | s_j)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$N = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\mu} NP(s_j)P(a_i | s_j)$$

بدین ترتیب:

$$I_N = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\mu} NP(s_j)P(a_i | s_j)I(a_i | s_j)$$

که طبق تعریف:

$$I(a_i|s_j) = \log_2 \frac{1}{P(a_i|s_j)}$$

بنابراین آنتروپی عبارت خواهد شد:

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{N} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\mu} P(s_j) P(a_i|s_j) \log_2 \frac{1}{P(a_i|s_j)}$$

یا می‌توان نوشت:

$$H = \sum_{j=1}^n P(s_j) \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i|s_j) \log_2 \frac{1}{P(a_i|s_j)} = \sum_{j=1}^n P(s_j) H_j \left[\frac{bit}{symb} \right]$$

H را می‌توان متوسط آنتروپی حالت‌های مختلف دانست.

مثال: منبع باینری
مارکوف
مرتبه $m=2$

منبع مارکوف مرتبه m ام یعنی منبعی که سابقه آن با آخرین m سمبل
صادره کاملاً مشخص می‌گردد. چنین منبعی می‌تواند تعداد:

$$n = \underbrace{\mu \times \mu \times \dots \times \mu}_m = \mu^m$$

حالت مختلف داشته باشد.

بنابراین در منبع باینری مارکوف مرتبه دوم می‌توان $n = \mu^m = 2^2 = 4$ حالت مختلف،
که عبارتند از:

$$S = \{00, 01, 10, 11\}$$

فرض کنید احتمال صدور 0 و 1 در حالات مختلف به صورت زیر باشد.

$$P(0|00) = 0.9$$

$$P(0|01) = 0.2$$

$$P(0|10) = 0.7$$

$$P(0|11) = 0.4$$

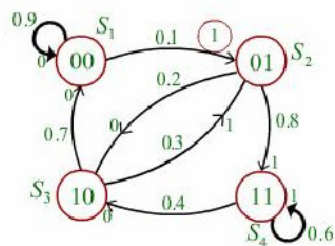
$$P(1|00) = 0.1$$

$$P(1|01) = 0.8$$

$$P(1|10) = 0.3$$

$$P(1|11) = 0.6$$

این اطلاعات را می‌توان به کمک نمودار حالت زیر توصیف کرد. صدور هر سمبل جدید (هر رقم)، معادل با یک تغییر حالت است.



با فرض این که منبع به حالت ساکن رسیده باشد یعنی با صدور سمبل جدید احتمال حالات تغییر نکند، می‌توان از روی احتمالات فوق احتمال حالت‌ها را نیز محاسبه کرد.

$$P_1 = 0.9P_1 + 0.7P_3$$

$$P_2 = 0.1P_1 + 0.3P_3$$

$$P_3 = 0.4P_4 + 0.2P_2$$

$$P_4 = 0.6P_4 + 0.8P_2$$

چهار معادله فوق مستقل نیستند، می‌توان یکی را حذف کرد و به جای آن معادله زیر را قرار داد.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

که از حل آن‌ها خواهیم داشت:

$$P_1 = \frac{7}{11} \quad P_2 = \frac{1}{11} \quad P_3 = \frac{1}{11} \quad P_4 = \frac{2}{11}$$

با استفاده از فرمول آنتروپی منابع حافظه‌دار، می‌توانیم آنتروپی منبع مارکوف را محاسبه کنیم.

$$H = \sum_{j=1}^4 P_j H_j = 0.621 \left[\frac{bit}{binit} \right]$$

ماکزیمم آنتروپی

می‌توان نشان داد بیشترین آنتروپی را منبعی دارد که بدون حافظه و متساوی‌الاحتمال باشد.

مثال:

در یک مسابقه ۲۰ سؤالی، مجری کلمه‌ای را انتخاب می‌کند و شرکت کننده باید با ۲۰ سؤال باینری (یعنی پاسخ آری یا خیر) کلمه را پیدا کند. فرض براین است که کلمه از یک فرهنگ لغت صد هزار کلمه‌ای انتخاب شده باشد. بنابراین:

$$I(\text{کلمه}) = \log_2 1000 = 16.6 \text{ bit}$$

منبع اطلاعات (مجری) منبع باینری است (پاسخ آری یا خیر دارد).

$$\text{ماکزیمم آنتروپی این منبع} = \log_2 2 = 1 \left[\frac{\text{bit}}{\text{سؤال}} \right] \text{ است. } H_{\max}$$

پس باید بتوان با ۱۷ سؤال کلمه را پیدا کرد، البته به شرطی که با هر سؤال دقیقاً یک بیت اطلاعات حاصل شود، یعنی احتمال گرفتن پاسخ آری یا خیر با هم برابر باشد. یک راه این کار این است که فرهنگ را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و با یک سؤال بفهمیم که در کدام قسمت است و این کار را ۱۷ بار تکرار کنیم. چون $2^{17} > 100000$ است به کلمه مورد نظر خواهیم رسید.

بازدهی و اضافات
منبع

بازدهی منبع یا efficiency و اضافات منبع یا redundancy که به ترتیب با e و ρ نمایش داده می‌شوند به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N \text{ تعداد سمبل های لازم برای صدور اطلاعات}}{I_N \text{ تعداد سمبل ای به کار رفته در صدور اطلاعات}}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N / \log_2^\mu}{N} = \frac{H}{\log_2^\mu} = \frac{H}{H_{\max}} \leq 1$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N - I_N / \log_2^\mu}{N} = 1 - e \leq 1$$

مثال: متون انگلیسی با $\mu = 27 + 1$ ، برای این متون:

$$H_{\max} = \log_2 \mu = 4.75 \frac{\text{bit}}{\text{Letter}}$$

تخمین H با فرض بدون حافظه بودن منبع به کمک ۲۷ احتمالی که برای هر یک از حروف به صورت آماری محاسبه شده است، عبارت خواهد بود از:

$$H = \sum_{i=1}^{27} p(a_i) \log_2 \frac{1}{P(a_i)} = 4.1 \text{ bit/letter}$$

تخمین H با فرض مارکوف مرتبه اول بودن عبارت است از :

$$n = \mu^m = 27^1 = 27$$

تعداد حالات

بدین ترتیب:

$$H = \sum_{j=1}^{27} p(a_j) \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i | a_j) \log_2 \frac{1}{P(a_i | a_j)} = 3.3 \frac{\text{bit}}{\text{Letter}}$$

به همین ترتیب تخمین H با فرض مارکوف مرتبه دو محاسبه می شود. $H = 3.1 \frac{\text{bit}}{\text{Letter}}$

در یک متن، وابستگی حروف متن صد حرف یا بیشتر ادامه می‌یابد چرا که حروف کلمه به هم وابسته اند، اگر این وابستگی وجود نداشت هر ترکیب دلخواه آن‌ها کلمه‌ای با معنی می‌شد. در ضمن کلمه ها هم به هم وابسته اند (اگر چنین نبود ترکیب دلخواه کلمات، جمله با معنی می‌شد و حتی جملات یک پاراگراف نیز به هم وابسته اند. روشن است که با مدل مارکوف عملاً نمی‌توان تخمین خوبی از H به دست آورد.

آقای شنن برای بررسی این موضوع، متون مختلف حاوی صد حرف یا بیشتر را به افراد مختلف نشان داد و از آنها خواست حرف بعدی را حدس بزنند. ایشان ملاحظه کرد که در ۵۰ درصد موارد حدس ها درست در می‌آید، یعنی با معلوم بودن سابقه متن، حرف بعدی ۵۰ درصد قابل پیش بینی است. یعنی :

$$H \approx 1 \frac{bit}{Letter}$$

با این تخمین بازدهی منبع و اضافات آن عبارتند از :

$$e = \frac{H}{H_{\max}} = \frac{1}{4.75} = 0.21$$

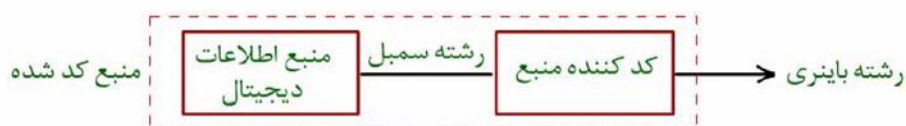
$$P = 1 - e = 0.79$$

بدین ترتیب تقریباً ۸۰ درصد سمبل های به کار رفته در متون انگلیسی زائد است. البته اضافات موجود در منابع، جنبه مثبت هم دارد چرا که پیغام را در مقابل نویز مقاوم می‌کند. البته اضافاتی که به طور طبیعی در منابع وجود دارد این وظیفه را به نحو مؤثری انجام نمی‌دهند.

روش بهینه آن است که اضافات طبیعی را با کد بندی منبع حذف کنیم و سپس اضافات حساب شده‌ای را در بخش کدبندی کانال برای مقاوم کردن آن در مقابل نویز به آن اضافه کنیم.

کدبندی منبع
Source
Encoding

کدبندی منبع در واقع برای باینری کردن پیغام منابع مختلف، لازم است (در واقع این کد به عنوان یک زبان مشترک و مناسب بین فرستنده و گیرنده های دیجیتال مطرح می شود.) البته ضمن کدبندی منبع، می توان اضافات منبع را هم کاهش داد.



پارامترهای منابع اطباغات اصلی عبارتند از:

$$۱- \text{سرعت منبع} \left[\frac{\text{symbol}}{\text{sec}} \right] r_s$$

۲- مجموعه الفبای منبع که برای مثال حاوی μ عبارت خواهد بود.

۳- آنتروپی و سرعت اطلاعات منبع که:

$$\begin{cases} H \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}} \right] \\ R \left[\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right] \end{cases}$$

۴- و نهایتاً بازدهی و اضافات منبع که طبق تعریف:

$$e = \frac{H}{\log \mu}$$

$$\rho = 1 - e$$

پارامترهای منبع کد شده عبارتند از:

$$r_b \left(\frac{binit}{sec} \right) \quad \text{سرعت منبع:}$$

الفبای منبع که فقط $\{0,1\}$ را در حالت باینری به خود می پذیرد.

$$\begin{cases} H' (bit / binit) \\ R' (bit / sec) \end{cases}$$

آنتروپی و سرعت اطلاعات:

همچنین بازدهی و اضافات که $e' = \frac{H'}{\log \mu'} = H'$ و $\rho' = 1 - e' = 1 - H'$ خواهد بود.

روش ساده و رایج برای کدبندی این است که به هر یک از حروف الفبای منبع، کدی باینری (مثلاً n_i رقمی برای حروف a_i) نسبت دهیم ورشته سمبل های صادره را یکی یکی به کد باینری مربوطه بدل کنیم. با توجه به این که کد سمبل های مختلف بدون فاصله نسبت به هم صادر می گردند، در کدبندی با طول متغیر از کدهایی استفاده می گردد که هیچ یک پیشوند کد دیگری نباشد تا به این ترتیب با تکمیل یک کد بتوان آن را فوراً دید کرد و رقم بعدی را به حساب کد بعدی گذاشت. باید توجه داشت که می توان به جای کدبندی تک تک سمبل ها به کدبندی ترکیبات مثلاً دو حرفی یا سه حرفی و غیره پرداخت و با این کار خواهیم دید که بازدهی منبع کد شده بهتر خواهد بود. بین پارامترهای منبع کد شده و منبع اصلی رابطه ای وجود دارد. صدور پیغام متشکل از $N \rightarrow \infty$ سمبل توسط منبع اصلی را در نظر بگیرید. اطلاعات این پیغام عبارت است از:

$$I_N = NH(\text{bit})$$

تعداد ارقام باینری حاصل از کدبندی این پیغام عبارت است از :

$$N_b = \sum_{i=1}^{\mu} NP(a_i)n_i = N \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i)n_i = N \bar{n}$$

در رابطه فوق n_i طول کد حرف a_i ، $NP(a_i)$ تعداد سمبل های a_i و \bar{n} طول متوسط هر کد است.

در روابط زیر نیز H' ، r_b ، R' با H ، r_s و R محاسبه شده اند، بدین ترتیب که :

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i P(a_i) \left[\frac{\text{binit}}{\text{symbol}} \right]$$

طول متوسط هر کد

$$H' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{N_b} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_N}{\bar{n}N} = \frac{H}{\bar{n}} \left[\frac{\text{bit}}{\text{binit}} \right] \Rightarrow H' = \frac{H}{\bar{n}} \left[\frac{\text{bit}}{\text{binit}} \right]$$

$$r_b = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_b}{T_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \bar{n}}{T_N} = r_s \bar{n} \Rightarrow r_b = r_s \bar{n}$$

$$R' = r_b H' = r_s \bar{n} \frac{H}{\bar{n}} = r_s H = R \left[\frac{bit}{sec} \right]$$

یعنی $n_1 = n_2 = \dots = n_\mu = n$ فرض می‌شود. بدین ترتیب :

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{\mu} P(a_i) n_i = n$$

طول ثابت کد خواهد بود.

در این شرایط تعداد کدهای n رقمی، 2^n و بزرگتر یا مساوی μ می‌باشد، تا به هر یک از حروف الفبا کدی برسد یا به عبارت دیگر $n \geq \log_2 \mu$ باید باشد. کدبندی با طول ثابت می‌تواند باعث افزایش اضافات نیز بشود.

$$\left. \begin{array}{l} e' = H' = \frac{H}{\bar{n}} = \frac{H}{n} \\ e = \frac{H}{\log \mu} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \geq \log \mu \\ \longrightarrow \end{array} e' \leq e$$

یعنی بازدهی منبع کد شده، کوچکتر یا مساوی بازدهی منبع اصلی خواهد بود. موقعی بازدهی کمتر می‌گردد که حالت تساوی نداشته باشیم، یعنی تعداد کدهای موجود، 2^n ، بیش از تعداد کدهای لازم (μ) باشد، به عبارت دیگر از همه کدها استفاده نشود.

مثال: منبعی با $\mu = 6$ را در نظر بگیرید.

در این منبع با فرض $n \geq \log_2 6$ مقدار $n=3$ به دست می‌آید، یا به عبارتی حداقل مقدار n ، ۳ می‌باشد.

بنابراین تعداد کدها برابر است با $2^3 = 8$ ، اما ما فقط ۶ کد نیاز داریم که در جدول زیر مشاهده می‌شود.

a_i	کد		
a_1	۰	۰	۰
a_2	۰	۰	۱
a_3	۰	۱	۰
a_4	۰	۱	۱
a_5	۱	۰	۰
a_6	۱	۰	۱

از کدهای ۱۱۱ و ۱۱۰ استفاده نشده است. بدین

ترتیب:

$$\left. \begin{array}{l} e' = H' = \frac{H}{3} \\ e = \frac{H}{\log_2 6} \end{array} \right\} \Rightarrow e' = \frac{\log_2 6}{3} e \Rightarrow e' < e \quad e' = 0.862e$$

بدیهی است در این حالت $\rho' > \rho$ است.

در این مثال صفر موجود در رقم های دوم کدهای a_5 و a_6 را می توان زائد دانست (یا به عبارتی این صفرها عامل افزایش اضافات هستند) چرا که گیرنده می داند بعد از اولین رقم یک، حتماً صفر خواهد آمد.

برای کاهش اضافات توجه به دو نکته لازم است:

الف) کدهایی فراهم نشود که هیچگاه مورد استفاده قرار نخواهند گرفت چرا که این موضوع باعث افزایش طول متوسط کد و لذا کاهش بازدهی یعنی افزایش اضافات می‌گردد.

با کدبندی تک تک حروف الفباء در واقع برای هر ترکیب دلخواه، حروف کد فراهم شده است در حالی که بسیاری از ترکیبات حروف، بی معنی هستند یعنی احتمال صدور صفر دارند و لذا نیازی به کد ندارند. از این نظر بهتر است به جای کدبندی تک تک حروف، به ترکیبات با معنی کد اختصاص داده شود یعنی مثلاً به ترکیبات با معنی، متشکل از N سمبل به صورتی یکپارچه کد اختصاص داده شود. این کار در حد وقتی $N \rightarrow \infty$ میل کند بازدهی را به سمت صد درصد میل خواهد داد و بنابراین اضافات به سمت صفر میل می‌کند.

ب) وقتی می‌خواهیم به اعضای یک مجموعه کد باینری اختصاص دهیم به عضوهای محتمل تر کد کوتاه‌تر و به عضوهای کمیاب‌تر کد بلندتر نسبت دهیم که این هم طول متوسط کد را کاهش می‌دهد.

برای این منظور کدبندی‌های مختلفی پیشنهاد شده است. ۳ کدبندی معروف عبارتند از:

۱. کدبندی شنن Shannon

۲. کدبندی شنن - فانو Shannon-Fano

۳. کدبندی هافمن Haffman

که کدبندی هافمن نوع بهینه است یعنی به کمترین اضافات منجر می‌گردد.

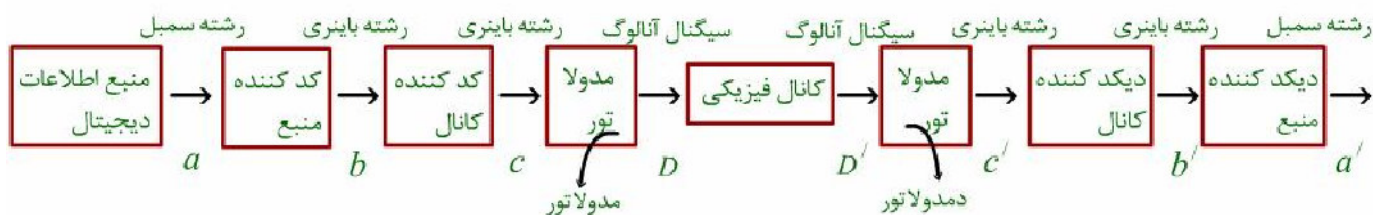
ظرفیت کانال
دیجیتال

طبق تعریف ظرفیت کانال C عبارت است از حداکثر اطلاعاتی که کانال مفروض می‌تواند در هر

ثانیه انتقال دهد. طبعاً واحد ظرفیت $\frac{bit}{sec}$ خواهد بود.

به همین ترتیب کانال دیجیتال طبق تعریف یک مدل ریاضی برای سیستمی است که ورودی و خروجی آن پیغام دیجیتال باشد (مثلاً یک رشته رقم) و وظیفه این کانال انتقال این پیغام دیجیتال (با این رشته ارقام) در نظر گرفته می‌شود.

به همین ترتیب کانال آنالوگ عبارتست از مدلی ریاضی برای سیستمی که ورودی و خروجی آن را پیغامی آنالوگ (که معمولاً سیگنالی پیوسته تدر حوزه زمان می‌باشد)، تعریف می‌گردد. وظیفه این کانال نیز انتقال چنین پیغام‌هایی در نظر گرفته می‌شود.



برای مثال در بلوک دیاگرام نشان داده شده بهتر است موارد بین مقاطع a و a' یا b و b' یا c و c' به عنوان

کانال دیجیتال بررسی شود، ولی بین دو مقطع D و D' بهتر است به عنوان کانال آنالوگ بررسی شود.

پارامترهای توصیف
کننده کانال دیجیتال

۱. الفبای کانال

الفبای کانال را ارقام 1 تا M در نظر می گیریم، به طوریکه:

$$X \in \{1, 2, \dots, M\}$$

$$Y \in \{1, 2, \dots, M\}$$



چنین کانالی را کانال M تائی (M' ary) گویند.

در کانال باینری معمولاً الفباء را $\{0, 1\}$ می گیرند.

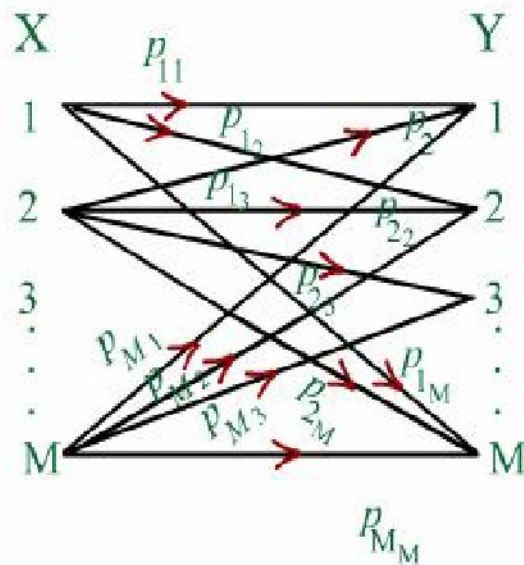
۲. تعداد ارقامی که در هر ثانیه توسط کانال انتقال داده می شود.

۳. ماتریس احتمال خطای انتقال کانال که عبارت است از:

$$P = [P_{ij}]_{M \times M} = \begin{bmatrix} p_{11} p_{12} \cdots p_{1M} \\ p_{21} p_{22} \cdots p_{2M} \\ \vdots \\ p_{M1} p_{M2} \cdots p_{MM} \end{bmatrix}$$

اعضای این ماتریس یا p_{ij} طبق تعریف عبارت است از احتمال تبدیل رقم i ام به رقم j ام در همگام انتقال به عبارتی

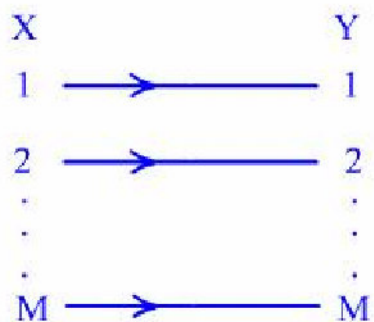
$P_{ij} = P\{Y = j | X = i\}$. این اطلاعات را می‌توان در یک نمودار نیز به شرح زیر نمایش داد.



$$r \left(\frac{\text{digit}}{\text{sec}} \right)$$

برای یک کانال بدون نویز (یا خطا) مابریس احتمال خطا و نمودار مربوط، به قرار زیر هستند:

$$(P) = \begin{pmatrix} 100\dots 0 \\ 010\dots 0 \\ \vdots \\ 000\dots 1 \end{pmatrix} = I$$

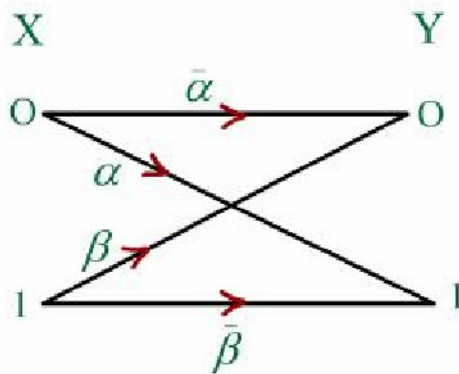


همانطور که مشاهده می‌شود، ماتریس احتمال خطا فقط روی قطر اصلی، مقدار احتمال ۱ و برای سایر محل‌ها که در

واقع احتمال خطا هستند، مقدار صفر را دارد. نمودار مربوط نیز کاملاً بدون خطاست. در یک کانال باینری ماتریس

احتمال خطا عبارت است از:

$$(P) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \alpha \\ \beta & \bar{\beta} \end{bmatrix}$$

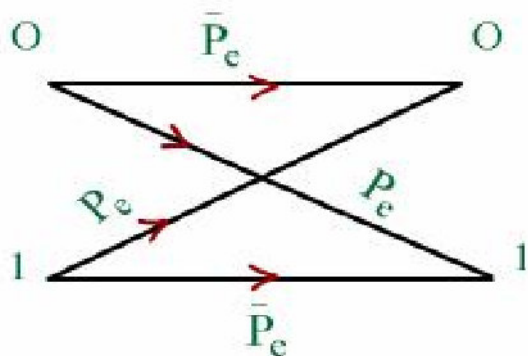


همانطور که در نمودار ملاحظه می‌گردد احتمال خروجی صفر از صفر با $\bar{\alpha}$ و احتمال خروجی صفر از ورودی ۱ با β نمایش داده شده و به همین ترتیب احتمال خروج ۱ از ورودی صفر α و احتمال خروجی ۱ از ورودی ۱، $\bar{\beta}$ می‌باشد.

در یک کانال باینری متقارن **Binary Symmetrical Channel (BSC)** احتمال خطا $\alpha = \beta = P_e$ فرض

می‌شود. بدین ترتیب ماتریس احتمال خطا به شکل:

$$(P) = \begin{bmatrix} P_e \bar{P}_e \\ P_e \bar{P}_e \end{bmatrix}$$



در خواهد آمد و نمودار مربوطه را نیز ذیلاً مشاهده می کنید. باید توجه داشت که کانال نیز می تواند مثل منبع با حافظه

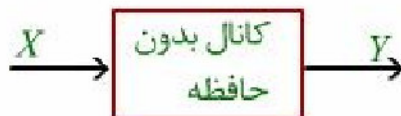
باشد یعنی ماتریس (P) به سابقه کانال (یا حالت قبل کانال) بستگی داشته باشد. مهمترین مثال، کانال های دارای

فیدینگ (Fading) است که برای آن می توان دو حالت در نظر گرفت (شرایط فیدینگ و شرایط غیر فیدینگ) بررسی

کانال های با حافظه مشابه بررسی منابع با حافظه است که ما وارد بحث آن نخواهیم شد.

آنالیزهای ارسالی -
دریافتی و انتقالی

با فرض این که ورودی کانال بدون حافظه باشد



می توان احتمال ارسال رقم i را عبارت از $P\{X = i\} = P_i^t$ تعریف کرد و بدین ترتیب بردار احتمال ارسال یا

$$P^t = (P_1^t, P_2^t, \dots, P_M^t)$$

ماتریس احتمال خطای کانال را نیز می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(P) = [P_{ij}]_{M \times M}; P\{Y = j | X = i\} = P_{ij}$$

احتمال هر پیشامد دیگری را می توان به کمک P^t و ماتریس احتمال خطای P تعیین کرد.

مثلاً:

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j | X = i) = P_i^t \cdot P_{ij}$$

و یا:

$$P\{y = j\} = \sum_{i=1}^M P(X = i)P(Y = j | X = i) = \sum_{i=1}^M P_i^t \cdot P_{ij}$$

که در واقع قضیه احتمال کلی است.

به همین ترتیب:

$$P\{X = i|Y = j\} = \frac{P(X = i)}{P(Y = j)} P(Y = j|X = i) = \frac{P_i^t P_{ij}}{\sum_{i=1}^M P_i^t P_{ij}}$$

احتمال خطای کانال (P_e) عبارتست از:

$$\begin{aligned} P_e &= P\{Y \neq X\} = 1 - P\{Y = X\} = 1 - \sum_{i=1}^M P(X = i) p(X = Y|X = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P(X = i) p(Y = i|X = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P_i^t P_{ii} \end{aligned}$$

حال اگر P^r بردار احتمال دریافت به صورت زیر باشد:

$$P^r = (P_1^r, P_2^r, \dots, P_M^r)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$P^r = P^t(P)$$

و اما آنتروپی ها به شکل زیر تعریف خواهند شد:

الف (آنتروپی ارسالی):

متوسط اطلاعات هر رقم ارسال $H(X)$

$$H(X) = EI(X) = \sum_{i=1}^M P(X=i) I(X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^M P(X=i) \log \frac{1}{P(X=i)}$$

ب (آنتروپی دریافتی):

متوسط اطلاعات هر رقم دریافت $H(Y)$

$$H(Y) = EI(Y) = \sum_{j=1}^M P(Y=j) I(Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^M P(Y=j) \log \frac{1}{P(Y=j)}$$

ج (آنتروپی توأم ارسال و دریافت):

از متوسط اطلاعاتی که در هر رقم ارسالی و چگونگی دریافت آن وجود دارد $H(X,Y)$

$$H(X,Y) = EI(X,Y) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) I(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) \log \frac{1}{P(X=i, Y=j)}$$

د) آنتروپی شرطی دریافتی:

متوسط اطلاعات هر رقم دریافتی در شرایطی که می‌دانیم هنگام ارسال چه رقمی ارسال شده است $H(Y|X)$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= EI(Y|X) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) I(Y=j|X=i) \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) \log \frac{1}{P(Y=j|X=i)} \end{aligned}$$

در شرایطی که ارقام ارسالی را می‌دانیم، اطلاعاتی که در ارقام دریافتی وجود دارد در واقع اطلاعاتی در مورد خطاهائی است که روی ارقام رخ داده است و لذا این آنتروپی را آنتروپی نویز هم می‌گویند.

هـ) آنتروپی شرطی ارسالی:

اطلاعات متوسط هر رقم ارسالی در شرایطی که بدانیم به صورت چه رقمی دریافت شده است. $H(X|Y)$

$$H(X|Y) = EI(X|Y) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) I(X=i|Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M P(X=i, Y=j) \log \frac{1}{P(X=i|Y=j)}$$

در شرایطی که ارقام دریافتی را می‌دانیم، اطلاعاتی که در ارقام ارسالی وجود دارد در واقع اطلاعاتی است که ارسال شده ولی دریافت نشده یا به اصطلاح گم شده است. لذا $H(X|Y)$ را آنتروپی گم شده نیز گویند.
و) آنتروپی مشترک بین ارسال و دریافت:

متوسط اطلاعاتی که بین هر رقم ارسالی و رقم دریافتی مشترک است. $H(X \leftrightarrow Y)$

$$H(X \leftrightarrow Y) = EI(X \leftrightarrow Y)$$

$$= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P(X=i, Y=j) I(X=i \leftrightarrow Y=j)$$

$$I(X \leftrightarrow Y) = I(X) + I(Y) - I(X, Y)$$

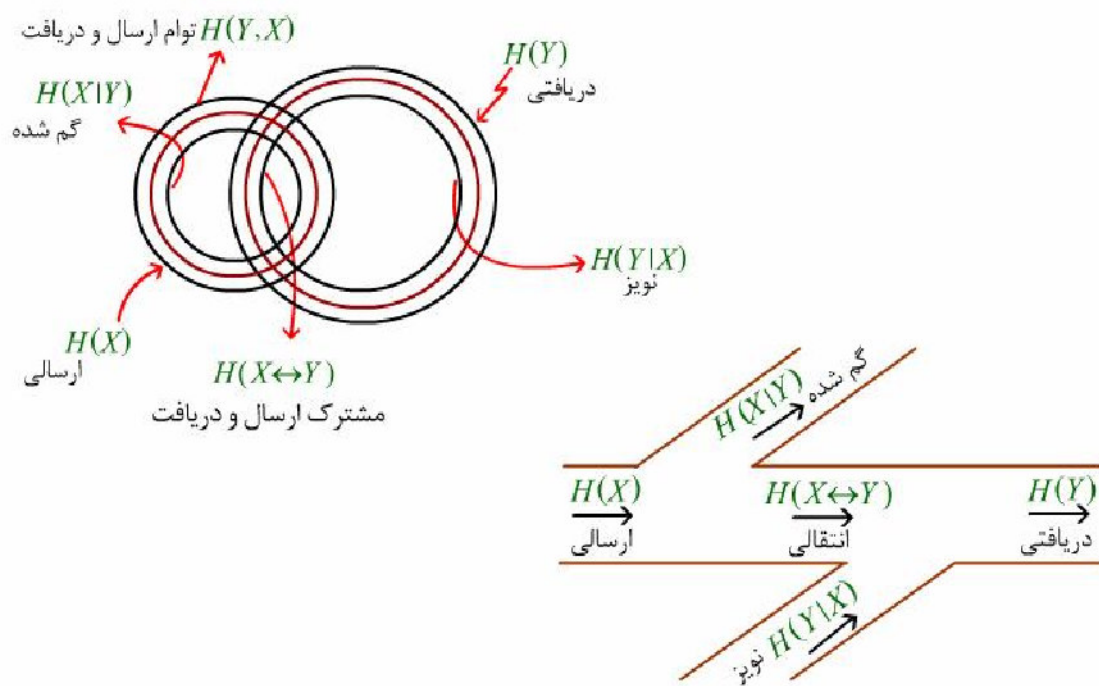
$$= I(Y) - I(Y|X) = I(X) - I(X|Y)$$

$$H(X \leftrightarrow Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

$$= H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y)$$

این عبارات با گرفتن امید ریاضی از عبارت ما قبل منتج شده‌اند.

$H(X \leftrightarrow Y)$ در واقع معرف متوسط اطلاعاتی است که هر رقم دریافتی در مورد رقم ارسالی دارد لذا این آنتروپی را آنتروپی انتقالی گوئیم (به عبارتی متوسط اطلاعاتی که به ازای هر رقم توسط کانال انتقال داده شده است). برای تجسم این آنتروپی‌ها و رابطه بین آن‌ها دو نمودار زیر پیشنهاد می‌گردد.

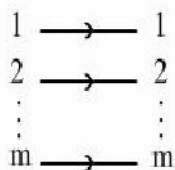


مثال :

کانال بدون نویز

ماتریس احتمال خطای کانال بدون نویز بصورت قطری و نمودار انتقال آن مشاهده می شود.
در این حالت داریم:

$$(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$



$$P^r = P^t(P) = P^t$$

بدین ترتیب $H(Y) = H(X)$ خواهد بود. از طرفی :

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= EI(Y|X) = \sum_{i=1}^M P(X=i)H(Y|X=i) \\ &= \sum_{i=1}^M P(X=i)0 = 0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب :

$$H(x, y) = H(x) + H(Y|X) = H(X)$$

$$H(X \leftrightarrow Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - 0 = H(X)$$

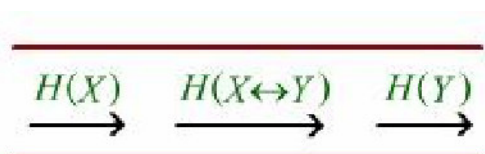
همچنین :

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = H(X) - H(X) = 0$$

بدین ترتیب :

$$H(X) = H(Y) = H(X, Y) = H(X \leftrightarrow Y)$$
$$H(X|Y) = H(Y|X) = 0$$

دیاگرام زیر به تفهیم موضوع کمک می کند.



سرعت انتقال اطلاعات
در کانال و ظرفیت
کانال

سرعت انتقال اطلاعات در کانال با D_t نشان داده شده و طبق تعریف عبارت است از مقدار اطلاعاتی که کانال در هر ثانیه انتقال می‌دهد. بدین ترتیب:

$$D_t = rH(X \leftrightarrow Y) \left(\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right)$$

D_t ، پارامتری است که هم به کانال بستگی دارد (به عبارتی به ماتریس احتمال خطای کانال آن یعنی این که کانال با چه کیفیتی ارقام را انتقال می‌دهد بستگی دارد) و هم به منبع (به عبارتی P^t یعنی این که چه مقدار اطلاعات در ورودی کانال قرار داده شود).

ظرفیت کانال که با C نمایش داده می‌شود، طبق تعریف عبارتست از حداکثر اطلاعاتی که یک کانال مفروض (با r و p) مفروض) می‌تواند در هر ثانیه انتقال دهد. طبیعی است که برای این کانال مقدار r و p (ماتریس احتمال خطا) معلوم باشد.

مثال

کانال بدون نویز

برای کانال بدون نویز ماتریس احتمال خطا یک ماتریس I خواهد بود،

$$(P) = I$$

$$H(X \leftrightarrow Y) = H(X)$$

در این شرایط:

$$D_t = rH(X \leftrightarrow Y) = rH(X)$$

که برای ماکزیمم شدن آن $H(X)$ باید ماکزیمم شود. بدین ترتیب:

$$\Rightarrow \begin{cases} P^t = \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M} \right) \\ C = rH_{\max}(X) = r \log M \left(\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right) \end{cases}$$

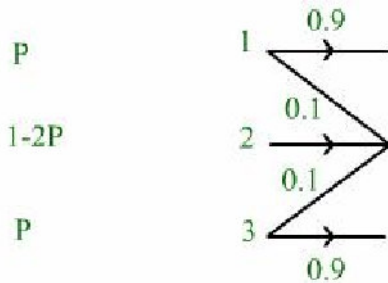
برای کانال بدون نویز مناسب‌ترین منبع، منبع متساوی الاحتمال است یعنی منبعی که بیشترین اطلاعات را در ورودی قرار دهد و ظرفیت آن:

$$C = r \log M \left(\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right)$$

خواهد بود.

نکات

۱. اگر کانال برای انتقال بعضی از ارقام تقارن داشته باشد (یعنی D_f تابعی متقارن از احتمال ارسال آن ارقام باشد) می‌توان نشان داد که مناسب‌ترین منبع برای این کانال، منبعی است که ارقام را با احتمالات مساوی ارسال کند.



۲. احتمال خطاهای کوچک که در عمل مطرح می‌باشند (مثل 10^{-3} و 10^{-4} و...) تأثیر چندانی در ظرفیت کانال ندارند و می‌توان ظرفیت این کانال‌ها را از رابطه تقریبی:

$$C \approx r \log M$$

محاسبه کرد.

از طرفی چنان که قبلاً هم اشاره شده بود از رابطه شنن هارتلی نیز برای محاسبه ظرفیت کانال به صورت زیر می‌توان استفاده کرد.

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \left(\frac{\text{bit}}{\text{sec}} \right)$$

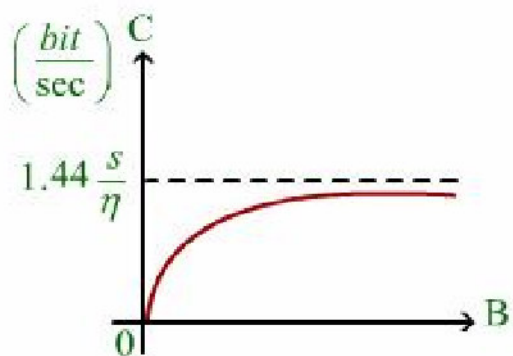
با در نظر گرفتن توان نویز به صورت $P_N = \frac{\eta}{2} 2B = \eta B$

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{\eta B} \right)$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = \lim_{B \rightarrow \infty} B \log \left(1 + \frac{S}{\eta B} \right) = \lim_{B \rightarrow \infty} B \log(e^{\frac{S}{\eta B}})$$

$$= \lim_{B \rightarrow \infty} B \frac{S}{\eta B} \log e = \log_2 e \frac{S}{\eta} = 1.44 \frac{S}{\eta}$$

خواهد بود.



مثال :
کانال تلفنی

منظور همان شبکه رایج تلفنی برای مکالمات تلفنی است. عرض باند یک کانال تلفنی با

در نظر گرفتن محدودیت کانال $B \approx 3KHz$ بوده و $\frac{S}{N}$ ام استاندارد یک شبکه تلفنی، تقریباً 30dB در نظر گرفته

می شود. با این دو محدودیت:

$$C = 3000 \log_2^{(1+1000)} = 29900 \frac{bit}{sec} \approx 30 \frac{kb}{sec}$$

پس در چنین کانالی نمی توان بیش از 30 هزار بیت اطلاعات را در هر ثانیه انتقال داد.

تخمین سرعت انتقال اطلاعات به هنگام مکالمه تلفنی :

$$D_t = r_s H(X \leftrightarrow Y) = r_s [H(X) - H(X|Y)]$$

$$r_s = 2 \left(\frac{\text{کلمه}}{\text{ثانیه}} \right) \times 5 \left(\frac{\text{حرف}}{\text{کلمه}} \right) \approx 10 \left(\frac{\text{Letter}}{\text{sec}} \right)$$

با تخمین آقای شنن $H(X) \approx 1 \left(\frac{bit}{Letter} \right)$ محاسبه شد.

اگر از اطلاعات گم شده نیز صرف نظر، کنیم یعنی $H(X|Y) \approx 0$ ، آنگاه :

$$D_t = 10 \times 1 = 10 \left(\frac{bit}{sec} \right)$$

در کانالی که می‌تواند تا 30 هزار بیت در ثانیه را انتقال دهد D_t ، $10 \frac{bit}{sec}$ به دست آمده است.

علل این تفاوت فاحش عبارتند از :

۱. پایین بودن بازدهی زبان مکالمه

البته این دلیل اصلی نیست ، چرا که اگر از زبان مکالمه‌ای با $\mu = 32$ حرف متساوی احتمال و مستقل از هم نیز استفاده شود .

$$H(X) = \log 32 = 5 \Rightarrow D_t = 50 \frac{bit}{sec}$$

و هنوز تفاوت زیاد است.

۲. عدم احتساب مبادله اطلاعات جنبی

در هنگام مکالمه اطلاعاتی مثل تشخیص هویت مخاطب و تشخیص شرایط جسمی و روحی او نیز مبادله می‌گردد که به حساب نیامده‌اند . البته این اطلاعات جنبی هم تأثیر بسیار ناچیزی دارد . چرا که اگر از روی صدای مخاطب بتوان هویت یک نفر از بین هزار نفر را تشخیص داد اطلاعات مربوط $\log^{1000} = 10bit$ بوده و اگر از روی لحن گفتارش بتوان شرایط جسمی و روحی مربوطه را از بین هزار شرایط مختلف جسمی و روحی تشخیص داد اطلاعات آن هم ده بیت است و اگر طول مکالمه یک دقیقه هم باشد باید به D_t مقدار $\frac{10+10}{60} = \frac{1}{3}$ بیت در ثانیه اضافه کنیم.

۳. پایین بودن بازدهی سیگنال مکالمه

سیگنال مکالمه به هیچ وجه شرایط ماکزیمم کردن سرعت انتقال اطلاعات در کانال را ندارد (شرایطی مثل گوسی بودن و نمونه‌هایی به صورت 2B مستقل داشتن)

مبادله بین $\frac{S}{N}$ و B و زمان
مخابره T در سیستم ایده آل

انتقال I بیت اطلاعات را در یک سیستم مخابراتی ایده آل در نظر می گیریم .

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \frac{\text{bit}}{\text{sec}} \Rightarrow T = \frac{I}{C} = \frac{I}{B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right)} \Rightarrow I = TB \log \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

قابل محاسبه است .

ملاحظه می شود که $T, B, \frac{S}{N}$ بر اساس رابطه فوق به هم مربوط می شوند .

الف (مبادله B با زمان مخابره T :

ارسال I بیت اطلاعات را در یک سیستم با $\frac{S}{N}$ مفروض در نظر می گیریم .

$$B = \frac{\frac{I}{\log \left(1 + \frac{S}{N} \right)}}{T} \quad \text{عرض باند لازم}$$

که از رابطه قبل نتیجه شده است .

پس در یک سیستم ایده آل، یک معادله مستقیم بین عکس زمان مخابره و عرض باند کانال می تواند وجود داشته باشد .
چنین مبادله ای در عمل هم مقدور است و به کار هم می رود کافی است . سیگنال را ضبط کنیم و با سرعتی متفاوت پخش کنیم . طبق خاصیت تغییر مقیاس در تبدیل فوریه این واقعیت را ملاحظه خواهیم کرد.

ب) مبادله B با $\frac{S}{N}$:

مجدداً ارسال I بیت اطلاعات را در زمان مفروض T در نظر می گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{I}{T} = B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \Rightarrow \frac{S}{N} = 2^{\frac{(I/T)}{B}} - 1 \quad \text{لازم}$$

پس در یک سیستم ایده آل می توان یک مبادله نمایی بین عرض باند کانال و $\frac{S}{N}$ صورت داد. فرض کنیم

$\frac{I}{T} = 29900$ باشد بدین ترتیب در جدول زیر مبادله عرض باند و $\frac{S}{N}$ طبق رابطه داده شده ملاحظه می شود.

$B(KHz)$	3	6	9
$\frac{S}{N}$ لازم	$1000 \equiv 30^{dB}$	$30/6 \equiv 14/9^{dB}$	10^{dB}

در واقع یک مبادله خطی بین پهنای باند B و $\frac{S}{N}$ بر حسب dB می توان داشت. مبادله در جهت عکس نیز مقدور است.

در جدول زیر یک نمونه آمده است. همان طور که مشاهده می شود اگر:

$B(KHz)$	3	1/5	0/75
$\frac{S}{N}$	$1000 \equiv 30^{dB}$	$1/001 \times 10^3 \equiv 60^{dB}$	120^{dB}

البته مبادله نمایی در جهت عکس مبادله جالبی نیست، چون $\frac{S}{N}$ لازم به سرعت افزایش می یابد.

مبادله بین $\frac{S}{N}$ و B در عمل نیز مقدور است و به کار هم برده می شود. مثلاً با FM و PM که مبادله از نوع مجذوری می توان داشت، که البته فقط در جهت افزایش عرض باند مقدور است در PCM که مبادله از نوع نمایی است در هر دو جهت مبادله مقدور است .

ج) مبادله $\frac{S}{N}$ با زمان مخابره T :

باز هم ارسال I بیت اطلاعات را در عرض باند مفروض B در نظر می گیریم و مجدداً می توان نوشت :

$$\frac{I}{T} = BT \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \Rightarrow \frac{S}{N} = 2^{\frac{(I/B)}{T}} - 1$$

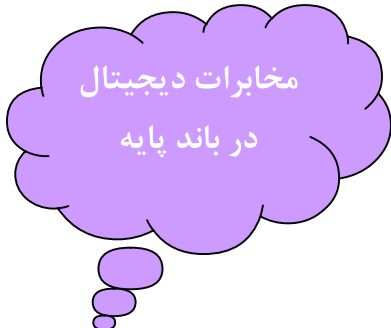
بدین ترتیب مبادله T و $\frac{S}{N}$ دقیقاً مثل مبادله $\frac{S}{N}$ و B است . مبادله بین $\frac{S}{N}$ و زمان مخابره T در عمل هم مقدور است و به کار برده می شود.

مثلاً در کدبندی با قابلیت تشخیص خطا و یا قابلیت تصحیح خطا که در ازای افزایش زمان مخابره (درخواست ارسال

مجدد یا ارسال بیت های اضافه شده) امکان مخابره با $\frac{S}{N}$ های پائین تر را نیز فراهم می کند . مبادله بین T و $\frac{S}{N}$ به

صورت غیر مستقیم یعنی ترکیبی از الف و ب نیز مقدور است و به کار برده می شود، به عبارتی پخش آهسته سیگنال

(برای کاهش B) و استفاده از مدولاسیون های مقاوم در مقابل نویز (برای کاهش $\frac{S}{N}$ لازم در ازای افزایش B)



مخابرات دیجیتال
در باند پایه

در حالت کلی مخابره در باند پایه یعنی مخابره به صورت یک سیگنال پائین گذر یا P.L. روش کلی مخابره دیجیتال (مخابره یک رشته رقم) تبدیل ارقام به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس متناظر است.

اگر از پالس هایی استفاده شود که طیف متمرکز در حول مبدأ دارند (به اصطلاح پالس DC) سیگنال حاصل نیز طیفی در حول مبدأ خواهد داشت و سیگنال باند پایه بوجود می آید. که می تواند در کانال های باند پایه مثل زوج سیم یا کابل هم محور انتقال داده شود. رایج ترین پالس DC، پالس چهارگوش است. تناظر بین پالس ها و ارقام را می توان به صورت های مختلفی در نظر گرفت.

اگر دامنه پالس ها متناظر با ارقام قرار داده شود - حاصل را PAM گویند. اگر عرض پالس ها متناظر با ارقام قرار داده شود حاصل را PDM (PWM) می گویند. اگر محل پالس ها متناظر با ارقام قرار داده شود، حاصل را PPM گویند.

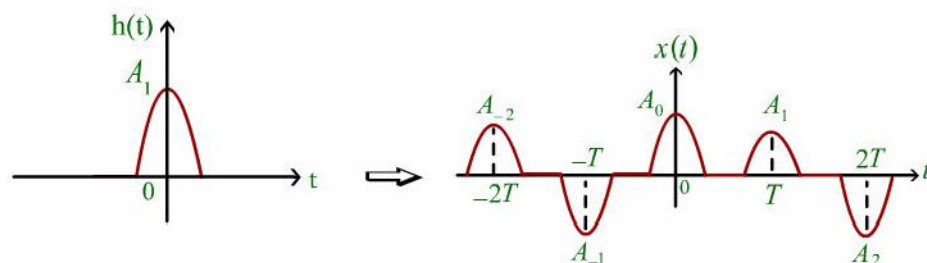
Pulse { *Amplitude*
Duration (Width) *Modulation*
Position

مناسب ترین و رایج ترین روش، روش PAM می باشد.

معرفی سیگنال PAM
در حوزه زمان

سیگنال PAM، سیگنالی متشکل از یک رشته پالس مشابه $h(t)$ به فواصل مساوی از یکدیگر (مثل T) است، با دامنه هایی که می توانند متفاوت باشند. نمونه ای از این رشته پالس یا سیگنال PAM در شکل ملاحظه می شود. اگر سیگنال PAM حاصل را $x(t)$ بنامیم می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = A_0 h(t) + A_1 h(t - T) + A_{-1} h(t + T) + A_2 h(t - 2T) + A_{-2} h(t + 2T) + \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - KT)$$



عبارت $x(t)$ می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - KT) * h(t) \\ = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - K) \right] * h(t) = d(t) * h(t)$$

که در آن $d(t)$ عبارت است از:

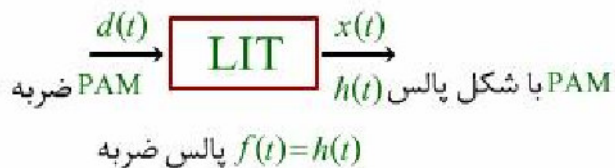
$$d(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -A_k \delta(t - KT)$$

و PAM ضربه ای خوانده می شود. حال، حالت کلی یعنی وقتی که دامنه پالس ها متغیر های تصادفی هستند را در نظر می گیریم. رشته متغیر های تصادفی $\{A_k\}$ را ساکن (Stationary) فرض خواهیم کرد به این معنی که:

$$(۱) \quad E[A_k] = \bar{a} \quad \text{مستقل از } K$$

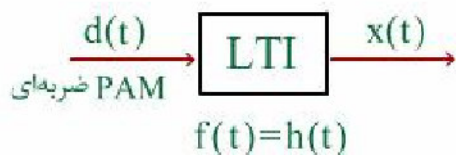
$$(۲) \quad E[A_{k+i} A_k] = R_i \quad \text{مستقل از } K$$

اگر چه در این مبحث با سیگنال PAM ای که دامنه هایش گسسته اندازه است (PAM دیجیتال) سر و کار خواهیم داشت ولی در تجزیه و تحلیل سیگنال PAM از گسسته بودن دامنه ها استفاده ای نخواهیم کرد و لذا نتایج برای PAM آنالوگ (با دامنه های پیوسته) نیز صادق می باشد.



قدرت سیگنال و طیف قدرت سیگنال
PAM

با توجه به رابطه طیف قدرت در ورودی و خروجی سیستم LTI:



$$G_x(f) = G_d(f)|F|^2 \Rightarrow G_x(f) = G_d(f)|H|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_d(f)|H|^2 df$$

بنابراین کافی است طیف قدرت PAM ضربی را پیدا کنیم تا همه چیز معلوم باشد. طبق تعریف:

$$d(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - KT)$$

و بنابراین:

$$G_d(f) = F \langle E(d(t+\tau)d(t)) \rangle$$

عبارت $E[d(t+\tau)d(t)]$ همان تابع خود بستگی $R_d(t+\tau, t)$ می باشد.

$$R_d(t+\tau, t) = E \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t+\tau-kT) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l \delta(t-lT) \right] =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E[A_k A_l] \delta(t+\tau-kT) \delta(t-lT) = \quad k-l=i$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_i \delta(\tau-iT) \delta(t-lT) =$$

$$\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i \delta(\tau-iT) \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(t-lT) \right]$$

$$\langle R_d(t+\tau, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_d(t+\tau, t) dt =$$

$$\frac{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} R_i \delta(\tau-iT)}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(t-lT) dt$$

$$G_d(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} \delta(\tau-iT)$$

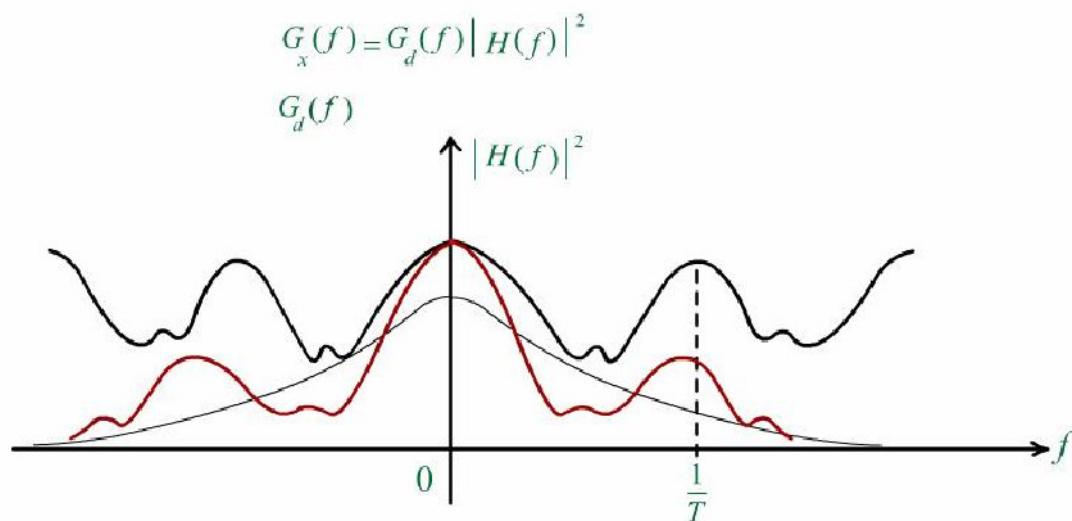
$$G_d(f) = F \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} \delta(\tau - iT) \right\}$$

$$\Rightarrow G_d(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} e^{-j2\pi f iT}$$

در حالت کلی طیف PAM ضربه ای تابعی پریودیک با پریود $f = \frac{1}{T}$ است.

و بدین ترتیب $G_x = G_d(f) \cdot |H(f)|^2$ که از شکل پالس ناشی می شود بدست می آید. در شکل یک

نونه یا یک مثال را مشاهده می کنید.





منظور از نا همبسته بودن PAM یا دامنه های PAM این است که:

$$E[A_k A_l] = E[A_k]E[A_l]$$

$$\forall l \neq k$$

$$R_i = E[A_{k+i} A_k] = \begin{cases} E[A_{k+i}]E[A_k] = \bar{a}^2, i \neq 0 \\ E[A_k^2] = \overline{a^2}, i = 0 \end{cases}$$

بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} G_d(f) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} e^{-j2\pi f iT} = \frac{R_0}{T} e^0 + \sum_{\substack{i=-\infty \\ \neq 0}}^{+\infty} \frac{R_i}{T} e^{-j2\pi f iT} \\ &= \frac{\overline{a^2}}{T} + \sum_{\substack{i \neq 0 \\ i=-\infty}}^{\infty} \frac{\bar{a}^2}{T} e^{-j2\pi f iT} \end{aligned}$$

بدین ترتیب:

$$G_d(f) = \frac{\overline{a^2}}{T} + \left(\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \frac{\overline{a^2}}{T} e^{-j2\pi fiT} \right) - \frac{\overline{a^2}}{T} e^0$$

$$= \frac{\overline{a^2} - \overline{a^2}}{T} + \frac{\overline{a^2}}{T} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{-j2\pi fiT}$$

از طرفی:

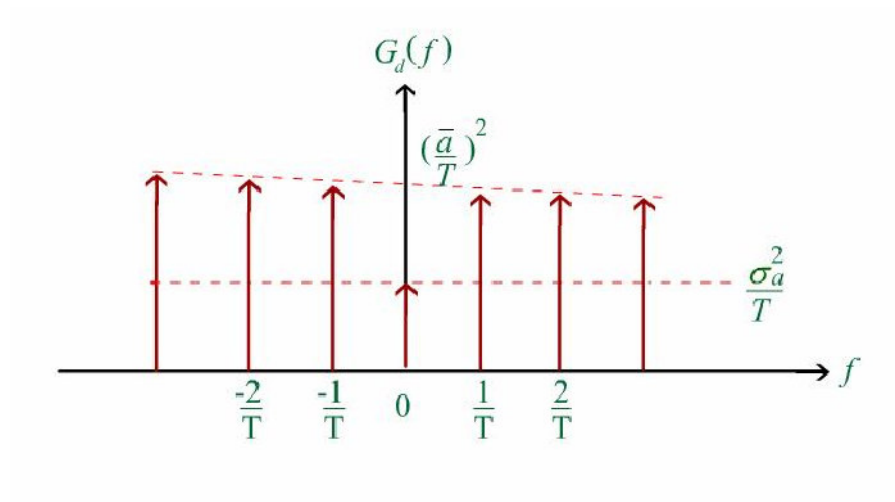
$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{-j2\pi fiT} = F \left[F^{-1} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fiT} \right\} \right] = F \left[\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \delta(t - iT) \right]$$

$$= F \{ rep_T [\delta(t)] \} = \frac{1}{T} rep_{\frac{1}{T}} [\delta(f)]$$

بنابراین:

$$\Rightarrow G_d(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\overline{a^2}}{T^2} rep_{\frac{1}{T}} [\delta(f)]$$

طیف $G_d(f)$ حاصل را در شکل مشاهده می کنید .



تداخل بین پالس ها
و حداقل عرض isi
باند لازم برای

طبق تعریف سیگنال PAM

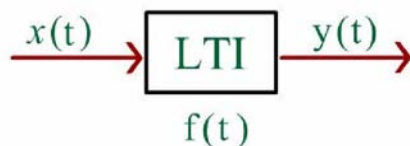
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - TK)$$

عبور این سیگنال را از یک سیستم LTI مثل کانال ، بررسی می کنیم . در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * f(t) \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - KT) \right] * f(t) \\ &= [d(t) * h(t)] * f(t) = d(t) * [h(t) * f(t)] \end{aligned}$$

بدین ترتیب نهایتاً:

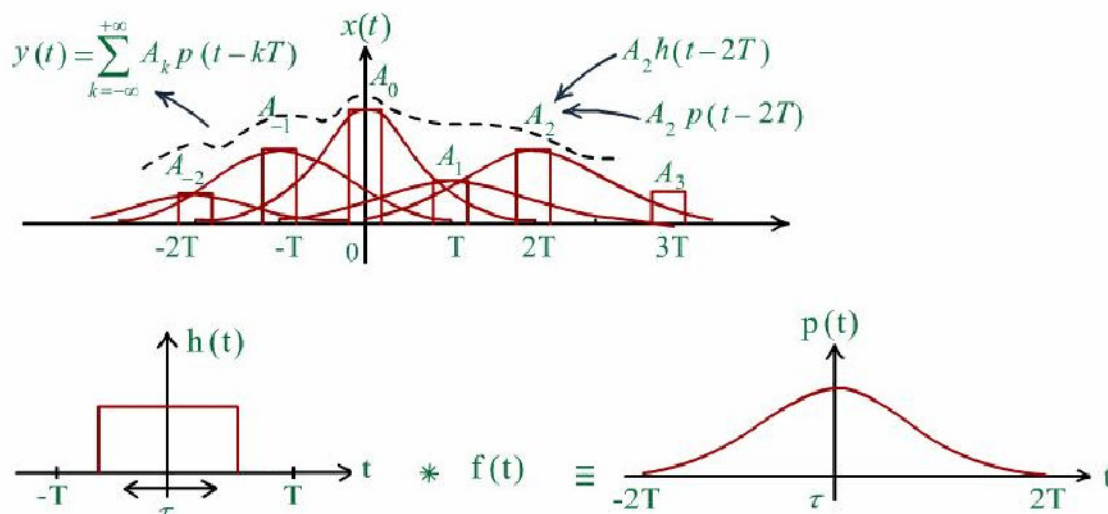
$$y(t) = d(t) * p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - KT)$$



ملاحظه می گردد که خروجی نیز یک سیگنال PAM خواهد بود، با همان دامنه ها ولی با شکل پالسی متفاوت.

$$p(t) = h(t) * f(t)$$

شکل پالسی که حالا:

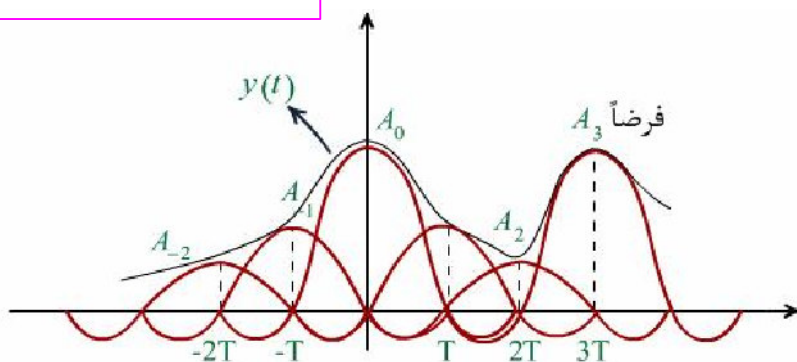


کانولوشن باعث گسترش تابع می گردد و لذا ممکن است پالس هایی که قبلاً با هم تداخل نداشتند حالا با هم تداخل پیدا کنند. در شکل که نمونه فرضی را مشاهده می کنید. همانطور که مشاهده می شود پالس مربعی $h(t)$ بعد از کانولوشن با $f(t)$ شبیه یک پالس مثلثی با پهنای زیاد شده است، که می تواند باعث تداخل بین پالس ها شود. در اوایل پیدایش فن تلگراف همیشه سعی می شد که برای عبور سیگنال تلگرافی عرض باند زیادی وجود داشته باشد، تا پالس ها تغییر شکل عمده ای پیدا نکنند، تا این که آقای نایکوئیست به این نکته توجه کرد که حفظ شکل پالس ها در سیگنال PAM ضروری نیست، بلکه کافی است اطلاعات موجود در سیگنال (دامنه پالس ها) حفظ گردد. برای تشخیص دامنه پالس کافی است مقدار پالس را در یک لحظه اندازه گیری کنیم که این لحظه معمولاً وسط پالس است.

پس کافی است سایر پالس ها در آن لحظه (مثلاً در وسط پالس) با آن تداخلی نداشته باشند و در واقع اجازه دهند تا دامنه آن پالس را بسنجیم . وسط هر پالس در واقع منطبق است با لحظات KT سایر پالس ها پس کافی است:

$$p(KT) = 0; \forall K \neq 0$$

$$p(0) \neq 0$$

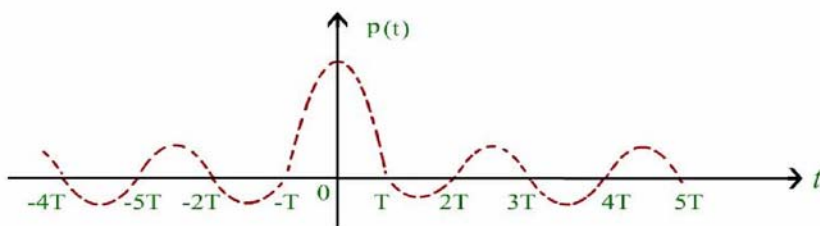


مطابق شکل در این صورت با نمونه برداری از $y(t)$ در لحظات KT می توان دامنه ها را آشکار کرد . شرط مربوط را

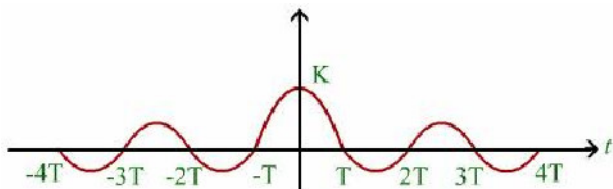
شرط نایکوئیست می گویند . تابع sinc یکی از توابعی است که دارای شرط نایکوئیست می باشد. خواهیم دید حداقل

عرض باند لازم برای ارضاء شرط نایکوئیست $B_N = B = \frac{1}{2T}$ که عرض باند نایکوئیست B_N نامیده می شود. برای

اینکه ببینیم برای ارضاء شرط نایکوئیست چه عرض باندی لازم است شرط را به حوزه ی فرکانس می بریم.

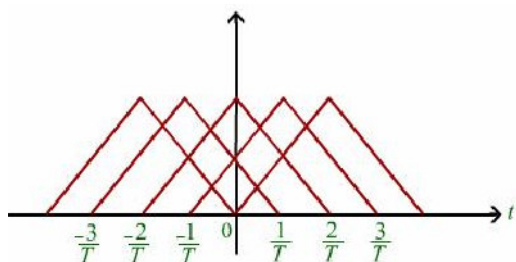


اگر شکل پالس‌های زمانی به شکل نشان داده شده باشد.



شرط نایکوئیست در حوزه زمان به صورت $comb_T[p(t)] = K\delta(t)$ قابل نوشتن است، یعنی با نمونه برداری زمانی با پریود T همواره عدد K حاصل می‌شود. به عبارتی سایر پالس‌ها روی پالس لحظه حاضر اثر نمی‌کنند. با تبدیل فوریه گرفتن از رابطه زمانی فوق شرط در حوزه فرکانس بصورت

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p\left(f - \frac{k}{T}\right) = KT$ بدست می‌آید و بدین ترتیب $\text{Re } p_{\frac{1}{T}}[p(f)] = kT$ و یا $\frac{1}{T} \text{Re } p_{\frac{1}{T}}[p(f)] = k$ خواهد بود، یعنی مستقل از فرکانس مقدار ثابت KT را داریم. به عنوان مثال شکل زیر را در حوزه فرکانس در نظر بگیرید.



چون $\text{Re } p_{\frac{1}{T}}[p(f)]$ پریودیک است کافی است در یک پریود مثلاً از $-\frac{1}{2T}$ تا $\frac{1}{2T}$ شرط مزبور ارضا شود و چون

$\text{Re } p_{\frac{1}{T}}[p(f)]$ پریودیک می‌گردد (برای $p(t)$ حقیقی) لذا کافی است در نیم پریود $f \in \left[0, \frac{1}{2T}\right]$ شرط ارضاء شود.

با توجه به شکل شرط مزبور را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود.

$$\sum_i p_i(f) = KT, \forall f \in \left[0, \frac{1}{2T}\right]$$

در این رابطه $p_i(f)$ ها توابعی هستند که از تازندهای متوالی تابع $p(f > 0)$ در حول دو محور $f=0$ و

$f = \frac{1}{2T}$ حاصل می گردند. فرضاً در مثال فوق داریم :

$$\sum_{i=0}^3 p_i(f) = \text{مقدار ثابت } 2 \equiv KT$$

پس شرط ارضاء می گردد. بدین ترتیب:

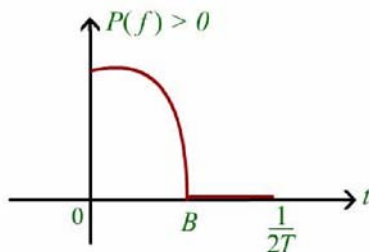
$$K = p(0) = \frac{2}{T}$$

مثال ۱

شکل پالسی با $B < \frac{1}{2T}$. همانطور که ملاحظه می شود شکل پالس در فاصله B تا $\frac{1}{2T}$ صفر

است. لذا شرط ناپیکوئیست با $B < \frac{1}{2T}$ ارضاء نخواهد شد چرا که $\sum_i p_i(f) = p_0(f) = p(f)$ خواهد بود و

تابع فرکانس است.



مثال ۲

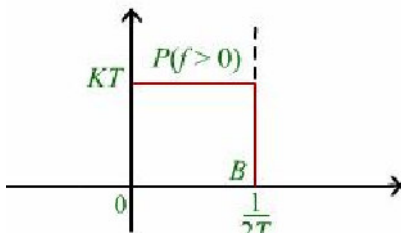
$$B = \frac{1}{2T} \text{ شکل پالس با}$$

باز هم فقط یک قطعه خواهیم داشت چون $B > \frac{1}{2T}$ نیست، یعنی:

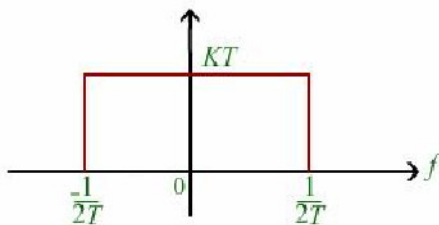
$$\sum_i p_i(f) = p_0(f) = p(f)$$

بدین ترتیب، چون $p_0(f)$ در کل فاصله $\left[0, \frac{1}{2T}\right]$ تعریف شده کافی است $p(f > 0)$ مقدار ثابتی

باشد. که در شکل ملاحظه می شود.



با اضافه کردن قرینه آن شکل مربعی نشان داده شده را خواهیم داشت.



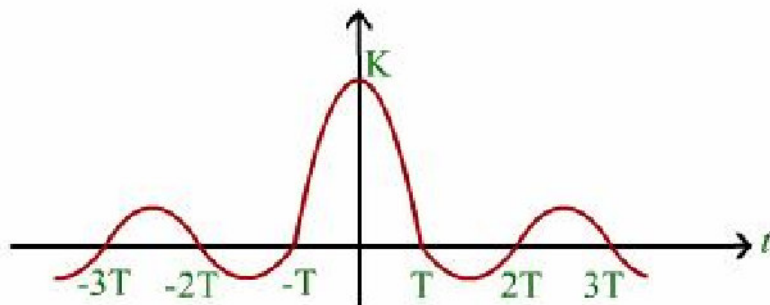
بدین ترتیب:

$$p(f) = KTrect\left[\frac{f}{\frac{1}{T}}\right] = KTrect(fT)$$

خواهد بود که منجر می‌شود به:

$$p(t)K \sin c\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$p(KT) = K \sin c(K) = \begin{cases} 0, \forall K \neq 0 \\ K, K = 0 \end{cases}$$



پس حداقل عرض باند لازم برای ارضاء شدن شرط نایکوئیست نصف سرعت پالسها یا $\frac{r}{2}$ که باند نایکوئیست است

$$B_N = \frac{1}{2T} = \frac{r}{2}$$

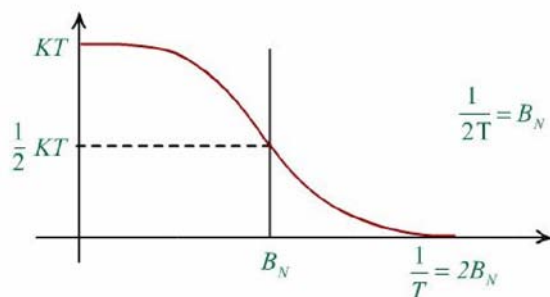
می‌باشد.

با این عرض باند مسئله فقط یک جواب دارد آن هم جوابی که از نظر علمی مطلوب نیست چرا که به دلیل وجود جهش در $p(f)$ تولید آن مشکل است هر چه شکل پالس در حوزه فرکانس نرم تر باشد تولید آن آسان تر خواهد بود. دلیل دیگر اینکه این شکل پالس در حوالی لحظات KT (به خصوص حوالی $\pm T$) دامنه زیادی دارد. در عمل به دلیل خطای زمانی (جیتر Jitter) ممکن است نمونه برداری در حوالی وسط پالس صورت گیرد، و حوالی وسط یک پالس منطبق است با حوالی لحظات KT سایر پالس ها و لذا از نظر عملی لازم است شکل پالس در حوالی لحظات kT نیز کوچک باشد.

شکل پالس با پهنای باند.

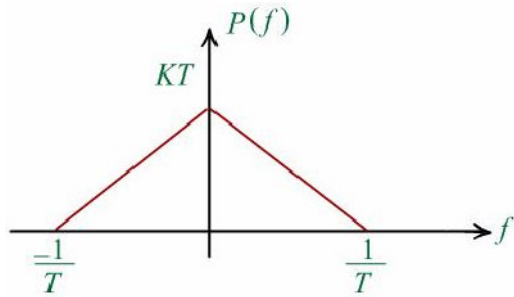
$$\frac{1}{2T} \leq B \leq \frac{1}{T} \quad B_N \leq B \leq 2B_N$$

در این حالت \sum_i شامل دو جمله خواهد بود.



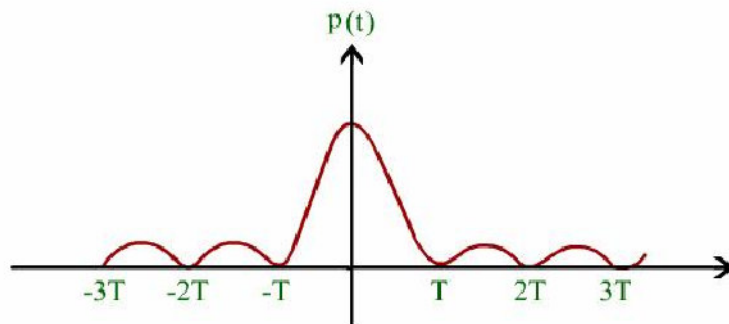
و با توجه به شکل دیده می شود که $p(f > 0)$ باید حول محور $f = \frac{1}{2T}$ متقارن فرد داشته باشد.

مثلاً تقارن فرد خطی چنانچه در شکل ملاحظه می گردد . برای این حالت:

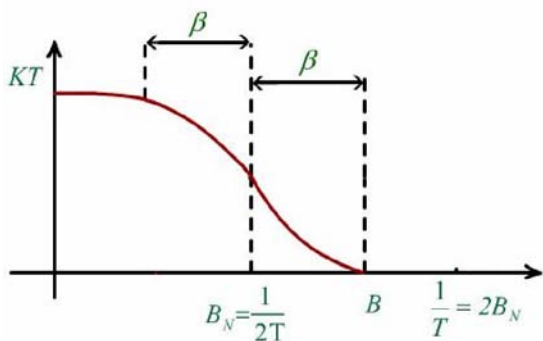


$$p(f) = KT \Lambda\left(\frac{f}{\frac{1}{T}}\right) = KT \Lambda(fT)$$

$$p(t) = K \sin^2\left(\frac{t}{T}\right)$$



البته تولید این شکل پالس نیز در عمل چندان ساده نیست. $p(f)$ تابع نرمی نیست ضمناً عرض باند نسبتاً زیادی نیز می‌طلبد. $B = 2B_N$ در عمل غالباً از تقارن فرد کسینوسی استفاده می‌شود.
(شکل پالس‌های Raised Cosine)



$$p(f) = \begin{cases} KT, & |f| \leq B_N - \beta \\ \frac{KT}{2} + \frac{KT}{2} \cos \frac{2\pi}{4\beta} (|f| - B_N + \beta), & B_N - \beta \leq |f| \leq B_N + \beta \\ 0, & |f| \geq B_N + \beta = B \end{cases}$$

می توان نشان داد که:

$$p(t) = \frac{\frac{K}{T} \cos(2\pi\beta t)}{1 - (4\beta t)^2} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

عرض باند این شکل پالس می تواند بین B_N تا $2B_N$ اختیار شود.

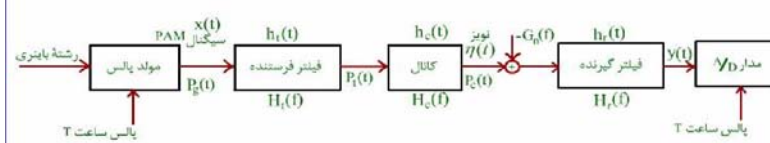
$B = B_N \Rightarrow$ شکل پالس چهارگوش

$B = 2B_N \Rightarrow$ شکل پالس کسینوسی صد در صد

تجزیه و تحلیل
سیستم PAM

معرفی اجزاء سیستم:

در شکل بلوک دیاگرام ساده این سیستم مشاهده می شود.



الف (ورودی سیستم را یک رشته باینری به سرعت $r_b \left(\frac{bit}{sec} \right)$ در نظر می گیریم. ارقامی که می تواند از کد بندی

منبع دیجیتال و یا A/D منبع آنالوگ حاصل شده باشند.

ب (مولد پالس که حکم مدولاتور PAM را دارد با هر پالس ساعت (هر T ثانیه یکبار) پالسی به شکل $p_g(t)$ و با

دامنه ای متناظر با ارقام باینری آن لحظه تولید می کند. بدین ترتیب:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k P_g(t - KT)$$

در سیستم PAM باینری به ازای هر رقم یک پالس تولید می شود. پالسی با یکی از دو دامنه مفروض، دامنه هایی

معمولاً به فرم $A_k \in \{+a, -a\}$ با قراردادی مطابق جدول زیر:

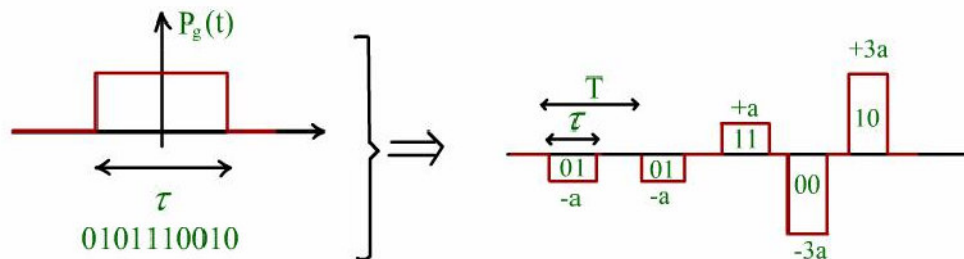
رقم k ام	A_k
0	-a
1	+a

در PAM باینری سرعت پالس ها $r = \frac{1}{T} = r_b$ خواهد بود.

در سیستم PAM چهارتایی (Quarternary) به ازای هر دو رقم یک پالس ارسال می‌شود، پالسی با یکی از $2^2 = 4$ دامنه مفروض است. دامنه هایی که معمولاً به شکل $A_k \in \{3a, a, -a, -3a\}$ و با قراردادی مطابق جدول زیر:

دورقم k ام	A_k
0 0	-3a
0 1	-a
1 1	+a
1 0	+3a

به عنوان مثال با استفاده از مولد پالس چهار گوش یک کد تولید شده را در شکل ملاحظه می کنید.



در این حالت سرعت پالس ها $r = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} r_b$ خواهد بود.

در شکل ملاحظه شده اگر $\tau < T$ باشد سیگنال PAM را RZ می‌گویند.

و اگر $\tau = T$ باشد سیگنال PAM را NRZ نامند.

در PAM M تایی (M-ary) به ازای هر $\lambda = \log_2^M$ رقم باینری یک پالس ارسال می‌گردد. پالسی با یکی از

$2^\lambda = m$ دامنه مفروض دامنه هایی که معمولاً فرم $A_k \in \{\pm a, \pm 3a, \pm 5a, \dots, \pm (m-1)a\}$ را دارند.

در این حالت:

$$r = \frac{1}{T} = \frac{1}{\lambda} r_b = \frac{r_b}{\log_2^M}$$

ج (فیلتر فرستنده :

فیلتر فرستنده گاهی استفاده می شود و استفاده از آن می تواند به یکی از دو دلیل زیر باشد :

۱- حذف مؤلفه های فرکانس بالای PAM تولید شده به وسیله مولد پالس تا در کانال مزاحم سایر سیگنال ها نباشد .

۲- بهینه کردن سیستم (که بحث مجزایی دارد)

خروجی فیلتر فرستنده نیز سیگنال PAM خواهد بود با همان دامنه ها ولی شکل پالس متفاوت . در واقع داریم :

$$p_t(t) = p_g(t) * h_t(t) \Rightarrow P_t(f) = P_g(f) H_t(f)$$

د (کانال

در خروجی کانال نیز سیگنال PAM خواهیم داشت:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p_c(t - KT)$$

به عبارتی:

$$p_c(t) = p_t(t) * h_c(t) \Rightarrow P_c(f) = P_t(f) H_c(f)$$

در خروجی کانال تداخل زیاد بین پالس ها وجود دارد، البته این isi را می توان در گیرنده از بین برد (البته به شرطی که

$$B \geq B_N = \frac{r}{2} \text{ (باشد)}$$

ه (نویز:

نویز معادل سیستم را در ورودی گیرنده و با طیف قدرت $G_n(f)$ در نظر می گیریم معمولاً نویز را گوسی و سفید در نظر می گیرند .

و (فیلتر گیرنده:

فیلتر گیرنده همیشه در سیستم های مخابراتی حضور دارد، چرا که لازم است سیگنال مورد نظر را از نویز و سیگنال های خارج باند جدا نمود .

در سیستم های PAM این فیلتر نقش مهم دیگری نیز دارد و آن تبدیل شکل پالس دریافتی به یک شکل پالس نایکوئیست (حذف isi) می باشد . چرا که :

$$p_r(t) = p_c(t) * h_r(t)$$

که در حوزه فرکانس به صورت:

$$P_r(f) = P_c(f)H_r(f)$$

قابل نوشتن است.

حال می توان $H_r(f)$ را به قسمی اختیار کرد که مثلاً $P_r(f)$ یک شکل پالس Raised Cosine شود .

ز (مدار A/D

مدار A/D در واقع آشکارساز سیستم PAM است . به این ترتیب که با نمونه برداری از $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p_r(t - KT) + n(t)$$

در لحظات مضارب T (وسط پالس ها) دامنه پالس ها و لذا ارقام باینری متناظر را آشکار می کند . به دلیل وجود نویز و مقداری isi باقیمانده نمونه های اخذ شده در حول و حوش دامنه های مفروض خواهد بود که A/D نزدیکترین دامنه مفروض به نمونه اخذ شده را انتخاب می کند . البته احتمال خطا در تشخیص دامنه ها نیز وجود دارد . روشن است که برای نمونه برداری در لحظات مناسب (وسط پالس ها) یک همزمانی بین فرستنده و گیرنده لازم است .

فصل هشتم: مخابرات دیجیتال

احتمال خطا در تشخیص
دامنه ها

احتمال خطا در
تشخیص دامنه ها

فرض کنیم سیگنال $y(t)$ با شکل پالس $p_r(t)$ وارد A/D می شود.

طبق تعریف:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p_r(t - KT) + n(t)$$



حال با فرض $isi = 0$ و این که نویز مستقل از دامنه پالس ها باشد، احتمال خطا را محاسبه خواهیم کرد.

$$y(mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p_r(mT - KT) + n(mT) = \underbrace{p_r(0) A_m}_{\text{متناسب با دامنه پالس } m} + \underbrace{\sum_{k \neq m} A_k p_r(m - K)T}_{\text{isi}} + \underbrace{n(mT)}_{\text{noise}}$$

نمونه برای تشخیص دامنه پالس m

$P(t)$ شکل پالس نایکوئیست نرمالیزه ($p(0)=1$) در نظر گرفته می شود. بدین ترتیب ؛

$$p_r(t) = Kp(t)$$

خواهد بود.

$$\Rightarrow y(mT) = KA_m + \sum 0 + n(mT)$$

$$y(mT) = KA_m + n(mT)$$

که به اختصار $Y = S + N$ نوشته می‌شود. N نمونه نویز با $p_N(n)$, pdf است.

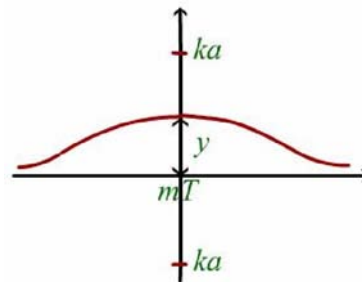
$$S = KA_m \in \{\pm ka, \pm 3ka, \dots, \pm k(m-1)a\}$$

ابتدا حالت باینری را در نظر می‌گیریم.

$$Y = S + N = \begin{cases} +ka + N & \text{برای پالس مثبت} \\ -ka + N & \text{برای پالس منفی} \end{cases} = \begin{cases} +ka \\ -ka \end{cases} + N$$

با در نظر گرفتن حد وسط (سطح صفر) به عنوان مرز تصمیم، اقدام به تصمیم‌گیری می‌شود. یعنی:

$$\begin{matrix} A_m = +a \\ Y > 0 \\ A_m = -a \end{matrix}$$



بدین ترتیب می‌توان احتمال خطا را با استفاده از قضیه احتمال کلی :

$$p_e = \overset{\overleftarrow{P_1}}{p\{s = -ka\}} p\{Y > 0 | s = -ka\} + \underset{\overleftarrow{p_2 = 1 - p_1}}{p\{s = ka\}} p\{Y < 0 | s = ka\}$$

قضیه احتمال

$$= p_1 p\{s + N > 0 | s = -ka\} + p_2 p\{s + N < 0 | s = ka\}$$

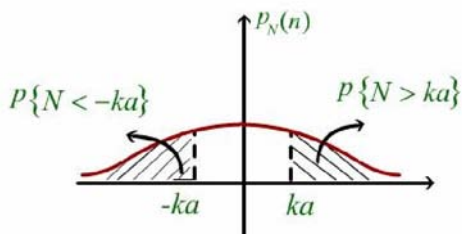
$$= p_1 p\{N > ka | s = -ka\} + p_2 p\{N < -ka | s = ka\}$$

به دلیل استقلال S و N می توان احتمال خطا را :

$$= p_1 p\{N > ka\} + p_2 p\{N < -ka\}$$

برای نویز با pdf متقارن داریم:

$$p\{N < -ka\} = p\{N > ka\}$$



و بنابراین:

$$\Rightarrow p_e = (p_1 + p_2) p\{N > ka\}$$

و از آنجا که در حالت باینری $p_1 + p_2 = 1$ است:

$$p_e = p\{N > ka\}$$

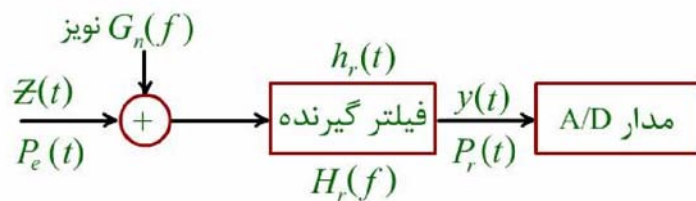
$$p_e = p\{N > ka\}$$

فصل هشتم: مخابرات دیجیتال

احتمال خطا بر حسب قدرت سیگنال و نویز
ومعرفی PAM بهینه - قسمت ۱

احتمال خطا بر
حسب قدرت سیگنال و
نویز و معرفی PAM
بهینه

شکل ساده شده گیرنده را بصورت زیر در نظر بگیرید.



با این مفروضات که:

نویز گوسی با متوسط صفر و مستقل از دامنه پالس‌ها، دامنه‌ها متساوی الاحتمال و در ضمن دامنه‌ها متعامد باشند.
بعلاوه $isi=0$ فرض می‌شود، یعنی:

$$P_r(t) = KP(t)$$

یا k برابر شکل پالس نایکوئیست
نرمالیزه باشد

حال احتمال خطا P_e را بر حسب قدرت دریافتی S_R و طیف قدرت نویز $G_n(f)$ بدست می‌آوریم.

اگر نویز در ورودی گیرنده گوسی باشد در ورودی A/D نیز گوسی خواهد بود و لذا می‌توان نوشت:

$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \left(\frac{Ka}{\sigma} \right)$$

$$\sigma^2 = n_0^2 - \bar{n}_0^2 = n_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{n_0}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) |H_r(f)|^2 df$$

$$\bar{n}_0 = 0$$

از طرفی:

$$S_R = \int_{-\infty}^{+\infty} G_z(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_d(f) |p_c(f)|^2 df$$

$$G_d(f) = \frac{a^2}{T}$$

$$\begin{aligned} \overline{a^2} &= \frac{1}{M}(a)^2 + \frac{1}{M}(-a)^2 + \frac{1}{M}(3a)^2 + \frac{1}{M}(-3a)^2 + \dots + \frac{1}{M}(-(M-1)a)^2 \\ &= \frac{2}{M}a^2 [1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (M-1)^2] = \frac{2}{M}a^2 \frac{M(M^2-1)}{6} \\ &= \frac{M^2-1}{3}a^2 \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$p_r(f) = p_c(f) \cdot H_r(f) = kP(f) \Rightarrow P_c(f) = \frac{kP(f)}{H_r(f)}$$

بنابراین:

$$S_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(M^2 - 1)a^2}{3T} K^2 \left| \frac{P(f)}{H_r(f)} \right|^2 df$$

$$\Rightarrow |ka|^2 = \frac{3S_R T}{M^2 - 1} \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P(f)}{H_r(f)} \right|^2 df}$$

بدین ترتیب:

$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \sqrt{\frac{3S_R T}{M^2 - 1} \times \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P(f)}{H_r(f)} \right|^2 df \int G_n(f) |H_r(f)|^2 df}}$$

معمولاً در باند فرکانسی مورد نظر $G_n(f) \approx \frac{\eta}{2}$ است.

$$G_n(f) \cdot |H_r(f)|^2 = \frac{\eta}{2} |H_r(f)|^2$$

$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \sqrt{\frac{6 S_R T}{(M^2 - 1) \eta} \times \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P}{H_r} \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r|^2 df}}$$

از نامساوی شوارتز داریم:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} U(f) V^*(f) df \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |U(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 df$$

حالت تساوی وقتی رخ می دهد که $U(f) = K_0 V(f)$ باشد.

$$\frac{P(f)}{H_r(f)} = U(f) \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \right)^2 < \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P}{H_r} \right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r|^2 df$$

$$H_r(f) = V^*(f) \quad p(0) = 1$$

باتوجه به این نامساوی و اینکه تابع نزولی از آرگومان آن است، می توان نوشت:

$$P_e \geq 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \sqrt{\frac{6 S_R T}{(M^2 - 1) \eta}}$$

که حالت تساوی یعنی کمترین (سیستم PAM بهینه) وقتی حاصل می گردد که :

$$U(f) = K_0 V(f)$$

در حالتی که ما اینجا تعریف کردیم، یعنی:

$$\frac{P(f)}{H_r(f)} = K_0 H_r^*(f) \Rightarrow |H_r(f)|^2 = \frac{1}{K_0} P(f)$$

البته ضمناً لازم است که :

$$P_c(f) H_r(f) = K P(f)$$

$$P_g(f) H_t(f) H_c(f) H_r(f) = K P(f)$$

پس لازم است فیلتری نیز دز فرستنده به کاربرد تا بتوان تساوی فوق را ایجاد کرد .
فیلتری با تابع تبدیل

$$H_t(f) = \frac{K P(f)}{P_g(f) H_c(f) H_r(f)}$$

فصل هشتم: مخابرات دیجیتال

مبادله قدرت و عرض باند
در سیستم PAM

مبادله قدرت و عرض
باند در سیستم
PAM

حالت

$$B > B_N = \frac{r}{2} = \frac{r_b}{2 \log M}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{r_b} \geq \frac{1}{2 \log M}$$

را در نظر بگیرید.

از طرفی

$$P_e \geq 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \sqrt{\frac{6 S_R T}{(M^2 - 1) \eta}}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\left(Q^{-1} \frac{P_e}{2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)} \right)^2 \leq \frac{6 S_R T}{(M^2 - 1) \eta} = \frac{6 S_R \log M}{(M^2 - 1) \eta r_b}$$

$$\Rightarrow \frac{S_R}{\eta r_b} \geq \frac{M^2 - 1}{6 \log M} \left[Q^{-1} \frac{P_e}{2 \left(1 - \frac{1}{M}\right)} \right]^2$$

یعنی هر چه M بیشتر باشد، عرض باند لازم کمتر، ولی در عوض قدرت لازم بیشتر می گردد.
در جدول زیر این مورد را ملاحظه می کنید.

M	2	4	8	16	32
$\frac{B}{r_b} \geq$	0/5	0/25	0/16	0/125	0/1
$P_e = 10^{-4}$ برای $\frac{S_R}{\eta r_b} (dB) \geq$	8/4	12/6	17/2	22	27/1
$P_e = 10^{-5}$ برای $\frac{S_R}{\eta r_b} (dB) \geq$	9/6	13/7	18/3	23/1	28/2

(۱) راندمان مبادله بین عرض باند لازم و قدرت لازم ابتدا خوب است ولی با افزایش M ضعیف می‌گردد. به این جهت و همچنین به دلیل این که با افزایش M حساسیت سیستم به isi شدیداً افزایش می‌یابد (به عبارت دیگر درصد کوچکی از تداخل پالس بزرگ روی پالس با دامنه کوچک مجاورش می‌تواند باعث خطا شود) در عمل معمولاً از PAM باینری و حداکثر از PAM چهارتایی استفاده می‌شود.

(۲) ملاحظه می‌گردد که با یک دسیبل تغییر قدرت دریافتی، احتمال خطا تقریباً با ضریب ۱۰ تغییر می‌کند و این به خاطر آن است که تابع Q تابعی شدید (نمایی) از آرگومانش می‌باشد.

(۳) اختلاف بین S_R لازم برای احتمال خطای 10^{-4} و 10^{-5} تقریباً مستقل از M است (حدود $0.1dB$ اینجا ملاحظه می‌شود) و این بدلیل کم اهمیت بودن نقش عبارت $2(1 - \frac{1}{M})$ در فرمول مربوطه است.



$$y(f) = \sum_k A_k P(t - kT)$$

$$G_y(f) = G_d(f) |P(f)|^2$$

$P(f)$ که شکل پالس است با شرط $isi=0$ تعیین می گردد و تنظیم آن به همین منظور لازم است.

طیف PAM ضربه ای

$$G_d(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} e^{-j2\pi f_i T}$$

$$R_i = [EA_{k+i}A_k]$$

در عمل به دلایلی که ذکر خواهد شد لازم است $G_y(f)$ را تنظیم کنیم، چون $P(f)$ ، همانطور که گفته شد با شرط $isi = 0$ تعیین می گردد پس تنظیم $G_d(f)$ نیز لازم می آید.

کد بندی به منظور
تنظیم طیف

بطور کلی تنظیم طیف سیگنال برای مناسب کردن آن جهت عبور از کانال مطرح می گردد. (در حالت ایده آل کاری می کنیم که در جاهایی که کانال عبور بهتری دارد انرژی بیشتری متمرکز باشد و بالعکس) طیف سیگنال به خصوصیات آماری سیگنال نیز بستگی دارد. (در سیگنال PAM به R_f ها). با کد بندی می توان خصوصیات آماری دامنه ها را کنترل کرد و از این طریق طیف را تنظیم نمود.

سه کاربرد مهم کد بندی:

- (الف) باینری کردن پیغام - کد بندی منبع (Source Encoding)
- (ب) مقاوم کردن پیغام در مقابل خطا - کد بندی کانال (Channel Encoding)
- (ج) تنظیم طیف سیگنال - کد بندی خط (Line Encoding)

علت اینکه کاربرد سوم، کد بندی خط نامیده شده است آن است که این کد بندی عمدتاً در کانال های کابلی مطرح می گردد تا مشکل اصلی این کانال ها را برطرف کند. به دلیل وجود ترانس های تطبیق امپدانس (امپدانس کم فرستنده به امپدانس زیاد خط و امپدانس کم خط به امپدانس زیاد گیرنده) و اینکه در کانال های کابلی، تغذیه الکتریکی غالباً به صورت سیگنال DC همراه با سیگنال پیغام ارسال می گردد لازم است سیگنال پیغام حاوی مولفه DC نباشد. در واقع مولفه های فرکانس پایین هم نباید داشته باشد. لذا در سیستم های PAM از کد بندی برای حذف مولفه DC سیگنال PAM استفاده می شود.

سه کد بندی خط معروف عبارتند از:

- کد بندی AMI
- کد بندی HDB3
- کد بندی 4BBT

الف) کدبندی AMI (یا کدبندی Bipolar)

AMI= Alternative Mark Inversion

$$x(t) = \sum_k A_k P_g(t - kT)$$



در این کدبندی ارقام باینری به PAM ترنری (M=3 تایی) تبدیل می گردد.
در این حالت:

$$A_k \in \{-2a, 0, +2a\}$$

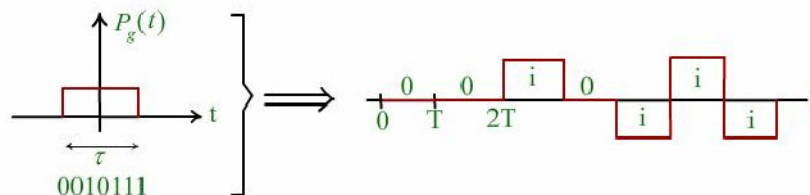
با قراردادی بصورت زیر:

رقم k ام	A_k
0	0
1	$\pm 2a$

$$r = \frac{1}{T} = r_b \text{ سرعت ارقام}$$

مثال

با در نظر گرفتن شکل $p_g(t)$ به صورت یک تابع مستطیلی مطابق شکل، سیگنال کدبندی شده باینری بصورت نشان داده شده برای کد ۰۰۱۰۱۱۱ مشاهده می‌شود.



با این کار در واقع دائماً سعی می‌گردد که سطح DC سیگنال تا لحظه حاضر در حد صفر نگه داشته شود.

بطوریکه خواهیم دید این عمل باعث می‌گردد که $G_x(0) = 0$ باشد. با فرض استقلال و متساوی‌الاحتمال بودن صفرو یکها طیف را محاسبه می‌کنیم. داشتیم:

$$G_d(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{R_i}{T} e^{-j2\pi f iT}$$

در جدول مشاهده شده، دامنه‌های PAM برای سه رقم متوالی بعلاوه احتمال‌های مربوطه با فرض متساوی الاحتمال بودن آمده است.

۳ رقم متوالی	A_k	A_{k+1}	A_{k+2}	
000	0	0	0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
001	0	0	$\pm 2a$	$\frac{1}{8}$
010	0	$\pm 2a$	0	$\frac{1}{8}$
011	0	$\pm 2a$	$\mp 2a$	$\frac{1}{8}$
100	$\pm 2a$	0	0	$\frac{1}{8}$
101	$\pm 2a$	0	$\mp 2a$	$\frac{1}{8}$
110	$\pm 2a$	$\mp 2a$	0	$\frac{1}{8}$
111	$\pm 2a$	$\mp 2a$	$\pm 2a$	$\frac{1}{8}$

بدین ترتیب داریم:

$$R_o = \frac{1}{8}(0)^2 + \frac{1}{8}(0)^2 + \frac{1}{8}(0)^2 + \frac{1}{8}(0)^2 + \left[\frac{1}{8}(\pm 2a)^2 \right] \times 4$$

$$\Rightarrow R_0 = 2a^2$$

$$R_1 = E[A_k A_{k+1}] = \left[\frac{1}{8}(0) \right] \times 6 + \frac{1}{8}(\pm 2a)(\mp 2a) + \frac{1}{8}(\pm 2a)(\mp 2a)$$

$$\Rightarrow R_1 = -a^2$$

بدیهی است:

$$R_{-1} = R_1 = -a^2$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_{-2} = E[A_k A_{k+2}] \\ &= \left[\frac{1}{8}(0) \right] \times 6 + \frac{1}{8}(\pm 2a)(\mp 2a) + \frac{1}{8}(\pm 2a)(\pm 2a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_2 = R_{-2} = 0$$

به همین ترتیب می توان استدلال نمود که:

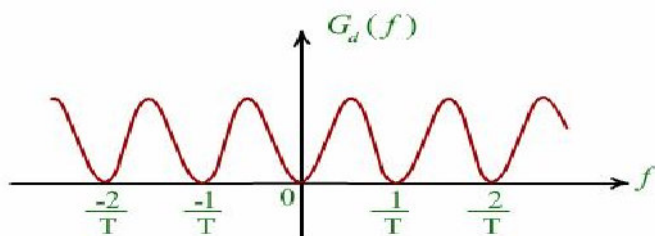
$$R_i = 0; |i| \geq 2$$

بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} G_d(f) &= \frac{R_0}{T} e^0 + \frac{R_1}{T} e^{-j2\pi fT} + \frac{R_{-1}}{T} e^{j2\pi fT} \\ &= \frac{2a^2}{T} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{2} e^{j2\pi fT} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_d(f) = \frac{2a^2}{T} [1 - \cos 2\pi fT] = \frac{4a^2}{T} \sin^2[\pi fT]$$

$G_d(f)$ حاصل را در شکل ملاحظه می کنید:



$$G_d(0) = 0$$

روشن است که:

لذا:

$$G_x(0) = G_d(0) |P(0)|^2 = 0$$

۱- با این کد بندی ارقام باینری PAM ترنری تبدیل می گردد.

که هم مداری مفصل تر از باینری دارد و هم اینکه برای احتمال خطای ثابت، قدرت دریافتی بیشتر از PAM باینری نیاز دارد (تقریباً $4/3$)

$$\text{در } PAM \text{ باینری} \quad P_e \geq Q \sqrt{\frac{2S_R}{\eta r_b}}$$

$$\text{در } AMI \quad p_e \geq 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) Q \sqrt{\frac{6S_R T}{(3^2 - 1)\eta}} = \frac{4}{3} Q \sqrt{\frac{3S_R}{4\eta r_b}}$$

در این محاسبات از روابطی که قبلاً بدست آورده بودیم استفاده شد.

برای p_e یکسان و با صرف نظر کردن از اختلاف ضرایب Q لازم است.

$$2 \left(\frac{S_R}{\eta r_b} \right)_{Binary} = \frac{3}{4} \left(\frac{S_R}{\eta r_b} \right)_{AMI} \Rightarrow \frac{(S_R)_{AMI}}{(S_R)_{Binary}} = \frac{8}{3} = 4/3 dB$$

یعنی سیگنال در AMI باید حدود $4/3 dB$ قویتر از سیگنال باینری باشد تا به احتمال خطای یکسان دسترسی پیدا کنیم.

۲- با این کد بندی یک خاصیت جالبی هم ایجاد می شود و آن ایجاد قابلیت تشخیص خطا است، که باعث نقص قانون AMI می گردد.

۳- در صورت وجود ارقام صفر متوالی در AMI برای مدت زمان مربوطه سیگنالی دریافت نخواهد شد و در شرایطی که همزمانی گیرنده با فرستنده از طریق خود سیگنال دریافتی حاصل شود وجود ارقام صفر متوالی باعث به هم خوردن هم زمانی گیرنده با فرستنده می‌شود. کدهای $HDB3$ و $4BTT$ به عنوان مطالعه برای دانشجویان باقی گذاشته شده.

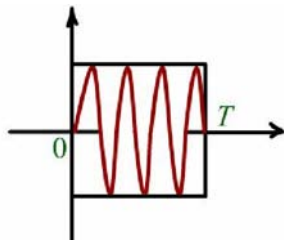
مخابره دیجیتال در باند
میانی (Passband Data
(Communication

اگر کانال قادر نباشد فرکانس های پایین را انتقال دهد (مثل کانال رادیویی) و یا اینکه قادر باشد ولی بدلیل لزوم FDM، باند فرکانسی اختصاص یافته یک باند میانی باشد باید ارقام را به فرم سیگنال میان گذر در آورد و ارسال نمود. این کار را می توان به دو روش انجام داد:

الف) تبدیل ارقام به سیگنال باند پایه (معمولاً PAM) و استفاده از مدولاسیون های آنالوگ برای تبدیل آن به سیگنال میان گذر (البته بعد از اینکه عرض باند سیگنال باند پایه را محدود کردیم).

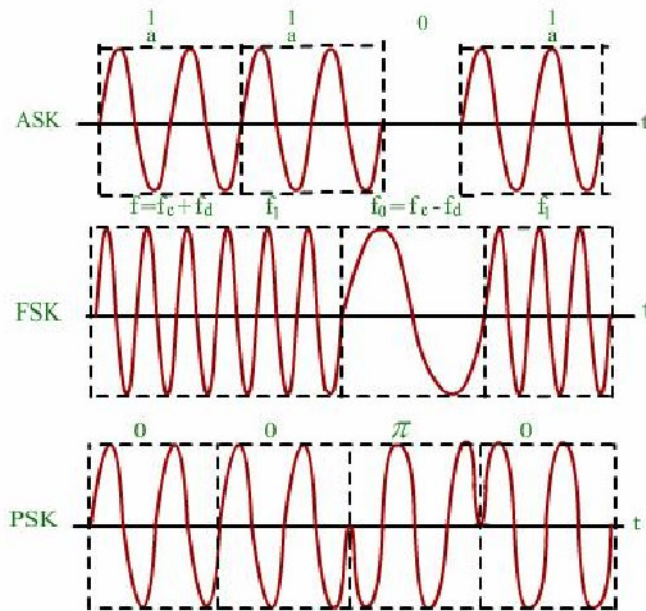
ب) تبدیل مستقیم ارقام به سیگنال باند میانی:

برای این منظور کافی است ارقام را به سیگنالی متشکل از یک رشته پالس RF (یا کاربر) متناظر تبدیل کنیم یعنی پالس هایی که طیفی متمرکز در حول یک فرکانس میانی داشته باشند که رایج ترین آن پالس سینوسی با پوش چهار گوش است.



اگر دامنه پالس های RF متناظر با ارقام قرار داده شود سیگنال حاصل را ASK گویند.
اگر فرکانس پالس های RF متناظر با ارقام قرار داده شود سیگنال حاصل را FSK گویند.
اگر فاز پالس های RF متناظر با ارقام قرار داده شود سیگنال حاصل را PSK گویند.

در شکل مثال هایی از ASK، FSK و PSK ملاحظه می کنید.



نکات:

- ۱) حسن روش تولید مستقیم سیگنال باند میانی سادگی مدار است و عیب آن عرض باند زیاد سیگنال تولیدی است. طیف این سیگنال ها تا ∞ ادامه دارد.
- ۲) حسن روش تبدیل سیگنال باند پایه به سیگنال باند میانی آن است که می توان سیگنالی با عرض باند محدود داشت (تا حد عرض باند نایکوئیست) و عیب آن مفصل تر بودن مدار مربوطه است.
- ۳) با توجه به نکته ۲ برای تبدیل سیگنال باند پایه به سیگنال باند میانی غالباً از مدولاسیون های آنالوگ خطی استفاده می شود. (مثل VSB یا DSB)
- ۴) حسن ASK سادگی مدار است. (تولید ساده و آشکارسازی به روش پوش امکان پذیر است).
- ۵) حسن FSK و PSK داشتن پوش ثابت و لذا مقاوم بودن در مقابل اعوجاج غیر خطی مسیر است.
- ۶) مثال های فوق مثال های ساده باینری بود و حالات M تایی و ترکیبی آنها نیز به کار می رود.

آشکار سازی بهینه
پالس

منظور از آشکار سازی پالس تشخیص این مساله است که در سیگنال دریافتی حاوی نویز کدام یک از مثلاً M پالس مفروض موجود است. به عبارت ریاضی:

$$\begin{aligned} z(t) &= s(t) + n(t) \\ s(t) &\in \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\} \\ n(t) & \\ s(t) &= ? \end{aligned}$$

حال با مفروضات زیر روش بهینه آشکار سازی پالس را مطرح خواهیم کرد.

۱- نویز، گوسی و مستقل از پالس باشد.

۲- نویز، سفید باشد.

۳- پالسهای مختلف متساوی الاحتمال باشند.

$$P\{s(t) = s_i(t)\} = \frac{1}{M}$$

در بین فرضهای فوق فرض اساسی ساده کننده مساله همان فرض اول است با حذف فرض های دوم و سوم نیز می توان روش بهینه آشکار سازی پالس را به صورت تحلیلی بدست آورد. مساله آشکار سازی پالس علاوه بر مخابرات دیجیتال در زمینه های دیگر مثل سیستم های رادار یا بینایی ماشین و ... نیز مطرح می گردد.

تشخیص وجود یا عدم
وجود پالس مفروض

در حالت کلی سیگنال دریافتی می‌تواند شامل پالس اصلی، $P(t)$ ، به همراه نویز، $n(t)$ ، و یا اینکه تنها متشکل از نویز، $n(t)$ ، باشد. در این صورت سیگنال دریافتی $Z(t)$ را می‌توان به این شکل نوشت:

$$Z(t) = \begin{cases} P(t) \\ 0 \end{cases} + n(t)$$

یک روش برای تشخیص وجود یا عدم وجود سیگنال تصمیم‌گیری بر مبنای مقدار سیگنال دریافتی در یک لحظه به عنوان مثال $t = t_0$ است.

این تصمیم‌گیری می‌تواند به شکل روبرو انجام گیرد:

$$Z(t_0) \begin{matrix} \text{وجود} \\ \rangle \frac{1}{2} P(t_0) \\ \langle \frac{1}{2} P(t_0) \\ \text{نبود} \end{matrix}$$

واضح است که خطا در این روش هنگامی صورت می‌پذیرد که مقدار نویز از آستانه تصمیم‌گیری بیشتر باشد در این صورت احتمال خطا از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$P_e = P\left\{n(t_0) \rangle \frac{1}{2} P(t_0)\right\} = Q\left(\frac{\frac{1}{2} P(t_0)}{\sigma}\right)$$

روشن است که محل پیک شکل پالس مفروض مناسب‌ترین لحظه برای نمونه‌برداری است. البته به دو دلیل این روش بهینه نخواهد بود چرا که هیچ تلاشی برای کاهش اثر نویز صورت نگرفته و دیگر اینکه فقط از اطلاعات موجود در یک لحظه استفاده شده است، در حالیکه مقدار سیگنال دریافتی در لحظات دیگر نیز حاوی اطلاعاتی در مورد وجود یا نبود سیگنال می‌باشد.

آشکارسازی بهینه به کمک مدار همبستگی

در این روش به جای تصمیم‌گیری بر مبنای نمونه سیگنال دریافتی در یک لحظه، تصمیم‌گیری را بر پایه ترکیب خطی از نمونه‌های مربوط به زمان‌های مختلف استوار می‌کنیم. در حالت کلی این ترکیب خطی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) z(\alpha) d\alpha = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) p(\alpha) d\alpha \\ 0 \end{cases} + \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) p(\alpha) d\alpha$$

بنابراین احتمال خطا چنانچه آستانه تصمیم‌گیری برابر $\frac{1}{2} P_0$ در نظر گرفته شود برابر است با:

وجود

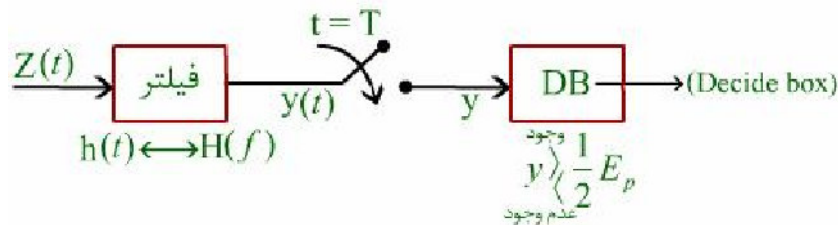
$$y > \frac{1}{2} P_0$$

نبود

$$p_e = p\left\{N > \frac{1}{2} P_0\right\} = Q\left(\frac{\frac{1}{2} P_0}{\sigma_0}\right)$$

آشکارسازی بهینه به
کمک فیلتر منطبق
Matched Filter

در این روش به کمک یک فیلتر، کیفیت نویزی سیگنال دریافتی را بهبود می‌بخشیم و سپس با توجه به نمونه خروجی فیلتر در یک لحظه اقدام به تصمیم‌گیری می‌کنیم. این روند در شکل نشان داده شده است و می‌توان به صورت زیر نوشت:



$$Z(t) = \begin{cases} P(t) \\ 0 \end{cases} + n(t) \Rightarrow y(t) = Z(t) * h(t) = \begin{cases} P(t) * h(t) \\ 0 \end{cases} + n(t) * h(t)$$

$$= \begin{cases} p_0(t) \\ 0 \end{cases} + n_0(t)$$

$$y = Y(T) = \begin{cases} P_0(T) \\ 0 \end{cases} + n_0(T)$$

$$y \begin{matrix} \text{وجود} \\ > \frac{1}{2} P_0(T) \\ < \frac{1}{2} P_0(T) \\ \text{نیود} \end{matrix}$$

پاسخ سیستم خطی به نویز گوسی، گوسی می‌باشد. لذا

$$P_e = P\left\{n_0(T) \gg \frac{1}{2}P_0(T)\right\} = Q\left(\frac{\frac{1}{2}P_0(T)}{\sigma_0}\right)$$

که توان سیگنال و نویز در خروجی گیرنده از روابطی که در ادامه آمده است تعیین می‌گردند.

$$p_0(t) = p(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) p(t - \alpha) d\alpha$$

آشکارسازی بهینه به
کمک فیلتر منطبق
Matched Filter

توان سیگنال در خروجی گیرنده عبارت است از:

$$p_0(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) p(T - \alpha) d\alpha$$

توان نویز در خروجی گیرنده:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \overline{n_0^2(T)} - \overline{n_0(T)}^2 = \overline{n_0^2(T)} = P_{n_0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{n_0}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2} E_h \end{aligned}$$

خواهد بود نوشت. و بنابراین رابطه احتمال خطا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$p_e = Q \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) P(T - \alpha) d\alpha \right)^2}{\frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\alpha) d\alpha}} \times \frac{E_p}{E_p}$$

با توجه به این که $E_p = \int_{-\infty}^{\infty} P^2(T - \alpha) d\alpha$ این رابطه را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

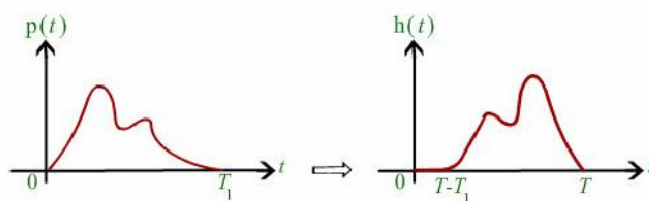
$$P_e = Q \sqrt{\frac{E_p}{2\eta} \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) P(T - \alpha) d\alpha)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^2(T - \alpha) d\alpha}}$$

بر طبق نامساوی شوارتز نسبت انتگرال‌ها حداکثر برابر با ۱ می‌باشد. و بنابراین:

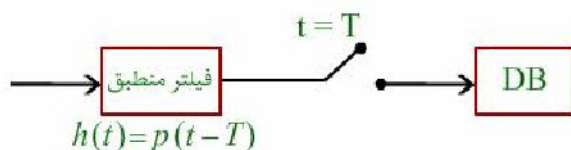
$$P_e \geq Q \sqrt{\frac{E_p}{2\eta}}$$

حالت تساوی در نامساوی شوارتز هنگامی اتفاق می‌افتد که $h(\alpha) = kp(T - \alpha)$ باشد و چنانچه $K=1$ انتخاب شود این بدین مفهوم است که $h(t) = p(T - t)$

مثال:



فیلتر با پاسخ ضربه $h(t) = p(t - T)$ را فیلتر منطبق برای شکل پالس $p(t)$ گویند.



$$\left\langle \begin{matrix} \text{وجود} \\ y \end{matrix} \right\rangle \frac{1}{2} P_0(T) = \frac{1}{2} E_p \quad \left\langle \begin{matrix} \text{نبود} \end{matrix} \right\rangle$$

$$p_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) p(T - \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(T - \alpha) d\alpha = E_p$$

$$p_e = Q \sqrt{\frac{E_p}{2\eta}}$$

بدیهی است به منظور علی شدن فیلتر باید $T - T_1 \geq 0$ باشد یا به عبارت دیگر برای تصمیم‌گیری حداقل باید به اندازه‌ای صبر نمود که همه نمونه‌ها وارد فیلتر شوند.

تمایز بین دو
پالس مفروض

$$Z(t) = \begin{cases} s_1(t) + n(t) \\ s_2(t) + n(t) \end{cases} = \begin{cases} s_1(t) \\ s_2(t) \end{cases} + n(t)$$

در این رابطه $s_1(t)$ ، $s_2(t)$ و $Z(t)$ معلوم‌اند.
با یک ابتکار ساده می‌توان مسئله را به حالت قبل تبدیل کرد.

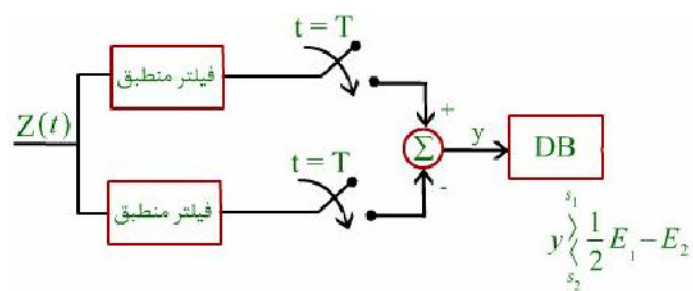
$$Z(t) - s_2(t) = \begin{cases} s_1(t) - s_2(t) \\ 0 \end{cases} + n(t)$$

ملاحظه می‌گردد که مسأله معادل است با اینکه ببینیم در $Z(t) - s_2(t)$ آیا $(s_1 - s_2)$ دیده می‌شود یا خیر؟ بنابر این مسأله تبدیل خواهد شد به اینکه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z(t) - s_2(t))(s_1(t) - s_2(t))dt \begin{matrix} s_1 \\ \rangle \frac{1}{2} E_{s_1-s_2} \\ \langle \frac{1}{2} \\ s_2 \end{matrix}$$

حال تمایز بین دو پالس مفروض را می‌توان حالت کلی آشکارسازی باینری دانست که در آن $s_1(t) = p(t)$ و $s_2(t) = 0$ است.

بلوک دیاگرام مربوط به حالت تمایز بین دو پالس هنگامی که از فیلترهای منطق استفاده می شود به شکل زیر خواهد بود. همان طور که ملاحظه می شود:



تمایز بین M
پالس مفروض

در این حالت سیگنال دریافتی را می‌توان به یکی از M حالت زیر در نظر گرفت.

$$Z(t) = \begin{cases} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_M(t) \end{cases} + n(t)$$

سیگنال دریافتی

که در آن مقادیر سیگنال $s_M(t)$ و ... و $s_1(t)$ و $Z(t)$ مفروض‌اند.

در اینجا معیار انتخاب شبیه‌ترین پالس را عنوان می‌کنیم و ارتباط آن را با معیار قبلی (که در حالت باینری به کار رفت) یعنی معیار انتخاب مهمترین پالس بیان خواهیم کرد.
الف) معرفی معیار انتخاب شبیه‌ترین پالس.

$$\Delta_i \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (z(t) - s_i(t))^2 dt$$

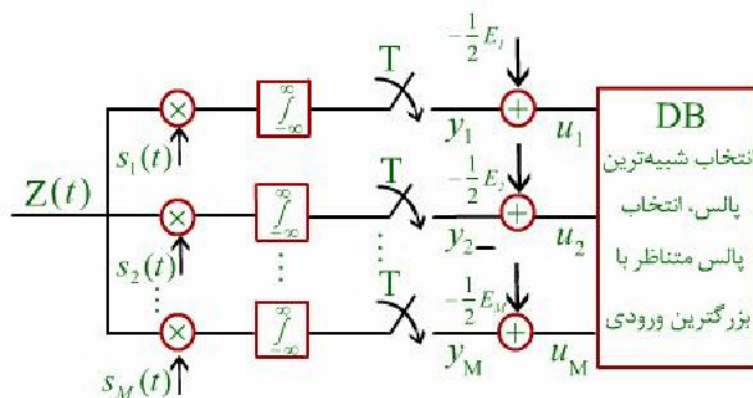
Δ_i را می‌توان پارامتر مناسبی دانست که معرف اختلاف شکل $Z(t)$ با $s_i(t)$ است. در معیار انتخاب شبیه‌ترین پالس، پالسی انتخاب می‌گردد که برای آن کمترین Δ_i را داشته باشیم.

$$\Delta_i = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2(t) dt + E_i - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) s_i(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} z^2(t) dt - 2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} z(t) s_i(t) dt - \frac{1}{2} E_i \right]$$

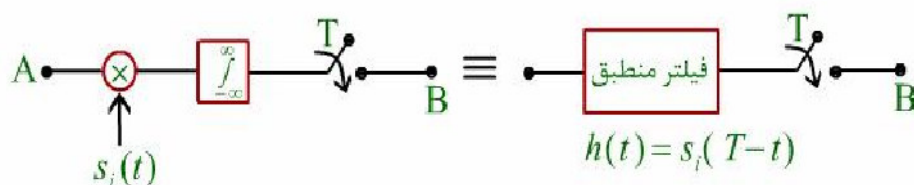
پس باید پالسی انتخاب شود که برای آن $\int_{-\infty}^{+\infty} z(t) s_i(t) dt - \frac{1}{2} E_i$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

این معیار را می‌توان به صورتیکه در شکل نشان داده شده پیاده‌سازی کرد.



نکات:

۱. می‌توان به جای بانکی از مدارهای همبستگی، بانکی از فیلترهای منطبق بکار برد چرا که:



۲. اگر انرژی پالس‌ها با هم برابر باشند دیگر کم کردن نصف انرژی‌ها ضرورتی نخواهد داشت و کافی است پالسی انتخاب شود که بیشترین همبستگی را با سیگنال دریافتی دارد.

۳. روش انتخاب شبیه‌ترین پالس روشی است که برای هر نویزی از نظر طیف و pdf می‌تواند بکار رود و کاملاً ملموس است که نتایج مفیدی هم خواهد داد. ضمناً برای نویز گوسی سفید و مستقل از پالس می‌توان نشان داد که این روش احتمال خطای مینیمم دارد یعنی معادل است با همان روش انتخاب مهمترین پالس.

ب) استفاده از فضای
سیگنال و تعبیر
هندسی

فضای سیگنال (Signal Space) عبارت است از مجموعه متشکل از پالس‌های $s_1(t)$ و $s_2(t)$ و ... و $s_M(t)$ و کلیه ترکیبات خطی آن‌ها (فضای برداری) در حالت کلی $Z(t)$ در داخل این فضا قرار ندارد. (به دلیل وجود $n(t)$ که لزوماً ترکیب خطی از s_1 الی s_M نیست)، ولی می‌توان $Z(t)$ را روی فضای سیگنال تصویر نمود. می‌توان در فضای فوق تعداد $N \leq M$ پالس متعامد و نرمالیزه پیدا کرد به طوریکه s_1 تا s_M را بتوان بصورت ترکیبی خطی از آن‌ها بیان کرد. پالس‌های متعامد نرمالیزه یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0; i \neq j \\ 1; i = j \end{cases}$$

یک روش انتخاب پالس‌های پایه روش گرام اشمیت است.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_{11}\phi_1(t) + \dots + a_{1N}\phi_N(t) \\ s_2(t) &= a_{21}\phi_1(t) + \dots + a_{2N}\phi_N(t) \\ &\vdots \\ s_M(t) &= a_{M1}\phi_1(t) + \dots + a_{MN}\phi_N(t) \end{aligned}$$

در فضای سیگنال، پالس مثلاً $s_i(t)$ را می‌توان نقطه‌ای به مختصات

$$\begin{pmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_2} \\ \vdots \\ a_{i_N} \end{pmatrix}$$

دانست.

تصویر سیگنال دریافتی در امتداد $\phi_j(t)$ عبارت است از :

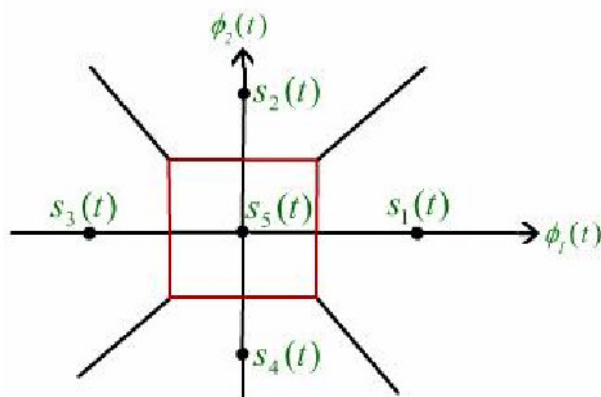
$$\int z(t) \phi_j(t) dt = x_j$$

و تصویر سیگنال دریافتی در فضای سیگنال:

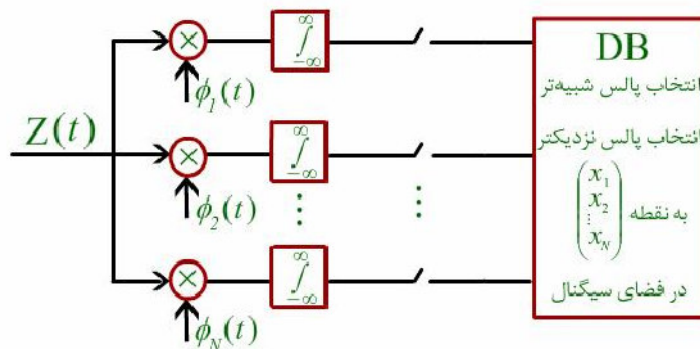
$$z_o(t) = x_1(t)\phi_1(t) + \dots + x_N(t)\phi_N(t) = \sum_{k=1}^N x_k \phi_k(t)$$

مثال: فضای سیگنال دو بعدی:

می‌توان فضای سیگنال را به ناحیه M و A_1 و A_2 و ... و A_M تفکیک کرد که در آن نقاط A_i به $s_i(t)$ از همه نزدیکتر باشد.



تصویر $Z(t)$ در هر ناحیه‌ای که قرار گیرد پالس موجود در آن شبیه‌ترین پالس می‌باشد. روش پیاده‌سازی در شکل مشاهده می‌شود.



در حالتی که $M \gg N$ باشد پیاده‌سازی این روش خیلی ساده‌تر از روش قبلی خواهد بود.

مدولاسیون ASK (یا ook)

مدولاسیون ASK را در حالت باینری ook یا on off keying می‌نامند.

الف- تجزیه و تحلیل سیگنال ook

در مدولاسیون ook به منظور ارسال رقم صفر، فرستنده خاموش و در هنگام ارسال رقم ۱ به عنوان مثال پالس $s_1(t)$ ارسال می‌شود. بدین ترتیب در هر بازه به عرض T

$$z(t) = \begin{cases} s_1(t) = a \cos(\omega_c t) & \text{مثلاً برای رقم ۱} \\ s_2(t) = 0 & \text{مثلاً برای رقم ۰} \end{cases}$$

این سیگنال را می‌توان به این ترتیب نیز نمایش داد:

$$z(t) = \sum A_k \cos(\omega_c t) \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right) = \frac{1}{2}(1+b(t))a \cos(\omega_c t)$$

بدیهی است در عبارت فوق A_k ، دامنه تصادفی و متعلق به مجموعه $\{a, 0\}$ خواهد بود و $b(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b(t) = \sum_k B_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right); B_k \in \{-1, 1\}$$

در واقع $b(t)$ PAM نرمالیزه است.

$$m_z(t) = E[z(t)] = \frac{1}{2}(1 + \overline{b(t)})a \cos(\omega_c t)$$

$$\overline{b(t)} = \sum_k \underbrace{\overline{B_k}}_0 \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m_z(t) = \frac{a}{2} \cos(\omega_c t)$$

حال داریم:

$$z(t) = m_z(t) + \tilde{z}(t) = \frac{a}{2} \cos(\omega_c t) + \underbrace{b(t) \frac{a}{2} \cos(\omega_c t)}_{\tilde{z}(t)}$$

که می‌توان از آن نتیجه گرفت:

$$G_z(f) = G_{mz}(f) + G_{\tilde{z}}(f)$$

$$m_z(t) = \frac{a}{2} \cos(\omega_c t) \Rightarrow M_z(f) = \frac{a}{4} \delta(f - f_c) + \frac{a}{4} \delta(f + f_c)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_{mz}(f) &= \left| \frac{a}{4} \right|^2 \delta(f - f_c) + \left| \frac{a}{4} \right|^2 \delta(f + f_c) \\ &= \frac{a^2}{16} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}(t) = b(t) \frac{a}{2} \cos(\omega_c t) &\Rightarrow \underset{\tilde{z}}{G}(f) = G_b(f) * G_{\frac{a}{2} \cos \omega_c t}(f) \\
 &= G_b(f) * \frac{a^2}{16} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\
 &= \frac{a^2}{16} [G_b(f - f_c) + G_b(f + f_c)]
 \end{aligned}$$

$$b(t) = \sum B_k \operatorname{rect}\left(\frac{t - kt}{T}\right)$$

بدین ترتیب:

$$G_b(f) = G_d(f) |P(f)|^2$$

و داریم:

$$P(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

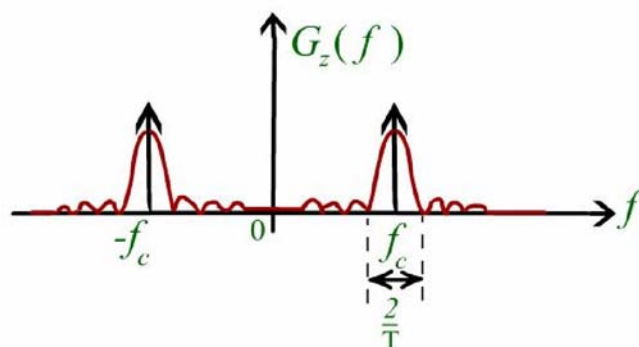
$$G_d(f) = \frac{\overline{B_k^2}}{T} = \frac{1}{T}$$

خواهد بود با فرض تعامد B_k ها. بدین ترتیب:

$$\Rightarrow G_b(f) = T \text{Sinc}^2(fT)$$

بنابراین طیف سیگنال **ook** به صورت زیر خواهد بود.

$$G_z(f) = \frac{a^2}{16} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + T \text{Sinc}^2(f - f_c)T + T \text{Sinc}^2(f + f_c)T \right]$$



همان‌طور که ملاحظه می‌شود. این طیف تا ∞ ادامه دارد منتهی با مجانب $\frac{1}{f^2}$ به سمت صفر میل می‌کند. در چنین مواردی عرض باند عملی سیگنال به صورت‌های مختلف تعریف می‌شود. مثلاً عرض باند لوب اصلی طیف، یعنی عرض باند سیگنال وقتی از لوب‌های فرعی $Sinc^2$ صرف‌نظر کرده باشیم. مانیز عرض باند لوب اصلی (Main Lobe) را در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$B = \frac{2}{T} = 2r = 2r_b$$

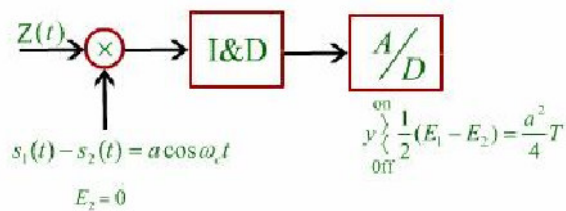
$$Z(t) = \frac{1}{2}(1 + b(t))a \cos \omega_c t$$

ب) آشکارسازی هم‌دوس
(Coherent)

در سیگنال **ook** کاریر موجود است و با یک فیلتر میان‌گذر باند باریک (مثلاً یک مدار رزونانس) می‌توان کاریر را استخراج کرد. با داشتن کاریر در واقع شکل پالس‌ها را داریم.
به خاطر داریم که:

$$\begin{cases} S_1(t) = a \cos \omega_c t \\ S_2(t) = 0 \end{cases}$$

لذا می‌توان به روش بهینه آشکارسازی کرد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود.



به منظور محاسبه احتمال خطا در روش آشکارسازی همدوس $E_1 - E_2 = E_1$ محاسبه می‌شود. داریم:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^T (a \cos \omega_c t)^2 dt = \frac{a^2}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega_c t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(T + \frac{\sin 2\omega_c T}{2\omega_c} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} T [1 + \text{Sinc}(4f_c T)] \approx \frac{a^2}{2} T \end{aligned}$$

بنابراین احتمال خطا برابر است با:

$$p_e = Q \sqrt{\frac{E_{s_1-s_2}}{2\eta}} = Q \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} T}{2\eta}} = Q \sqrt{\frac{a^2}{4\eta r_b}}$$

توجه داریم که:

$$E_{s_1-s_2} = E_{s_1} = E_1 = \frac{a^2}{2} T$$

$$S_R = \frac{\overline{E_i}}{T} = \frac{\frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2}{T} = \frac{\frac{1}{2}E_1}{T} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{T} = \frac{a^2}{4}$$

و چنانچه احتمال خطای $p_e = 10^{-4}$ در نظر گرفته شود:

$$\frac{S_R}{\eta r_b} = 11/4dB$$

یعنی نسبت توان سیگنال به نویز برای دسترسی به:

$$p_e = 10^{-4}$$

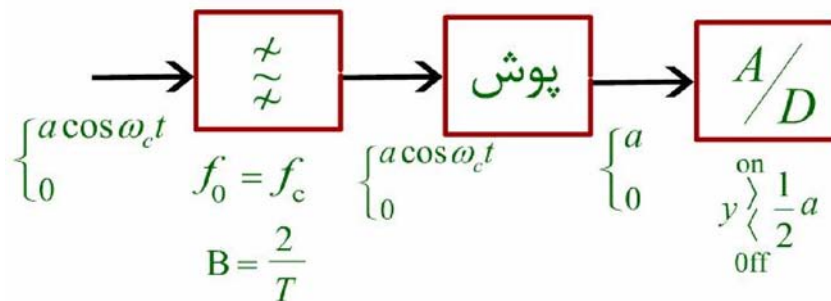
بدین ترتیب می‌توان احتمال خطا را به صورت $p_e = Q \sqrt{\frac{S_R}{\eta r_b}}$ نوشت. حال چنانچه

$p_e = 10^{-4}$ در نظر گرفته شود، از این رابطه مقدار $\frac{S_R}{\eta r_b} = 11/4dB$ به دست خواهد

آمد.

(ج) آشکارسازی غیرهمدوس
(به روش پوش)

بلوک دیاگرام مربوطه را در شکل ملاحظه می کنید.



همان طور که ملاحظه می شود سیگنال ورودی بعد از عبور از یک فیلتر با فرکانس مرکزی

f_c و پهنای باند $\frac{2}{T}$ آشکارسازی پوش شده و برای تصمیم گیری ارسال می شود. مرز تصمیم گیری نیز $\frac{1}{2}a$ می باشد.

محاسبه احتمال خطا به دلیل وجود مدار غیرخطی در مسیر مفصل است. Pdf نویز در ورودی A/D گوسی نیست و وابسته به پالس نیز می باشد. به همین دلیل تنها به ذکر نتایج اکتفا می کنیم:

$$p_e = \frac{1}{2} e^{\frac{-S_R}{4\eta r_b}}$$

و مجدداً چنان چه احتمال خطای مجاز را $p_e = 10^{-4}$ در نظر بگیریم:

$$\frac{S_R}{\eta r_b} = 15.3 \text{ dB}$$

لازم خواهد بود که از حالت قبل بیشتر است.

نکات:

۱- مزیت اصلی **ook** مدار ساده آن می‌باشد. (تولید ساده و آشکارسازی به روش پوش برای این روش امکان‌پذیر است.)

۲- یک اشکال **ook** داشتن مرز تصمیم وابسته به سطح سیگنال دریافتی است که سیستم را نسبت به تغییرات افت مسیر حساس می‌کند البته می‌توان با یک مدار به طور اتوماتیک دائماً مرز تصمیم را تنظیم کرد ولی این کار مزیت سادگی **ook** را کاهش می‌دهد.

مدولاسیون
(BFSK)FSK

الف) تجزیه و تحلیل سیگنال BFSK (باینری FSK)

در حالت کلی در مدولاسیون FSK از تغییرات فرکانس برای متمایز ساختن الفبای منبع استفاده می شود. در حالت باینری این تغییرات برابر ۲ است و به عنوان مثال سیگنال $Z(t)$ می تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$Z(t) = \begin{cases} s_1(t) = a \cos \omega_1 t & \text{مثلاً برای رقم ۱} \\ s_2(t) = a \cos \omega_2 t & \text{مثلاً برای رقم 0} \end{cases} \quad \text{در هر بازه به عرض } T$$

این سیگنال را می توان به صورت مجموع دو سیگنال **ook** دانست و بنابراین $Z(t)$ را به این ترتیب نوشت:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum a \cos \Omega_k t \operatorname{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right) = \frac{1}{2}(1+b(t)) \cos(\omega_1 t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-b(t)) a \cos(\omega_2 t) \\ \Omega_k &\in \{\omega_1, \omega_2\} \\ &= z_1(t) + z_2(t) \end{aligned}$$

$b(t)$ استفاده شده در بحث مربوط به **ook** نیز مورد استفاده قرار گرفت.

بدین ترتیب طیف سیگنال با توجه به این که:

$$G_b(f) = T \sin c^2(fT)$$

برابر خواهد بود با:

$$G_z(f) = \frac{a^2}{16} \left[\delta(f \pm f_1) + \delta(f \pm f_2) + TSinc^2(f \pm f_1)T + TSinc^2(f \pm f_2)T \right]$$

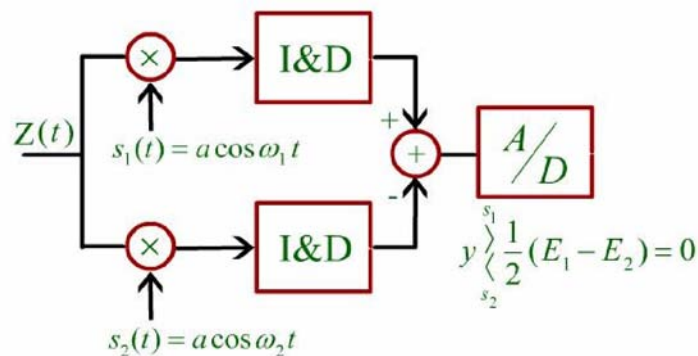
آشکارسازی هم‌دوس (به روش بهینه)

در سیگنال FSK نیز کاربرها موجودند و لذا به کمک فیلتر می‌توان آن‌ها را استخراج کرد. با دانستن کاربرد در واقع شکل پالس‌ها را داریم:

$$\begin{cases} s_1(t) = a \cos \omega_1 t \\ s_2(t) = a \cos \omega_2 t \end{cases}$$

و لذا می‌توان به روش بهینه آشکارسازی کرد.

۱- همان‌طور که ملاحظه می‌شود پس از ضرب سیگنال $Z(t)$ در $s_1(t)$ و $s_2(t)$ و مراحل آشکارسازی (detection) برای تصمیم‌گیری با مرز $\frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ که در واقع مرز صفر است، ارسال خواهد شد.



در ادامه به منظور مقایسه این روش با روش مدولاسیون قبلی میزان $\frac{S_R}{\eta r_b}$ برای این روش

مدولاسیون را تعیین می‌کنیم.

$$E_1 = E_2 \approx \frac{1}{2} a^2 T$$

و بنابراین:

$$E_{s_1-s_2} = a^2 T [1 - \text{Sinc} 2T(f_1 - f_2)] = a^2 T k$$

و بدین ترتیب:

$$p_e = Q \sqrt{\frac{a^2 T k}{2\eta}}$$

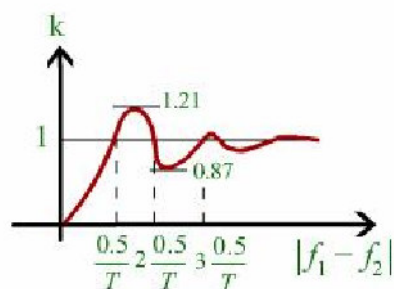
از طرفی:

$$T = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_b}$$

$$S_R = \frac{a^2}{2}$$

بنابراین:

$$p_e = Q \sqrt{\frac{S_R}{\eta r_b}} k; k = 1 - \text{Sinc} 2T(f_1 - f_2)$$

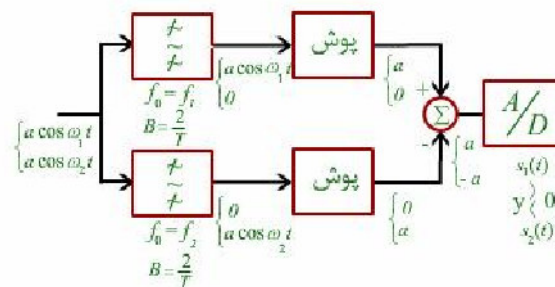


در عمل معمولاً $|f_1 - f_2| \geq \frac{0.5}{T}$ می باشد و لذا $0.87 \langle k \rangle 1.21$ را دارد.
بدین ترتیب اگر:

$$p_e = 10^{-4} \Rightarrow 12dB \rangle \frac{S_R}{\eta r_b} \rangle 10.6dB$$

ج) آشکارسازی
غیرهمدوس (به روش
پوش)

اگر $|f_1 - f_2| \geq \frac{2}{T}$ باشد تداخلی بین لوب های اصلی برای دو سیگنال ook نخواهیم داشت و با فیلتر می توان آن دو را جدا نمود و به روش پوش آشکارسازی نمود. بلوک دیاگرام مربوطه در شکل آمده است.



محاسبه احتمال خطا به دلیل وجود مدار غیرخطی مفصل است. در این حالت نتایج، شبیه نتایج حالت آشکارسازی پوش در روش ook است.

نکات:

۱- یک مزیت FSK داشتن پوش ثابت و لذا مقاوم بودن در مقابل اعوجاج غیرخطی مسیر است.

۲- مزیت دیگر FSK داشتن رمز تصمیم صفر یعنی غیروابسته بودن به سطح سیگنال دریافتی است که سیگنال را در مقابل تغییرات افت مسیر غیر حساس می‌کند.

۳- از نظر قدرت متوسط لازم FSK نظیر ook است ولی از نظر قدرت پیک لازم 3dB بهتر از ook (به عبارتی قدرت پیک کمتری نیاز دارد) می‌باشد.

S_{RP} قدرت پیک لازم برابر است با:

$$S_{RP} = \frac{E_{Max}}{T}$$

به عنوان مثال در مدولاسیون ook:

$$S_{RP} = \frac{Max\{E_1, E_2\}}{T} = \frac{E_1}{T} = \frac{a^2}{2}$$

در حالی که S_R برابر است با:

$$S_R = \frac{\overline{E_i}}{T} = \frac{\frac{1}{2}(E_1 + E_2)}{T} = \frac{\frac{1}{2}E_1}{T} = \frac{a^2}{4}$$

بنابراین:

$$S_{RP} = 2S_R$$

در حالی که در FSK:

$$S_{RP} = \frac{Max\{E_1, E_2\}}{T} = \frac{E_1}{T} = \frac{a^2}{2}$$

جایی که:

$$S_R = \frac{\frac{1}{2}(E_1 + E_2)}{T} = \frac{\frac{1}{2}E_1}{T} = \frac{a^2}{2}$$

بدین ترتیب در FSK:

$$S_R = S_{RP}$$

لذا در شرایطی که هر دو به قدرت متوسط یکسان نیاز دارندOOK به قدرت پیک دو برابر نیاز خواهد داشت.

تجزیه تحلیل سیگنال
BPSK

به طور کلی در مدولاسیون PSK در هر بازه زمانی پالس ارسالی با فاز خاصی ارسال می شود. در حالت BPSK (مدولاسیون باینری PSK) برای مشخص کردن پالس های ارسالی به دو فاز احتیاج داریم که معمولاً این دو فاز 0 و π انتخاب می شود. و بنابراین سیگنال ارسالی می تواند به این صورت نوشته شود:

$$z(t) = \begin{cases} s_1(t) = a \cos \omega_0 t & \text{رقم 1} \\ s_2(t) = a \cos(\omega_0 t - \pi) = -s_1(t) & \text{رقم 0} \end{cases} \quad T$$

و در حالت کلی:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_0 T - \theta_k) \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

در تمام بازه ها

جایی که $\theta_k \in \{0, \pi\}$ و متغیر تصادفی ماست.

در حالت خاص BPSK می توان سیگنال را به شکل زیر نمایش داد.

$$z(t) = b(t) a \cos \omega_0 t$$

جایی که:

$$b(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

و B_k می تواند +۱ یا -۱ باشد، مجدداً نرمالیزه است.
 PSK را می توان مدولاسیون DSB سیگنال $b(t)$ دانست.
 طیف سیگنال BPSK نیز به قرار زیر قابل محاسبه است.

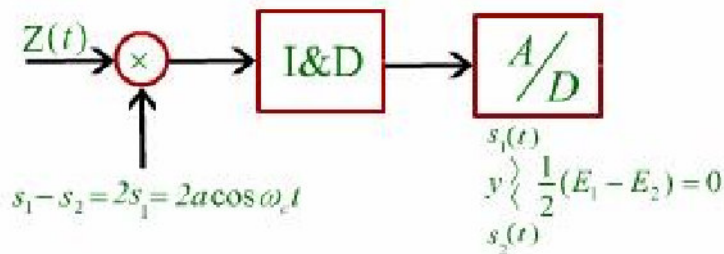
$$G_z(f) = G_b(f) * G_{a \cos \omega_0 t}(f) = \frac{a^2}{4} T \text{Sinc}^2(f \pm f_c) T$$

آشکارسازی همدوس (به روش بهینه)

در سیگنال PSK کاربرد موجود نیست ولی با یک مدار غیرخطی تغییرناپذیر با زمان مثلاً مربع کننده می توان کاربرد را ایجاد و با فیلتر استخراج نمود (نظیر DSB).
در اینجا:

$$z^2(t) = b^2(t)a^2 \cos^2 \omega_o t = a^2 \cos^2 \omega_o t \Rightarrow a \cos \omega_o t$$

با داشتن کاربرد در واقع شکل پالس ها را داریم و می توان به روش بهینه آشکارسازی کرد.



محاسبات مربوط به p_e (احتمال خطا) و S_R (توان سیگنال) نتایج زیر را بدست خواهد داد.

$$S_R = \frac{a^2}{2}$$

$$p_e = Q \sqrt{\frac{2S_R}{\eta r_b}}$$

و مجدداً چنان چه احتمال خطای مجاز $p_e = 10^{-4}$ در نظر گرفته شود،

$$\frac{S_R}{\eta r_b} = 8.4dB$$
 در این روش به دست خواهد آمد.

نکات:

- ۱- در PSK پوش ثابت است و لذا PSK نیز به اعوجاج غیرخطی مسیر حساس نیست.
- ۲- در PSK مرز تصمیم صفر می باشد یعنی وابسته به سطح سیگنال دریافتی نیست و لذا PSK به تغییرات افت مسیر نیز حساس نمی باشد.
- ۳- برای احتمال خطای یکسان، PSK قدرتی کمتر از ASK و FSK نیاز دارد (تقریباً 3dB کمتر در آشکارسازی همدوس)
- ۴- در استخراج کاریر برای آشکارسازی همدوس احتمال بروز یک خطای فاز π وجود دارد که در این صورت گیرنده همه صفرها را یک و همه یکها را صفر تلقی خواهد کرد. یک راه رفع این مشکل آن است که فرستنده در شروع مخابره و در فواصل زمانی مشخص کد مفروضی مثل 110110110 برای گیرنده ارسال کند و به این ترتیب در واقع فاز رقم 1 و رقم 0 را برای گیرنده تعریف می کند. راه دیگر استفاده از کدبندی تفاضلی در آشکارسازی همدوس است.

مدولاسیون های
M تایی دیجیتال

پس از بررسی مدولاسیون های باینری دیجیتال نوبت به بررسی مدولاسیون های M تایی که حالت تعمیم یافته مدولاسیون های باینری هستند می رسد. نخست MPSK را بررسی می کنیم.

مدولاسیون MPSK در این حالت m فاز گوناگون برای ارسال سیگنال مورد استفاده قرار می گیرد.

$$Z(t) = \begin{cases} s_1(t) = a \cos(\omega_c t - \theta_1) \\ s_2(t) = a \cos(\omega_c t - \theta_2) \\ \vdots \\ s_M(t) = a \cos(\omega_c t - \theta_M) \end{cases}$$

در هر بازه بعرض T

S_i ها را می توان به این فرم نوشت:

$$s_i(t) = a \cos(\omega_c t - \theta_i) = a \cos \theta_i \cos \omega_c t + a \sin \theta_i \sin \omega_c t$$

و بنابر این در MPSK پالس ها به یک فضای سیگنال دوبعدی تعلق دارند.

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_c t \end{cases}$$

سیگنال های پایه این فضا می باشند که متعامد بوده و انرژی واحد دارند.

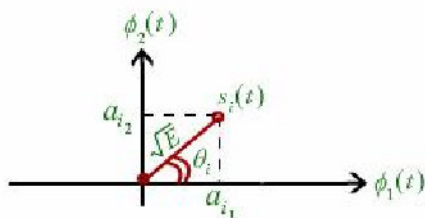
بدین ترتیب:

$$s_i(t) = a_{i_1} \phi_1(t) + a_{i_2} \phi_2(t)$$

جایی که:

$$\begin{cases} a_{i_1} = \sqrt{\frac{a^2 T}{2}} \cos \theta_i = \sqrt{E} \cos \theta_i \\ a_{i_2} = \sqrt{\frac{a^2 T}{2}} \sin \theta_i = \sqrt{E} \sin \theta_i \end{cases}$$

در شکل این موضوع واضح تر بیان شده است.



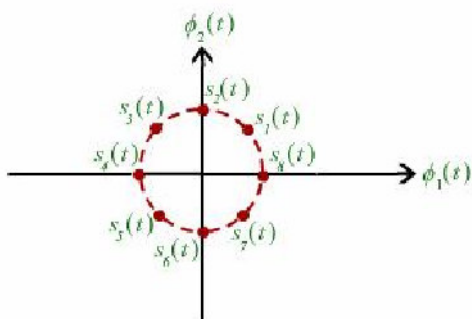
در فضای سیگنال M نقطه روی دایره ای به شعاع \sqrt{E} داریم. برای اینکه بیشترین فاصله زاویه ای را از هم داشته باشند فازها را به فواصل مساوی در نظر می گیریم.

$$\left(\frac{2\pi}{M} \text{ فواصل}\right)$$

مثلاً:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{2\pi}{M} \\ \theta_2 &= 2\frac{2\pi}{M} \\ &\vdots \\ \theta_M &= M\frac{2\pi}{M}\end{aligned}$$

که در شکل نیز آمده است.



$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a \cos(\omega_c t - \theta_k) \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

$$\theta_k \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M\} \text{ فاز تصادفی پالس } k\text{ام}$$

بدین ترتیب:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos \theta_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right) a \cos \omega_c t + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin \theta_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right) a \sin \omega_c t$$

ضریب $a \cos \omega_c t$ را معمولاً $c(t)$ و ضریب $a \sin \omega_c t$ را $e(t)$ می نامند.
با توجه به رابطه فوق سیگنال MPSK را می توان مجموع دو DSB دانست یکی
شده $c(t)$ با $\cos \omega_c t$ و دیگری DSB شده $e(t)$ با $\sin \omega_c t$.

$$c(t) = \sum C_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right); C_k \in \{\cos \theta_1, \cos \theta_2, \dots, \cos \theta_M\}$$

$$e(t) = \sum E_k \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right); E_k \in \{\sin \theta_1, \sin \theta_2, \dots, \sin \theta_M\}$$

و هر دو در واقع سیگنال های PAM چهار گوشند.
طیف $c(t)$ و $e(t)$ به شکل $T \text{Sinc}^2 fT$ است که با DSB شدن به حول
 $\pm f_c$ منتقل می گردند.
لذا با صرف نظر از لوبهای فرعی تابع مجذور سینک

$$B = \frac{2}{T} = 2r = 2 \frac{r_b}{\log M}$$

بدین ترتیب:

$$\Rightarrow \frac{B}{r_b} = \frac{2}{\log M}$$

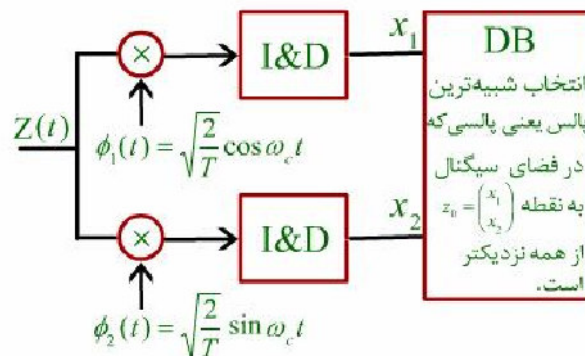
هر چه M را بیشتر بگیریم عرض باند کمتری نیاز خواهیم داشت.

آشکارسازی به روش
بهینه

در MPSK نیز کاربرد موجود نیست ولی با یک مدار غیرخطی می توان کاربرد را ایجاد و با فیلتر استخراج کرد. با داشتن کاربری همدوس در واقع پالس های پایه را داریم. یعنی:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t; \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_c t$$

لذا می توان به روش بهینه آشکارسازی نمود یعنی سیگنال دریافتی را روی فضای سیگنال تصویر کنیم و ببینیم به کدام یک از پالس ها نزدیک تر است. در شکل بلوک دیاگرام مربوطه آمده است.

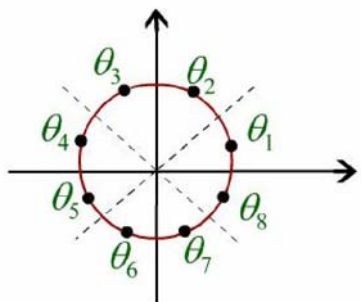


محاسبه احتمال خطا در حالت M تایی با استفاده از مفهوم فضای سیگنال که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت صورت می پذیرد. بدین معنی که با رسم نیمساز زاویه بین پالس ها فضا به M ناحیه تقسیم می گردد.

خطا هنگامی اتفاق می افتد که به دلیل وجود نویز $n(t)$ ، سیگنال از ناحیه مربوط به خود خارج شده و وارد ناحیه مربوط به سیگنال های دیگر شود که این خطا از رابطه احتمال کلی محاسبه می گردد.

$$p_e = p_1 \cdot p_{e|1} + p_2 \cdot p_{e|2} + \dots + p_M \cdot p_{e|M}$$

در این روابط $p_{e|i}$ احتمال خطا به شرط آشکارسازی i امین سیگنال است.

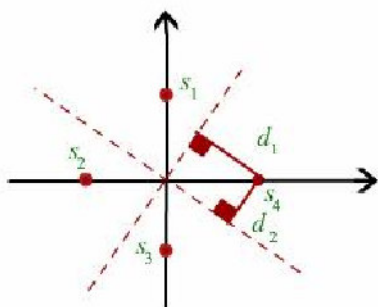


به منظور بررسی اثر نویز همان گونه که سیگنال اصلی در فضای متعامد مورد بررسی قرار گرفت نویز هم در همین فضای دوبعدی مورد بررسی قرار می گیرد. ناهمبسته و گوسی بودن دو نویز متعامد N_1, N_2 که هر دو دارای واریانس $\frac{\eta}{2}$ نیز می باشند باعث می

شود که:

$$p_{N_1 N_2}(n_1, n_2) = p_{N_1}(n_1) p_{N_2}(n_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-(n_1^2 + n_2^2)}{2\sigma^2}}$$

به عنوان مثال برای حالت 4PSK، شکل زیر را خواهیم داشت.



با توجه به این که مسأله حالت تقارن دارد احتمال خطا برای همه پالس‌ها شبیه یکدیگر است. بنابراین تنها یکی از آن‌ها محاسبه می‌شود:

$$p_e = p_{e|i} = p_{e|4}$$

احتمال خطا برای حالتی که S_4 فرستاده شده باشد برابر است با:

$$p_e = p_{e|4} = p\{n'_1 \rangle d_1\} + p\{n'_2 \rangle d_2\} - p\{n'_1 \rangle d_1, n'_2 \rangle d_2\}$$

بدین ترتیب:

$$p_{e|4} = \text{احتمال عبور از مرز ۱} + \text{احتمال عبور از مرز ۲} - \text{احتمال عبور از هر دو مرز}$$

بدین ترتیب:

$$p_{e|4} = Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

با در نظر گرفتن:

$$d_1 = d_2 = d \quad p_{e|4} = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

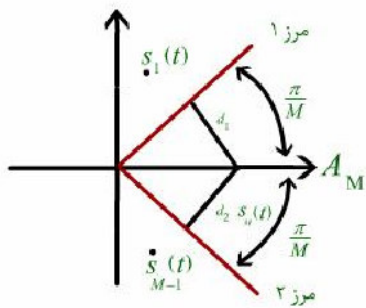
این رابطه چنان چه با احتمال خطاهای کوچک سر و کار داشته باشیم برابر خواهد بود با:

$$p_{e|4} = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

به عبارتی از $Q^2\left(\frac{d}{\sigma}\right)$ به دلیل کوچک بودن احتمال صرف نظر شده.

تعمیم به حالت MPSK

در شکل مرز را برای مثال مشاهده می کنید.



در حالت کلی خواهیم داشت:

$$p_e = Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) - \text{(احتمال ورود به ناحیه مشترک)}$$

پشت دو مرز

$$\approx p_e = Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

با فرض:

$$d_1 = d_2 = \sqrt{E} \sin \frac{\pi}{M} = \sqrt{S_R T \sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

می توان نوشت:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2} \Rightarrow p_e = 2Q \sqrt{\frac{2S_R T}{\eta} \sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

بدیهی است که در حالت باینری از آن جا که تنهای یک مرز تصمیم وجود دارد ضریب ۲ در محاسبه p_e وجود ندارد.

نکات:

۱- مبادله عرض باند قدرت:

داشتیم:

$$\frac{B}{r_b} = \frac{2}{\log M}$$

بدین ترتیب:

$$\left[Q^{-1}\left(\frac{p_e}{2}\right) \right]^2 = \frac{2S_R \log M}{\eta r_b} \sin^2 \frac{\pi}{M} \Rightarrow \frac{S_R}{\eta r_b} = \frac{\left[Q^{-1}\left(\frac{p_e}{2}\right) \right]^2}{2 \log \sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

جدولی که در ادامه آمده مبادله عرض باند لازم برای هر بیت در ثانیه را با $\frac{S_R}{\eta r_b}$ به ازای

احتمال خطای مجاز $p_e = 10^{-4}$ مورد بررسی قرار داده است.

M	2	4	8	16	32
$\frac{B}{r_b}$	2	1	0.67	0.5	0.4
$\frac{S_R}{\eta r_b} \text{ dB}$	8.4	8.8	12.3	17.0	22.0

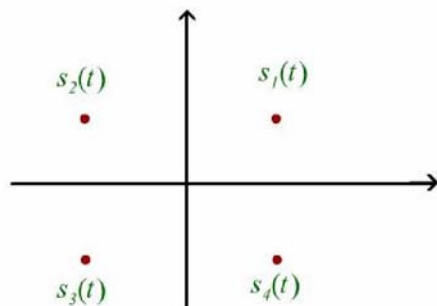
همان‌طور که ملاحظه می‌شود زیادت‌ر شدن M متناظر با کاهش عرض باند و افزایش سیگنال به نویز لازم برای آشکارسازی است.

۲) خطای فاز کریر گیرنده باعث چرخش پالس‌ها در فضای سیگنال می‌گردد و لذا پالس‌ها به یکی از دو مرز تصمیم خود نزدیک می‌گردند و احتمال خطا به شدت افزایش می‌یابد.

با توجه به اینکه با افزایش M ، فاصله زاویه‌ای پالس‌ها کاهش می‌یابد و لذا حساسیت به خطای فاز کریر گیرنده افزایش می‌یابد لذا به این جهت و بخاطر اینکه با افزایش M ، مبادله قدرت و عرض باند بسیار ضعیف می‌گردد در عمل حداکثر از 8PSK استفاده می‌گردد.

۳) بهترین مبادله قدرت و عرض باند در 4PSK وجود دارد. نصف شدن عرض باند لازم در ازای 0.4dB قدرت بیشتر و لذا PSK چهار تایی (موسوم به QPSK) یکی از رایجترین MPSK هاست.

ضمناً در QPSK معمولاً فازها را $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ می‌گیرند تا مرزهای تصمیم همان محورهای فضای سیگنال شود و برای تصمیم‌گیری فقط به علامت X_1 و X_2 نیاز باشد.



مدولاسیون
MQAM
(MASK/PSK)

تجزیه و تحلیل سیگنال MQAM :

تفاوت سیگنال ها در یک مدولاسیون MQAM ناشی از تفاوت در دامنه و فاز آنهاست. بنابراین هر نمونه از یک سیگنال MQAM می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$Z(t) \text{ در هر بازه به عرض } T = \begin{cases} s_1(t) = a_1 \cos(\omega_c t - \theta_1) \\ s_2(t) = a_2 \cos(\omega_c t - \theta_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ s_M(t) = a_M \cos(\omega_c t - \theta_M) \end{cases}$$

فضای سیگنال در اینجا نیز یک فضای دو بعدی خواهد بود.

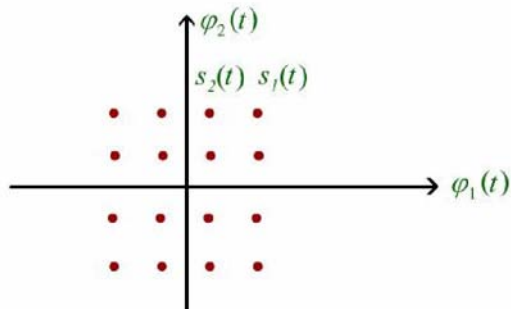
$$s_i(t) = a_i \cos(\omega_c t - \theta_i) = a_i \cos \theta_i \cos \omega_c t + a_i \sin \theta_i \sin \omega_c t$$

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t)$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t)$$

$$a_{i_1} = \sqrt{E_i} \cos \theta_i$$

$$a_{i_2} = \sqrt{E_i} \sin \theta_i$$



بنابراین یک سیگنال QAM را می توان بدین صورت نمایش داد:

$$z(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_c t - \theta_K) \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

$$(A_K, \theta_K) \in \{(a_1, \theta_1), (a_2, \theta_2), \dots, (a_m, \theta_m)\}$$

به عبارتی فاز و دامنه تصادفی پالس در بازه k ام.

$$z(t) = \sum_k \overbrace{A_k \cos \theta_K}^{C_K} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right) \underbrace{\cos \omega_c t}_{c(t)} + \sum_k \overbrace{A_k \sin \theta_K}^{E_K} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{T}\right) \underbrace{\sin \omega_c t}_{e(t)}$$

$$z(t) = c(t)\cos \omega_c t + e(t)\sin \omega_c t$$

این نحوه نمایش سیگنال $z(t)$ بیانگر دلیل انتخاب نام Quadrature Amplitude Modulation برای این مدولاسیون است.

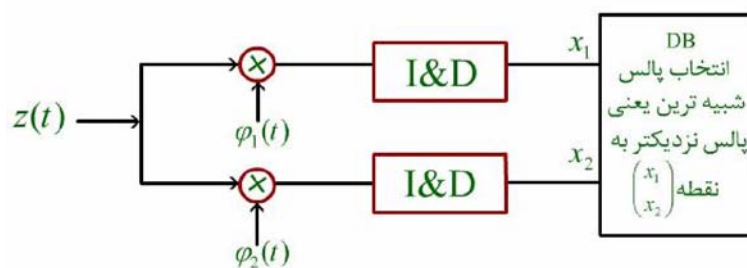
طیف هر یک از $e(t)$ و $c(t)$ در واقع یک $\text{sinc}^2(fT)$ است که با DSB شدن به حول $\pm f_c$ منتقل می‌گردند لذا با صرف نظر از لوبهای فرعی تابع sinc^2

$$B = \frac{2}{T} = 2r = \frac{2r_b}{\log M}$$

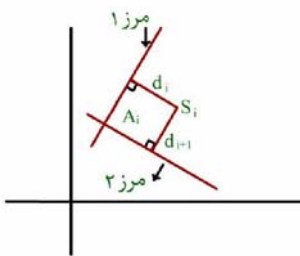
آشکارسازی
MQAM

به کمک مدار غیر خطی می توان کریر را در سیگنال MQAM ایجاد کرده و با فیلتر استخراج نمود.

با داشتن کریر در واقع پالس های پایه را داریم و می توان به روش بهینه آشکارسازی انجام داد.



بطور کلی برای تعیین ناحیه انتخاب پالس ها کافی است مرز تصمیم هر پالس را با پالس های مجاورش در نظر بگیریم. (معمولاً نصف خط واصل بین آنها)



در حالت کلی این ناحیه یک چند وجهی می گردد (مثلاً n_i وجهی برای پالس S_i) محاسبه احتمال خطا در این حالت نظیر MPSK است.

$$P_e = \bar{P}_{e|i} = \sum_{i=1}^m P_i P_{e|i}$$

$$P_{e|i} = Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) + \dots + Q\left(\frac{d_n}{\sigma}\right) - P \quad \left\{ \text{ورود به ناحیه مشترک پشت مرزهای مجاور} \right\}$$

$$\approx \sum_j Q\left(\frac{d_j}{\sigma}\right)$$

نکات

(۱) مبادله قدرت و عرض باند در MQAM، می تواند خیلی اقتصادی تر از MPSK یا MASK خالص باشد. در جدول آمده:

	16QAM رایج	16PSK	16ASK
$\frac{B}{r_b} = \frac{2}{\log M}$	0.5	0.5	0.5
$P_e : 10^{-4}$ لازم برای $\frac{S_R}{\eta r_b}$ (dB)	13.0	17.0	27.6

توجه کلی آن، اینکه برای کاهش عرض باند لازم باید تعداد پالس ها را افزایش داد و برای اینکه این کار احتمال خطا را بالا نبرد باید این عمل را ضمن حفظ فاصله پالس های مجاور از یکدیگر انجام داد. در MASK و MPSK این کار باعث افزایش بعد طول (فاصله ای که پالس ها اشغال کرده اند) به صورت متناسب با M می گردد، ولی در MQAM سطح اشغال شده توسط پالس ها (یعنی بعد مجذور طول)، متناسب با M افزایش می یابد. قدرت دریافتی لازم متناسب با متوسط انرژی پالس هاست و لذا در MQAM متناسب با M افزایش می یابد، ولی در MASK و MPSK متناسب با M^2 افزایش می یابد.

(۲) حساسیت MQAM به خطای فاز کریر گیرنده، می تواند خیلی کمتر از MPSK باشد، چرا که در MQAM می توان پالس ها را در جهت شعاعی نیز اختیار کرد. که این مسأله باعث تغییر نحوه تقسیم بندی فضای سیگنال و کاهش خطا می گردد.

۳) در MQAM پوش ثابت نیست و لذا سیگنال MQAM به اعوجاج غیر خطی مسیر حساس است.

۴) در MQAM مرزهای تصمیم وابسته به سطح سیگنال دریافتی است و لذا MQAM نسبت به افت مسیر حساس است.

مدولاسیون
MFSK

تجزیه و تحلیل سیگنال MFSK:

$$Z(t) = \begin{cases} s_1(t) = a_M \cos \omega_1 t \\ s_2(t) = a_M \cos \omega_2 t \\ . \\ . \\ s_M(t) = a_M \cos \omega_M t \end{cases}$$

در هر بازه به عرض T

در MFSK با یک فضای M بعدی سرو کار داریم. معمولاً از فرکانس هایی استفاده می کنیم که $s_i(t)$ ها را متعامد کند، یعنی:

به فرض اینکه سیگنال های پایه

$$\varphi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_i t \quad ; i = 1, 2, \dots, M$$

شرط تعامد عبارت خواهد بود از:

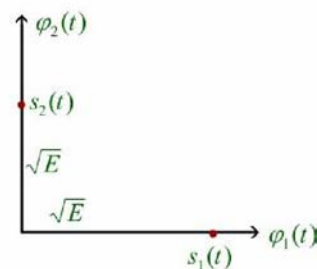
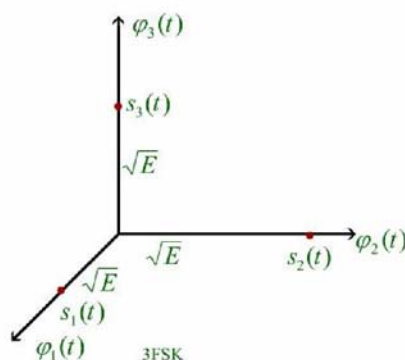
$$\begin{aligned}
 \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos \omega_i t \cos \omega_j t dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(\omega_i + \omega_j)t + \cos(\omega_i - \omega_j)t] dt \\
 &= \sin c 2(f_i + f_j)T + \sin c 2(f_i - f_j)T = 0 + \sin c 2(f_i - f_j)T
 \end{aligned}$$

چنانچه $2(f_i - f_j)T$ به گونه ای انتخاب گردد که:

$$2(f_i - f_j)T = n \Rightarrow f_i - f_j = n \frac{0.5}{T}$$

حاصل انتگرال فوق برابر صفر خواهد بود که شرط تعامد است.

مثال هایی از سیگنال 2FSK و 3FSK در ادامه مطرح می گردد.



سیگنال MFSK را در حالت کلی می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a \cos(\Omega_k t) \text{rect}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$$

$$\Omega_K \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M\}$$

فرکانس پالس بازه Kام (تصادفی)

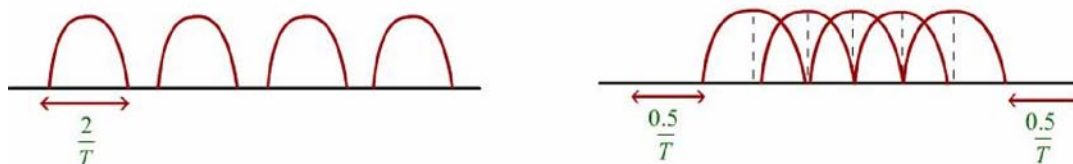
$$Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t) + \dots + Z_M(t)$$

MFSK را نیز می توان مجموع M عدد ook دانست، فرکانس های f_1, f_2, \dots, f_M که مثلاً i امین مورد با فرکانس f_i کاربر در همه بازه ها خاموش (off) می باشد به جز در بازه هایی که فرکانس f_i وجود دارد که در آنها روشن (on) است.

طیف هر ook یک $\sin^2(fT)$ در طول کاربر مربوطه است با صرفنظر از لوب های فرعی آن، عرض باند در رابطه زیر صدق خواهد کرد:

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T} + \frac{(M-1) \times 0.5}{T} \leq B \leq M \left(\frac{2}{T} \right)$$

که دو $\frac{1}{T}$ عبارت در این حالت یکی قبل از f_M و یکی بعد از f_M . در شکل می توان این رابطه را بهتر متوجه شد. حد بالایی در این رابطه مربوط به حالتی است که لوب اصلی طیف ها با هم هیچگونه همپوشانی ندارند و حالت مینیمم مربوط به حالتی است که حداکثر همپوشانی با رعایت شرط تعامد پالس ها اتفاق افتاده است.



$$\frac{1.5 + 0.5M}{T} \leq B \leq \frac{2M}{T}; \quad \frac{1}{T} = r = \frac{r_b}{\log M}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5 + 0.5M}{\log M} \leq \frac{B}{r_b} \leq \frac{2M}{\log M}$$

فصل پنجم:

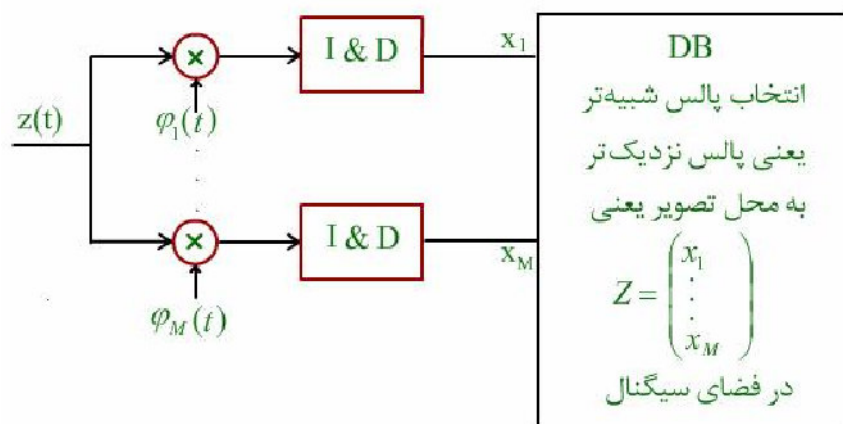
فرآیندهای تصادفی و نویز

آشکارسازی بهینه و
احتمال خطا

آشکارسازی
بهینه و احتمال
خطا

در سیگنال MFSK کریرها موجودند و لذا با M فیلتر باند باریک می توان آن ها را استخراج نمود و با داشتن کریرها به آشکارسازی بهینه پرداخت.

با اندکی دقت مشخص می گردد که در این جا کفایست پالس متناظر با بزرگترین ورودی جعبه تصمیم انتخاب شود.



برای محاسبه احتمال خطا مجدداً از قضیه احتمال کلی استفاده می کنیم.

$$p_e = \sum_{i=1}^M p_i p_{e|i}$$

چنانچه مؤلفه i ام از فضای سیگنال را به صورت $A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ در نظر بگیریم، که در آن تنها مؤلفه i ام که

مربوط به i امین فرکانس است غیر صفر می باشد، یعنی احتمال رخ دادن خطا به شرط دریافت مؤلفه i ام به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{e|i} = p\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_m \end{pmatrix} \notin A_i | s(t) = s_1(t)\right\}$$

سیگنال دریافتی، $z(t)$ را می توان به فرم:

$$z(t) \Big|_{s(t)=s_i(t)} = s_i(t) + n(t)$$

در این حالت خروجی انتگرال گیرها در آشکار کننده به جز آشکار کننده i ام برابر است با:

$$x_j = \int n(t) \phi_j(t) dt$$

یعنی تنها نویز در خروجی این آشکار کننده ها وجود دارد در حالیکه خروجی آشکار ساز i ام برابر است با:

$$\sqrt{E} + \int n(t) \phi_i(t) dt$$

به عبارت دیگر:

$$z_o = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{E} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} = S_i + \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix}$$

در این روابط:

$$N_k = \int n(t) \phi_k(t) dt \Rightarrow N_k = \frac{\eta}{2} E \eta_k = \frac{\eta}{2}$$

بنابراین N_k نویز گوسی با واریانس $\frac{\eta}{2}$ در نظر گرفته شده است.

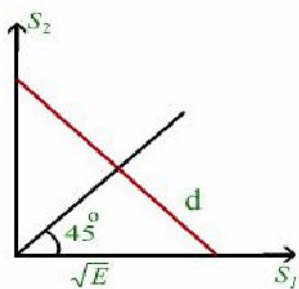
می توان ثابت نمود که N_i و N_j ناهمبسته هستند از سوی دیگر به دلیل گوسی بودن هر دوی آنها می توان نتیجه گرفت که مستقل از یکدیگر نیز می باشند.

$$p_{N_1 N_2 \dots N_m}(n_1, n_2, \dots, n_m) = \prod_{k=1}^m p_N(n_k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^M} e^{-\left(\frac{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_m^2}{2\sigma^2}\right)}$$

که یک pdf گوسی m بعدی، با تقارن مرکزی است. به دلیل این تقارن تصویر نویز در هر امتداد دلخواهی گوسی با

همان واریانس $\frac{\eta}{2}$ خواهد بود. در حالت 2FSK خواهیم داشت:

$$p_e = \overline{p_{e|i}} = p_{e|1} = Q\left(\frac{d}{\sigma}\right), d = \sqrt{\frac{E}{2}}$$



تعمیم به حالت MFSK:

در MFSK ناحیه انتخاب هر پالس دارای $M-1$ مرز تصمیم است و لذا با فرض کوچک بودن احتمال خطا خواهیم داشت:

$$p_e \approx (M-1)Q\left(\frac{d}{\sigma}\right), d = \sqrt{\frac{E}{2}} \quad \sigma^2 = \frac{\eta}{2}$$

$$S_R = \frac{\overline{E_i}}{T} = \frac{E}{T} \quad d^2 = \frac{S_R T}{2}$$

$$p_e = (M-1)Q\sqrt{\frac{S_R T}{\eta}} = (M-1)Q\sqrt{\frac{S_R \log M}{\eta r_b}}$$